

МІЖНАРОДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ЦЕНТР ІМЕНІ Ю.О. МИТРОПОЛЬСЬКОГО
НАН УКРАЇНИ

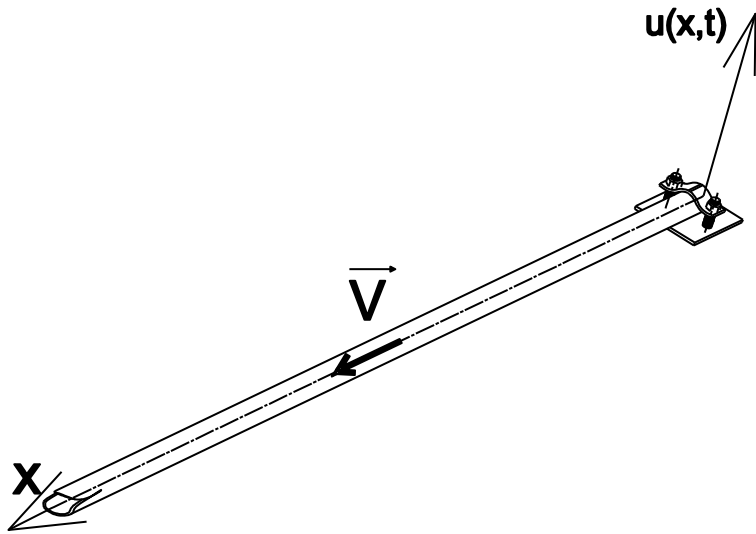
ТІМОХІН ОЛЕКСІЙ ПАВЛОВИЧ

НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТРУБОПРОВОДУ З
РІДИНОЮ В ОКОЛІ КРИТИЧНИХ ШВИДКОСТЕЙ
ТЕЧІЇ РІДИНИ

Спеціальність: 01.02.01 – теоретична
механіка

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

КИЇВ –
2015



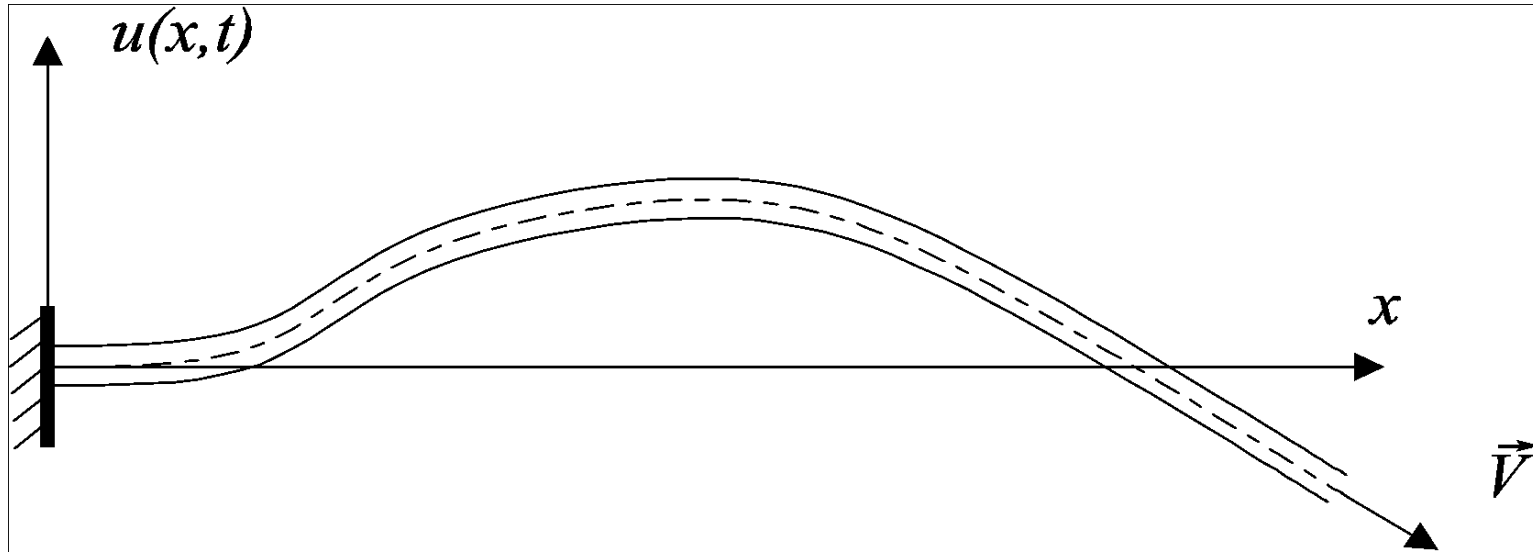
Актуальність роботи спричинена широким використанням трубопроводів в енергетичних транспортних системах, літакобудуванні, космічній галузі, а також необхідністю прогнозування та моделювання процесів, які відбуваються у трубопроводних системах під час виникнення позаштатних ситуацій (аварійний сценарій подій).

Дослідженням динаміки подібних систем займались:

Феодос'єв В.И., Бондарь Н.Г., Бабаков И.М., Светлицький В.А., Кубенко В.Д., Ковальчук П.С., Подчасов М.П., Гуляєв В.І., Paidoussis M.P., Nikolic' M. та інші. На механіко-математичному факультеті Київського національного університету ім. Т.Г. Шевченка тематикою динаміки трубопроводів займаються професори Горошко О.О. та Лимарченко О. С.

Об'єктом дослідження даної роботи

є динамічна система, що складається з консольно закріпленого пружного трубопроводу з вільним кінцем та ідеальної рідини, що тече з різними швидкостями руху.



Метою дисертаційної роботи

є дослідження поведінки пружного консольно закріпленого трубопроводу з рідиною що тече в околі втрати стійкості прямолінійної форми трубопроводу, та при швидкостях течії рідини, що перевищують критичні значення.

Предметом дослідження роботи є нелінійні динамічні процеси в системі трубопровід – рідина, які відбуваються в околі втрати стійкості прямолінійної форми рівноваги трубопроводу, та при швидкостях течії рідини, що перевищують критичні значення.

Методи дослідження.

- Методи нелінійної механіки та математичної фізики
- Варіаційне формулювання на основі принципу Гамільтона–Остроградського
- Метод модальної декомпозиції (метод Канторовича)
- Дослідження стійкості системи на основі першого методу Ляпунова
- Методи символьних аналітичних перетворень, числові методи та методи графічної візуалізації даних, реалізовані у пакеті Mathematica 8

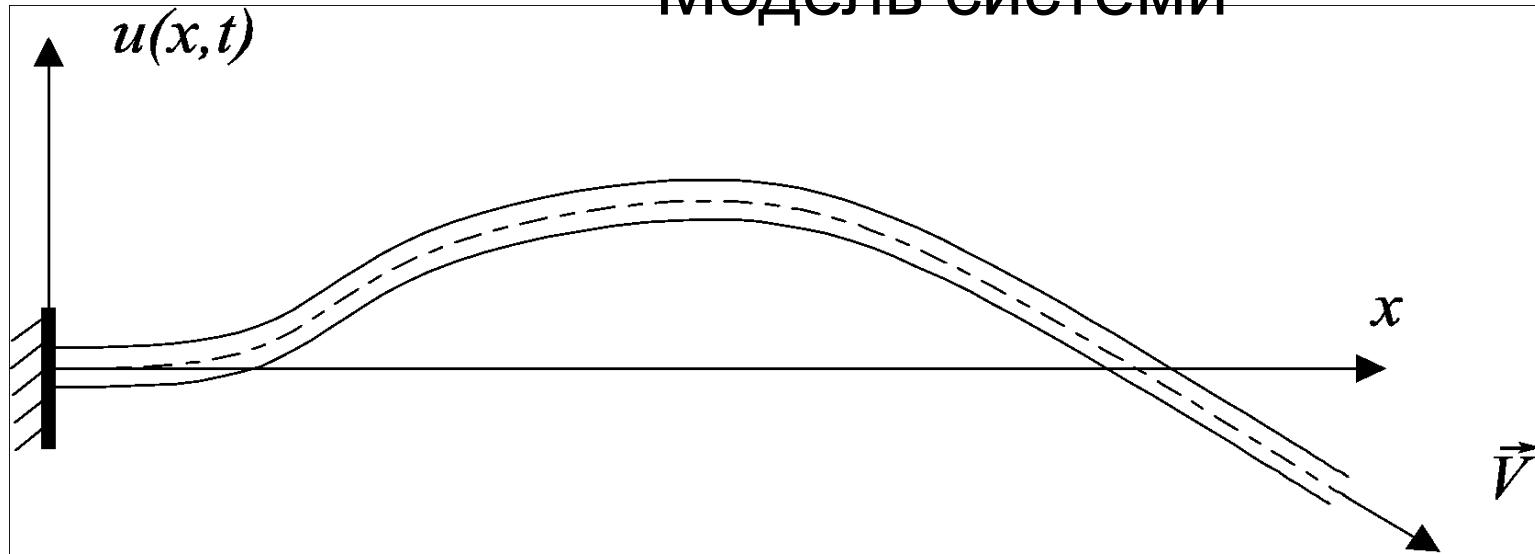
Наукова новизна отриманих результатів полягає у тому, що:

- Засобами символьної математики побудована модель нелінійної динаміки пружного трубопроводу з рідиною, що тече.
- Вперше аналітично досліджена проблема втрати стійкості прямолінійної форми трубопроводу на основі чотирьохмодової моделі динамічної системи.
- Досліджено специфіку прояву сил Коріоліса в докритичному та закритичному діапазонах швидкостей течії рідини, а також визначені стани динамічної рівноваги та досліджено розвиток коливань трубопроводу навколо станів альтернативної рівноваги.
- Здійснено аналітико-чисельну перевірку основних режимів поведінки трубопроводу з рідиною на основі нелінійної динамічної моделі системи.

Достовірність отриманих результатів забезпечується:

- Використанням варіаційних алгоритмів для формулювання і розв'язання задачі
- Використанням засобів символьної математики і адаптивних неявних методів інтегрування з контролем збіжності реалізованих у пакеті Mathematica 8, що дозволило побудувати модель великої розмірності.
- Узгодженням частини результатів аналітичних і числових досліджень з результатами, отриманими іншими авторами.

Модель системи



Трубопровід з рідиною.

$u(x,t)$ – зміщення точок серединної лінії трубопроводу згідно моделі пружної балки;

Система складається з:

- Ідеальної однорідної нестисливої рідини, що тече по трубопроводу з заданою постійною швидкістю V і описується застосуванням Ейлерового підходу;
- Трубопроводу кругового поперечного перетину, який описується моделлю пружної балки, поведінка якої описується застосуванням Лагранжевому підходу.

Складові функції Лагранжа

Кінетична енергія балки має такий вигляд

$$T_B = \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \sqrt{1 + u'^2} dx$$

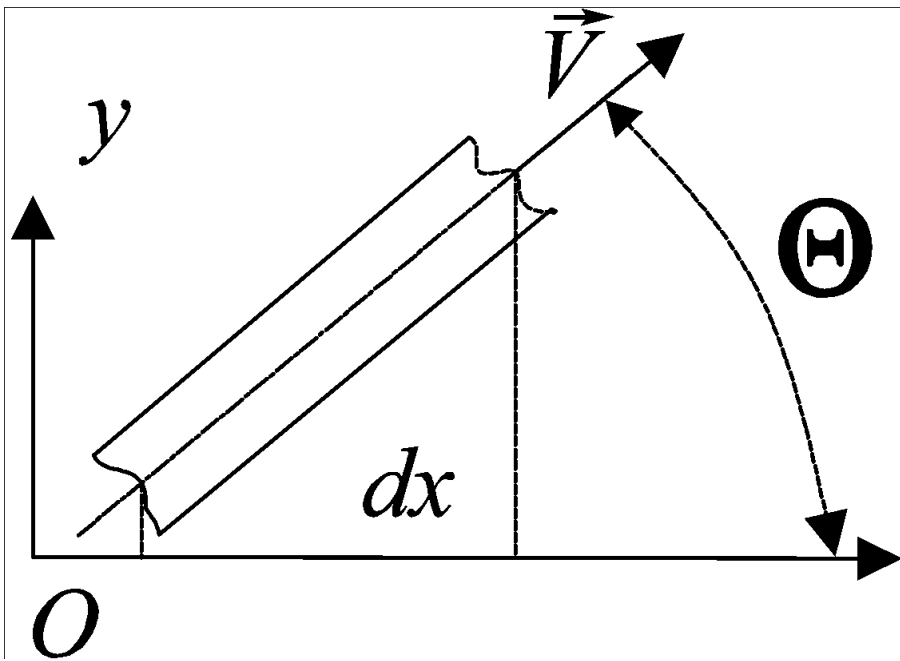
Потенціальна енергія згинних деформацій балки

$$P_B = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \sqrt{1 + u'^2} dx$$

Потенціальна енергія, що пов'язана з повздовжнім стисканням матеріалу трубопроводу буде

$$\Pi_{CT} = \frac{1}{8} EF \int_0^l u'^4 dx$$

Кінематика руху рідини



$$V_x = V \cos \theta \quad V_y = V \sin \theta + \frac{du}{dt}$$

$$\textcircled{H} \quad \text{tg } \theta = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sin \theta = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + u'^2}}; \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}}.$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} V_x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$X \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{V \frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + u'^2}}$$

$$v^2 = \left(V \sin \theta + \frac{du}{dt} \right)^2 + (V \cos \theta)^2 = V^2 \sin^2 \theta + 2V \frac{du}{dt} \sin \theta + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + V^2 \cos^2 \theta =$$

$$= \left[V^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] + 2V \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2}} \frac{du}{dt}$$

Кінетична енергія рідини

$$T_{ж} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left\{ \left[V^2 + \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \right] \sqrt{1 + u'^2} + 2V \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} \right\} dx$$

Потенціальна енергія рідини, зумовлена внутрішнім тиском

$$\Pi_{ж} = -\frac{1}{2} P F_2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Функція Лагранжа

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \mu \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{4} EJ \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{8} EF \int_0^l u'^4 dx + \frac{1}{4} \rho V^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \\
 & - \frac{1}{16} \rho V^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \rho \int_0^l \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \\
 & + \rho V \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{du}{dt} dx + \frac{1}{2} PF_2 \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho V^2 \int_0^l dx.
 \end{aligned}$$

Дискретизація функції Лагранжа

Представлення функції переміщення точок трубопроводу $u(x,t)$ у вигляді ряду:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^N A_i(x) c_i(t)$$

$A_i(x)$ - форми коливань труби як балки
 $c_i(t)$ - амплітудні параметри, що залежать від часу.

Для побудови нелінійної дискретної моделі системи треба обчислити такі квадратури від власних форм коливань труби :

$$N_i = \int_0^l A_i^2 dx; \quad \beta_{ij}^1 = \int_0^l A_i' A_j' dx; \quad \beta_{ij}^2 = \int_0^l A_i' A_j'' dx;$$

$$d_{ijkl}^2 = \int_0^l A_i' A_j' A_k' A_l' dx; \quad d_{ijkl}^4 = \int_0^l A_i' A_j' A_k'' A_l'' dx; \quad d_{ijkl}^6 = \int_0^l A_i'' A_j'' A_k' A_l' dx.$$

Функція Лагранжа в амплітудних параметрах

$$\begin{aligned}
 L_1 = & \frac{1}{2} \sum_i \mathfrak{d}_i^2 N_i + \frac{1}{4} \sum_{ijkl} \mathfrak{d}_i \mathfrak{d}_j c_k c_l d_{ijkl}^2 - \frac{1}{2} \frac{EJ}{\rho + \mu} \sum_i c_i^2 \kappa_i^4 N_i - \\
 & - \frac{1}{4} \frac{EJ}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^6 - \frac{1}{8} \frac{EF}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 - \\
 & - \frac{13}{16} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ijkl} c_i c_j c_k c_l d_{ijkl}^4 + \frac{7}{4} \frac{\rho V^2}{\rho + \mu} \sum_{ij} c_i c_j \beta_{ij}^2 + \frac{2\rho V}{\rho + \mu} \sum_{ij} \mathfrak{d}_i c_j \beta_{ij}^1 - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{PF_2}{\rho + \mu} \sum_{ij} c_i c_j \beta_{ij}^2
 \end{aligned}$$

Рівняння руху системи

$$\begin{aligned}
 \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \\
 & -\frac{PF_2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{2\rho V^{\frac{1}{2}}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2N_r} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k d_{jkir}^2 - \\
 & - \sum_{ijk} \ddot{c}_i \ddot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\
 & - \frac{EF}{2(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkr}^4
 \end{aligned}$$

Зведення системи диференціальних рівнянь до форми, розрішеної відносно старшої похідної, придатної для чисельного розв'язку

Замість $\ddot{\alpha}_i$ в правій частині рівнянь руху

скористаємось **лінійним наближенням**:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_p = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_p^4 c_p + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 + \\ & + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i \dot{c}_i (\beta_{pi}^1 - \beta_{ip}^1) - \frac{PF_2}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \\ & - \frac{2\rho V \ddot{\alpha}}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \end{aligned}$$

Лінійне наближення обираємо з міркувань збереження членів до 3-го порядку малості

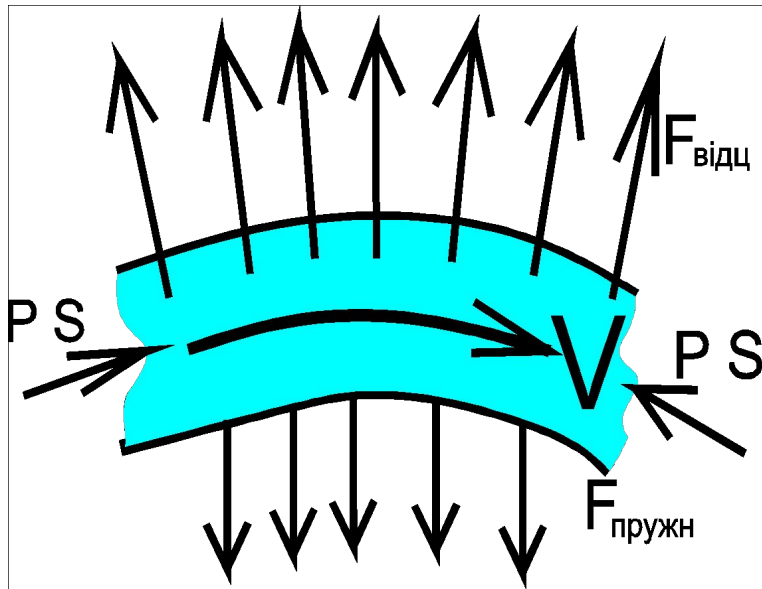
Система звичайних диференціальних рівнянь у формі, розрішеній відносно старшої похідної

$$\begin{aligned}
 \ddot{c}_r = & -\frac{EJ}{\rho + \mu} \kappa_r^4 c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \\
 & + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i \ddot{c}_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) - \frac{PF_2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \\
 & - \frac{2\rho V^{\frac{1}{2}}}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \\
 & - \sum_{ijk} \ddot{c}_i \ddot{c}_j c_k \frac{1}{N_r} \left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right) - \frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \\
 & - \frac{EF}{2(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 - \frac{1}{2N_r} \sum_{pjk} c_j c_k \left(-\frac{EJ}{(\rho + \mu)} \kappa_p^4 c_p + \right. \\
 & + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i \ddot{c}_i (\beta_{pi}^1 - \beta_{ip}^1) - \\
 & \left. - \frac{PF_2}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 - \frac{2\rho V^{\frac{1}{2}}}{(\rho + \mu) N_p} \sum_i c_i \beta_{ip}^2 \right)
 \end{aligned}$$

Поняття про критичну швидкість по першій власній формі коливань

Задача визначення критичної швидкості в одномодовій моделі трубопроводу була описана В.І. Феодос'євим.

Критерієм досягнення критичної швидкості вважається виродження в нуль частоти першої власної форми коливань, яке відбувається за рахунок зрівноваження відцентрових сил в рідині з пружними силами в трубопроводі.



Частота першої власної форми коливань

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\rho + \mu} \left(EJk^2 - 3\frac{1}{2}\rho V^2 - PF \right)$$

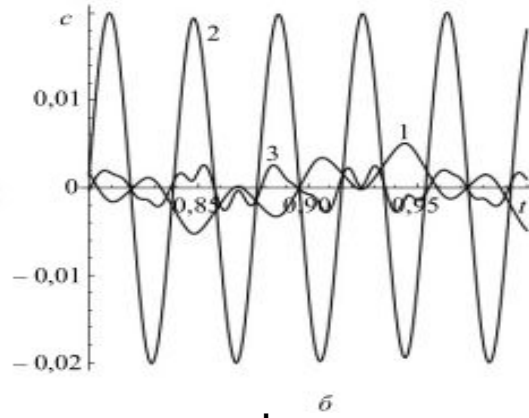
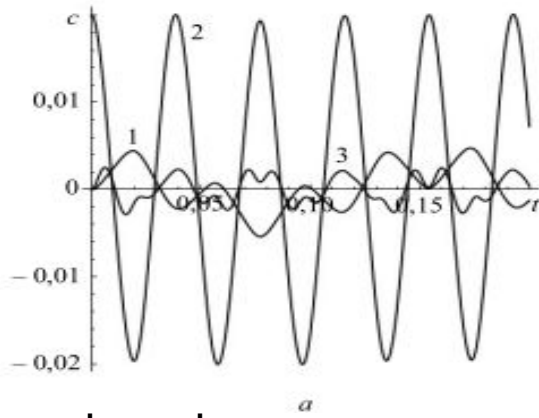
Критична швидкість по першій формі коливань

$$V_{kp}^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{7\rho} \left(\frac{EJN_1\chi_1^4}{\beta_{11}^2} + PF \right)}$$

Зрівноваження відцентрових сил в рідині та пружних сил в трубопроводі

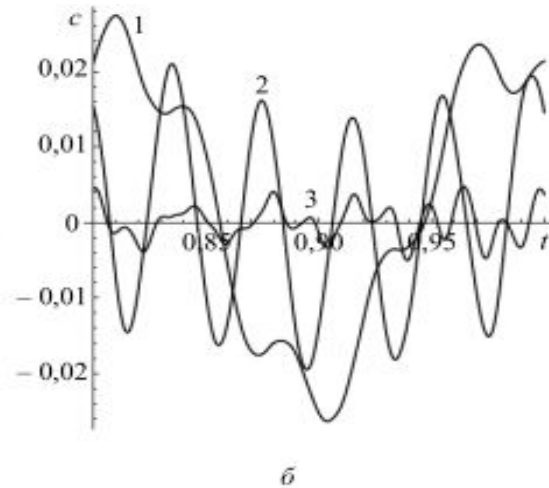
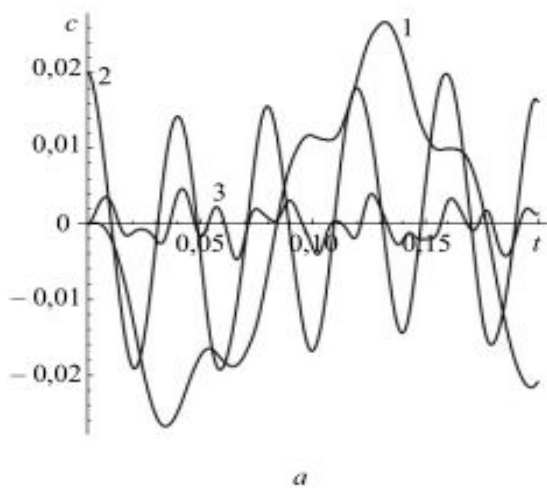
Чисельне моделювання

Тестові приклади для перевірки працездатності побудованої розрахункової моделі



$$V = 0$$

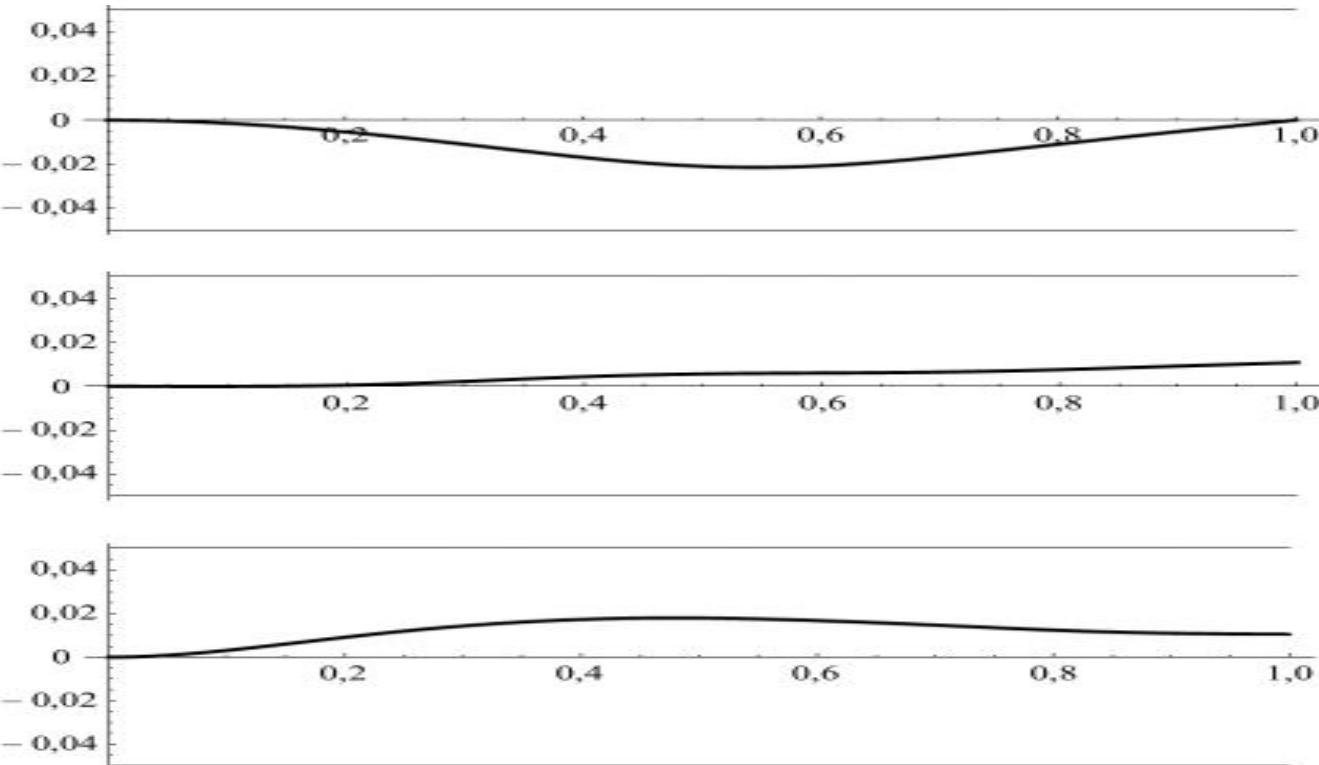
Амплітудні параметри перших трьох форм коливань на різних проміжках часу за умови відсутності течії рідини



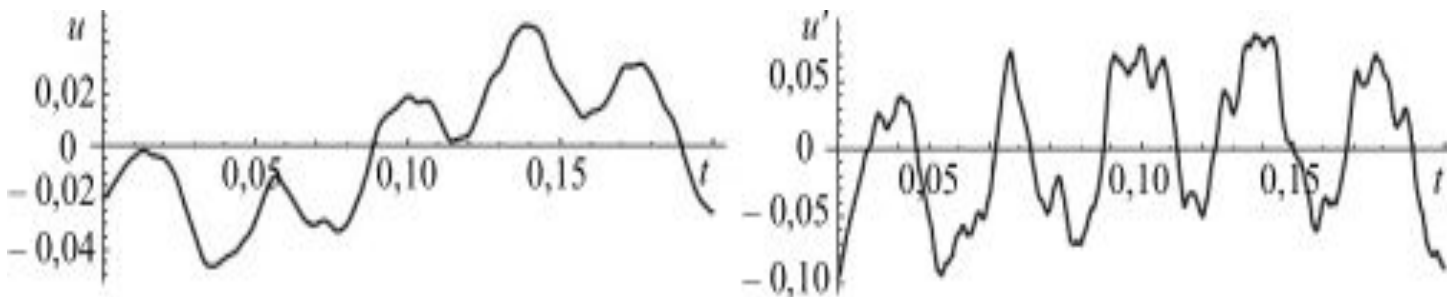
$$V = 0.6V_{кр}$$

Амплітудні параметри перших трьох форм коливань на різних проміжках часу швидкість течії рідини $V = 0.6V_{кр}$

Форма та переміщення вільного кінця трубопроводу за часом при швидкості течії рідини $V = 0.6V_{кр}$



Форма, яку приймає трубопровід в моменти часу: $t=0.3$; $t=0.6$; $t=0.9$ с.



Переміщення, та кут повороту вільного кінця трубопроводу за часом

Визначення форми трубопроводу в альтернативному положенні рівноваги

Форма альтернативного положення рівноваги трубопроводу для першої власної форми $u(x) = A_1(x) \cdot C_{equilibrium}(V)$

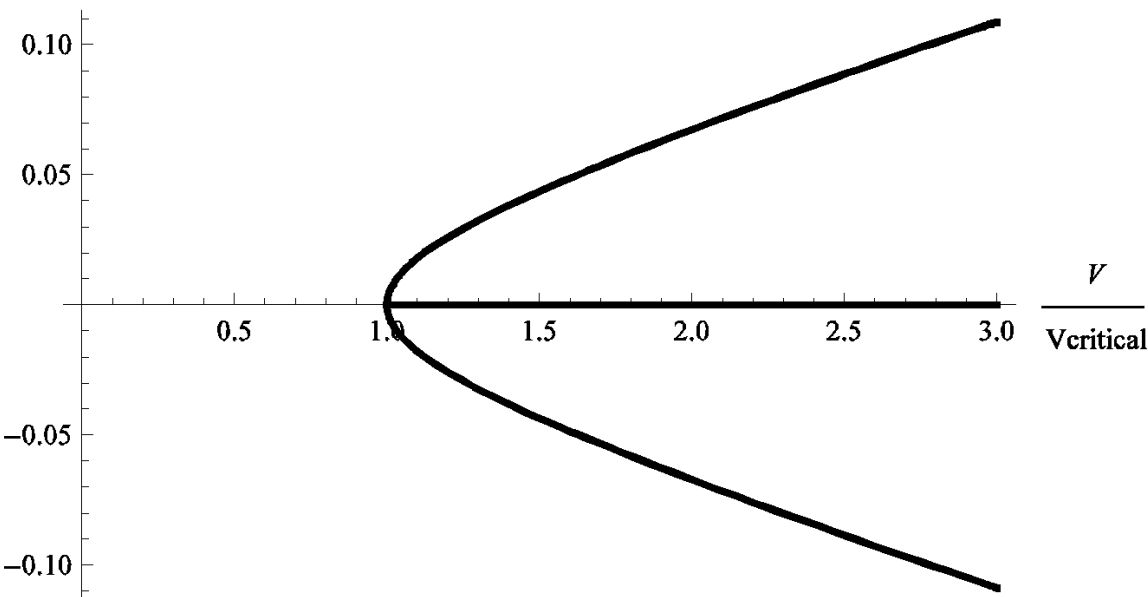
де $A_1(x) = U(k_1 \cdot x) - \frac{S(k_1 \cdot l)}{T(k_1 \cdot l)} \cdot V(k_1 \cdot x)$ Перша власна форма трубопроводу як пружної балки

$C_{equilibrium}(V)$ Амплітудний коефіцієнт який залежить від швидкості течії рідини

Альтернативна рівновага виникає коли $c_1''(t) \equiv 0$

$$c_1(t) \cdot \left(-\frac{7\rho V^2}{2} \cdot \beta_{1,1}^2 + EJ \cdot \beta_{1,1}^3 + PF \cdot \beta_{1,1}^2 \right) + c_1(t)^3 \cdot \left(EJ \cdot d_{1,1,1,1}^6 + \frac{1}{2} \cdot EF \cdot d_{1,1,1,1}^4 + \frac{13}{4} \cdot \rho V^2 \cdot d_{1,1,1,1}^4 \right) = 0$$

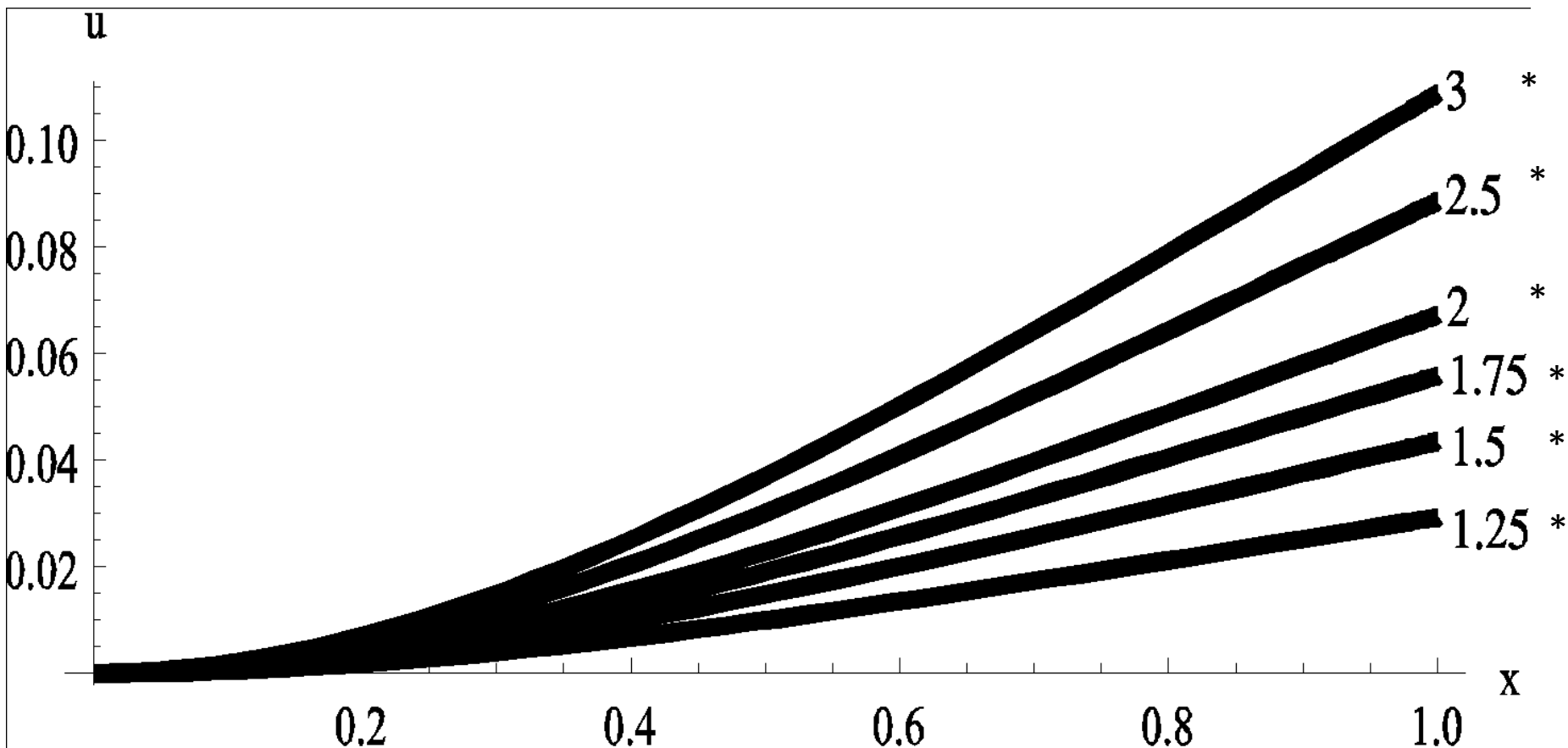
$C_{equilibrium}$



Корені c_1

в залежності від значення швидкості течії рідини визначають амплітудні коефіцієнти для альтернативного положення рівноваги трубопроводу

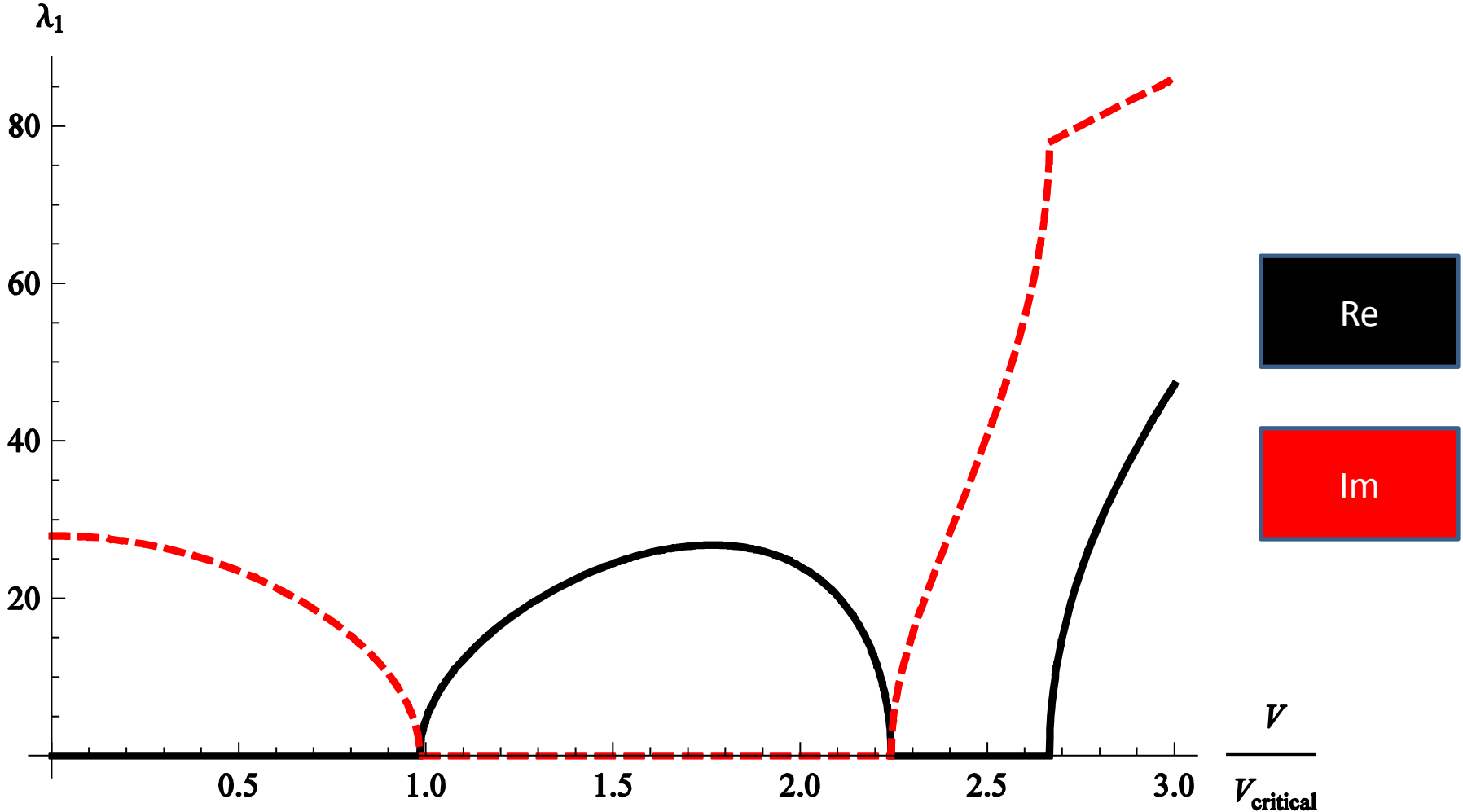
Форми трубопроводу в альтернативному положенні рівноваги для різних значень швидкості течії рідини



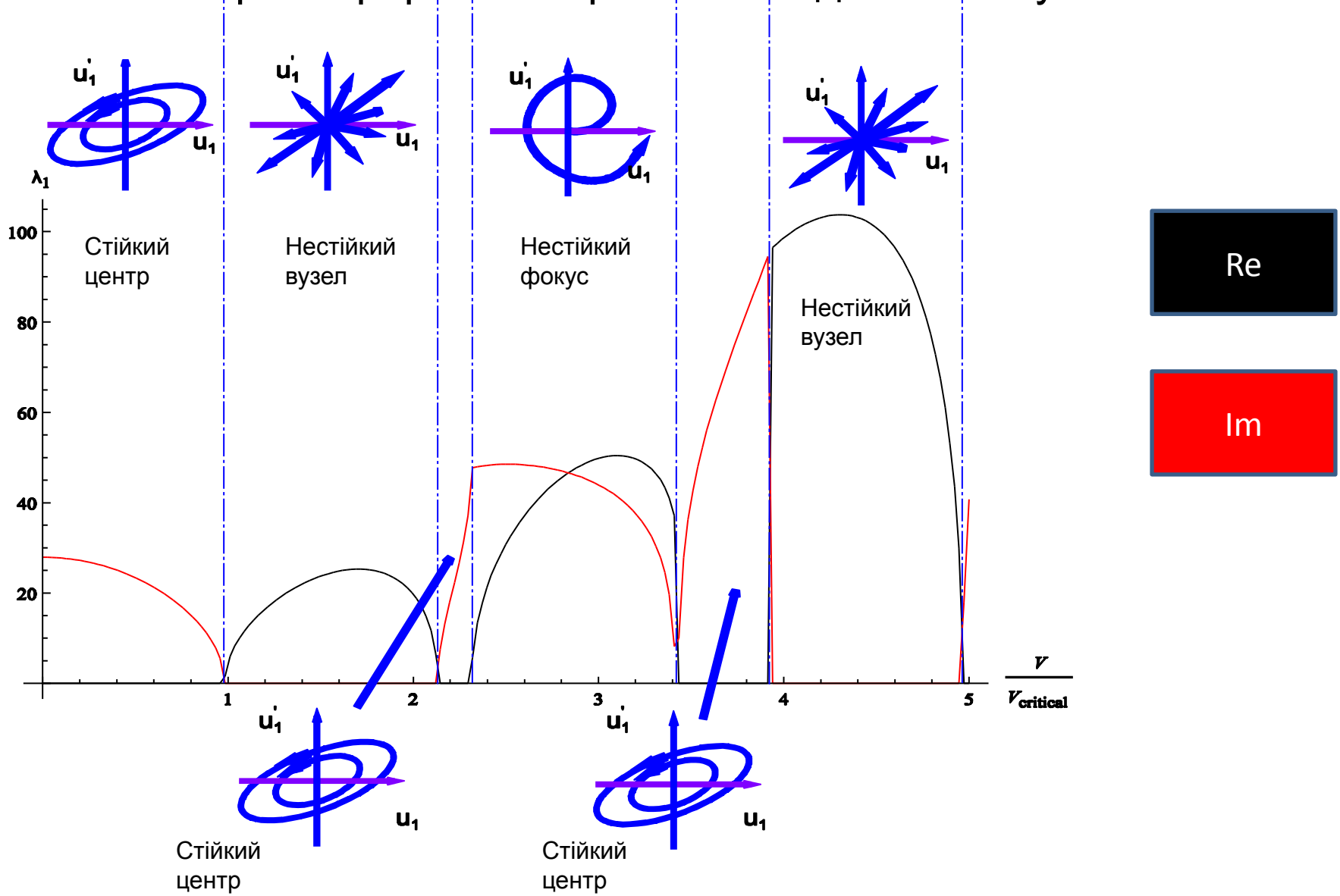
* - значення безрозмірної швидкості течії рідини

$$\tilde{V} = \frac{V}{V_{critical}}$$

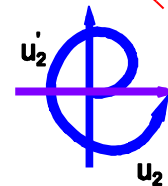
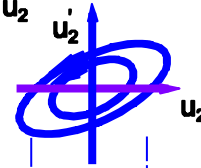
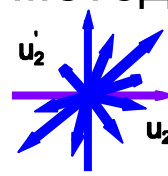
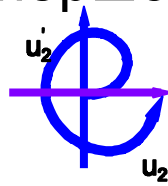
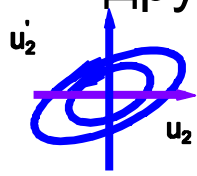
Залежність першого власного значення від швидкості течії рідини, отримана із розгляду 2модової системи



Залежність першого власного значення системи трубопровід-рідина від швидкості течії рідини, та класифікація режимів коливань по першій формі за першою методикою Ляпунова

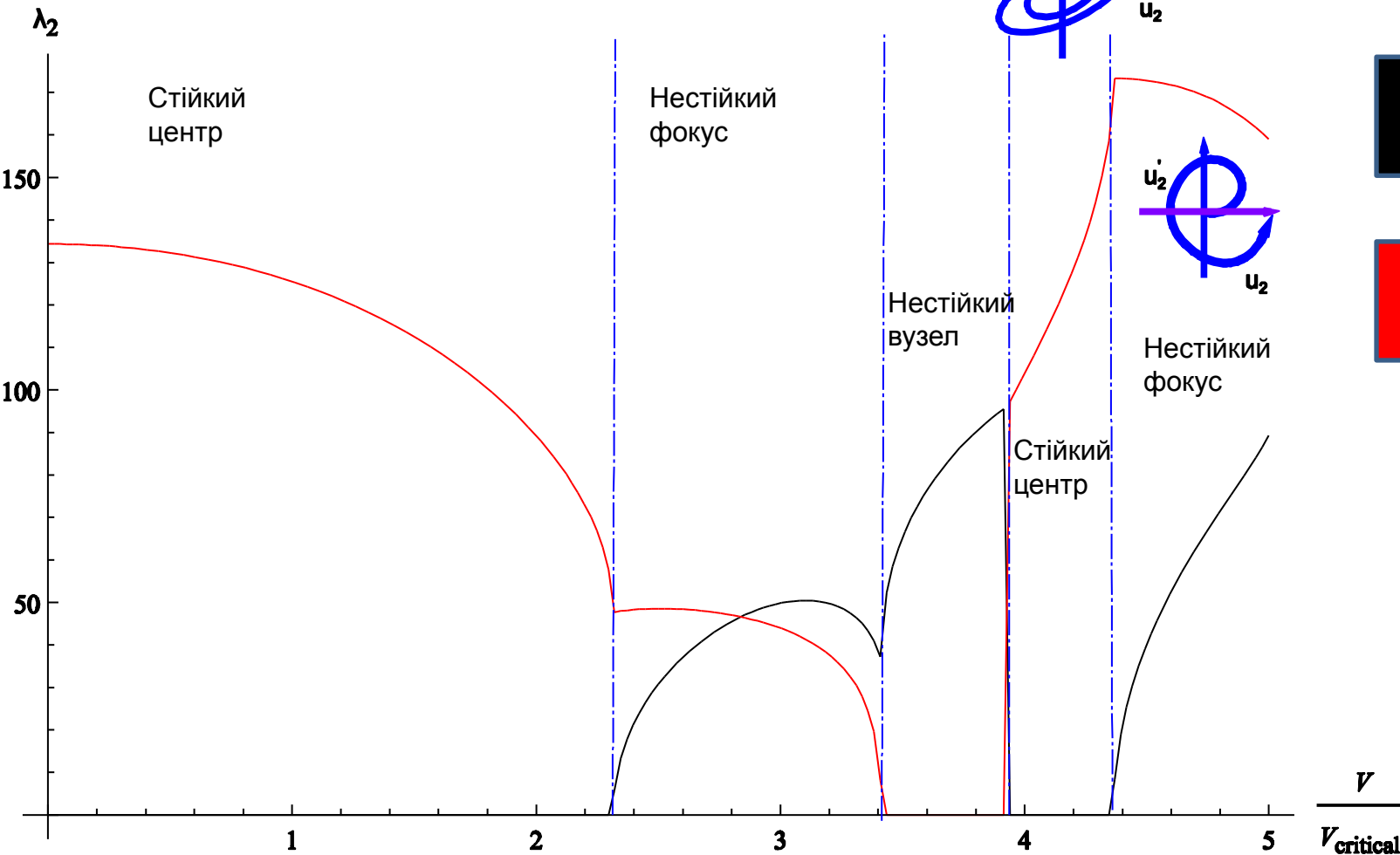


Залежність другого власного значення системи трубопровід-рідина від швидкості течії рідини, та класифікація режимів коливань по другій формі за першою методикою Ляпунова



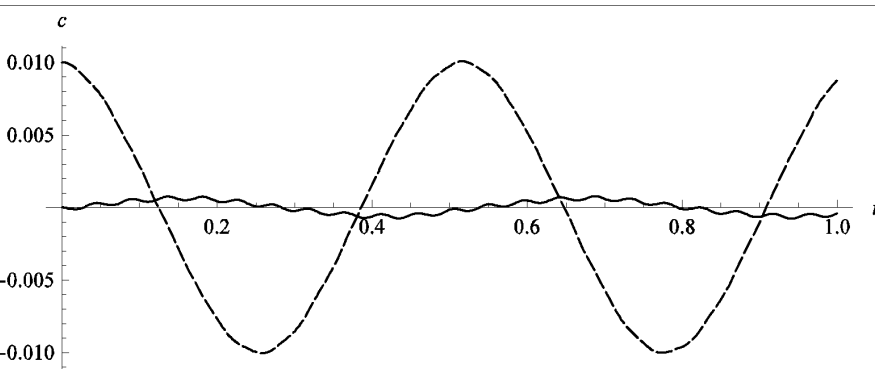
Re

Im

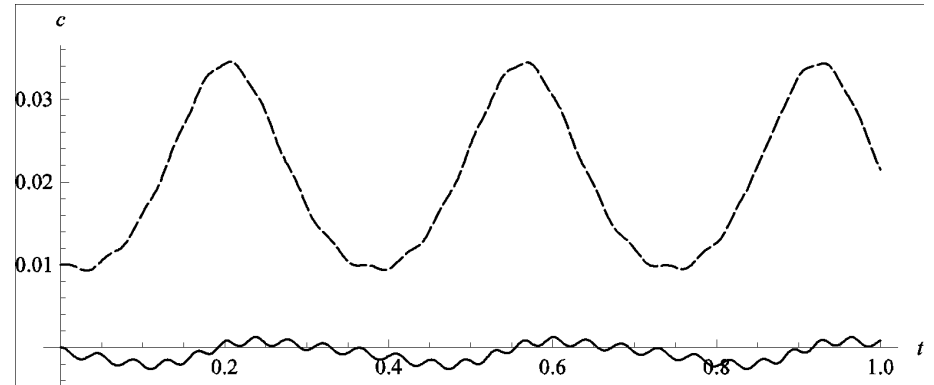


Аналіз достовірності прогнозів поведінки трубопроводу на базі лінійної чотиримодової моделі за рахунок обчислень, виконаних на двонадцятимодовій нелінійній моделі

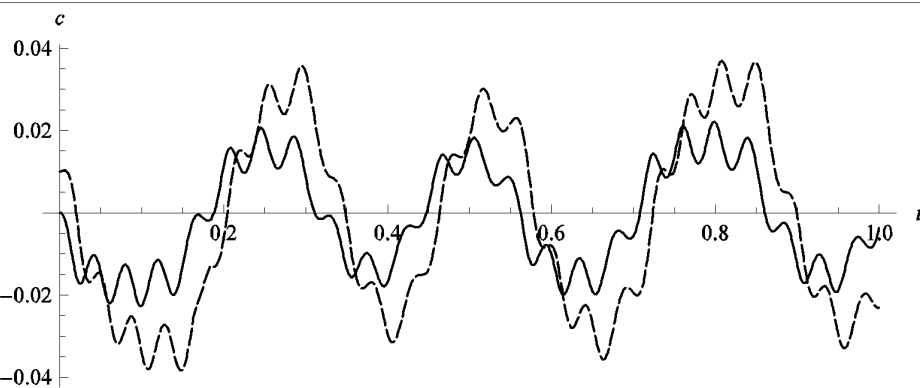
Амплітудні параметри перших двох власних форм коливань при різних значеннях швидкості течії рідини



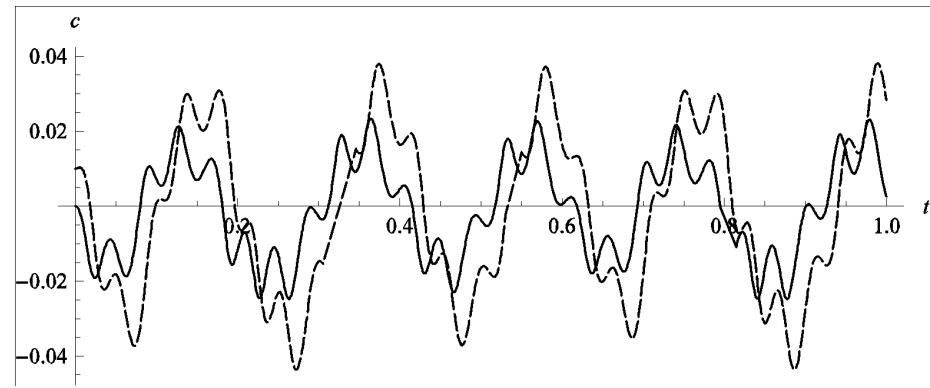
$$V = 0.9 \cdot V_{kp}^1$$



$$V = 1.5 \cdot V_{kp}^1$$

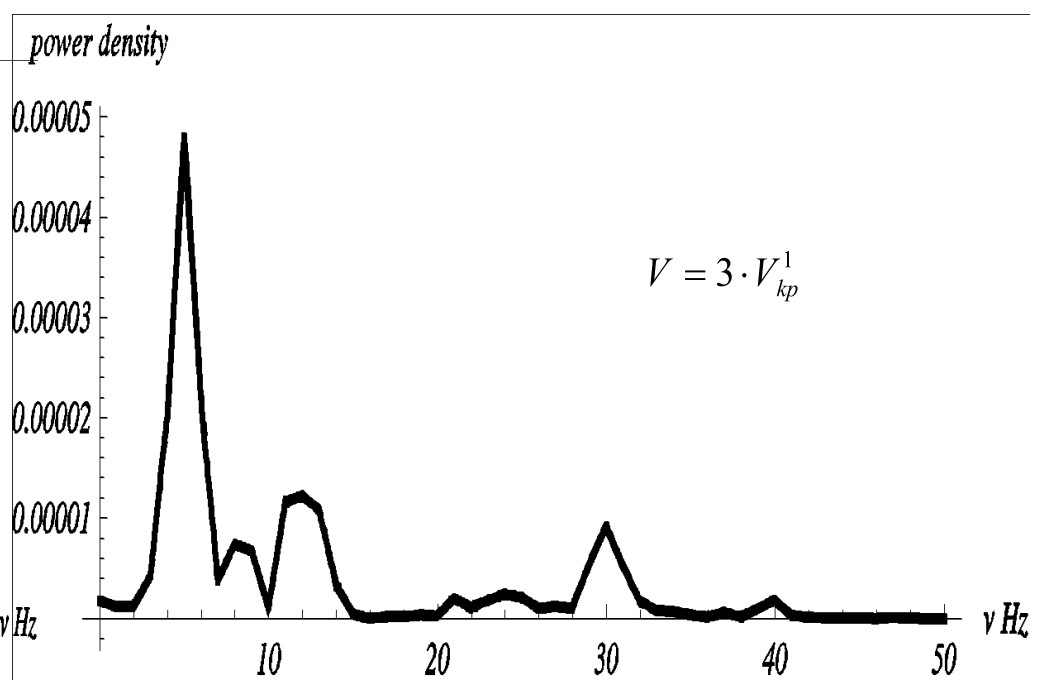
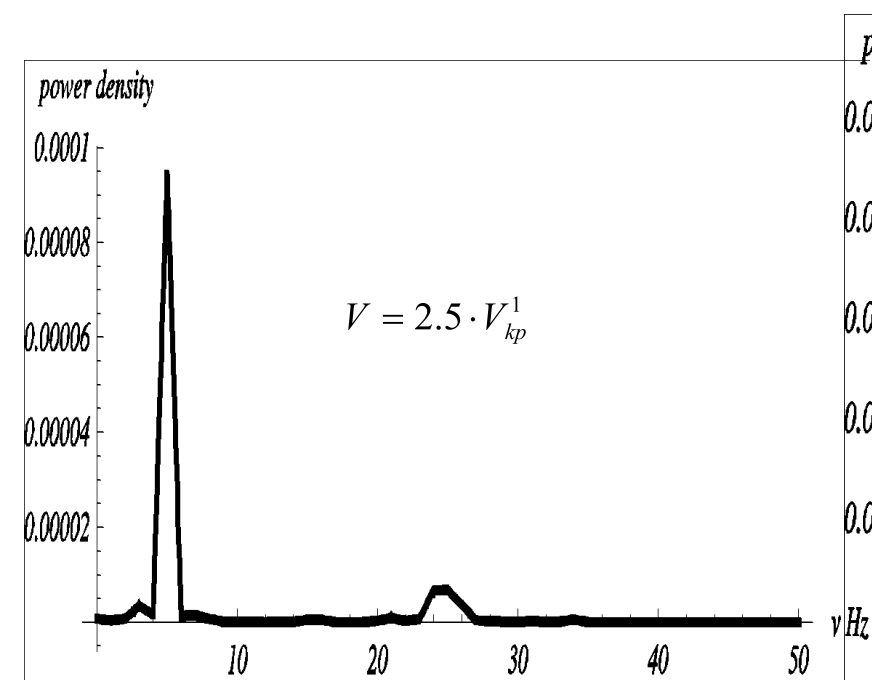
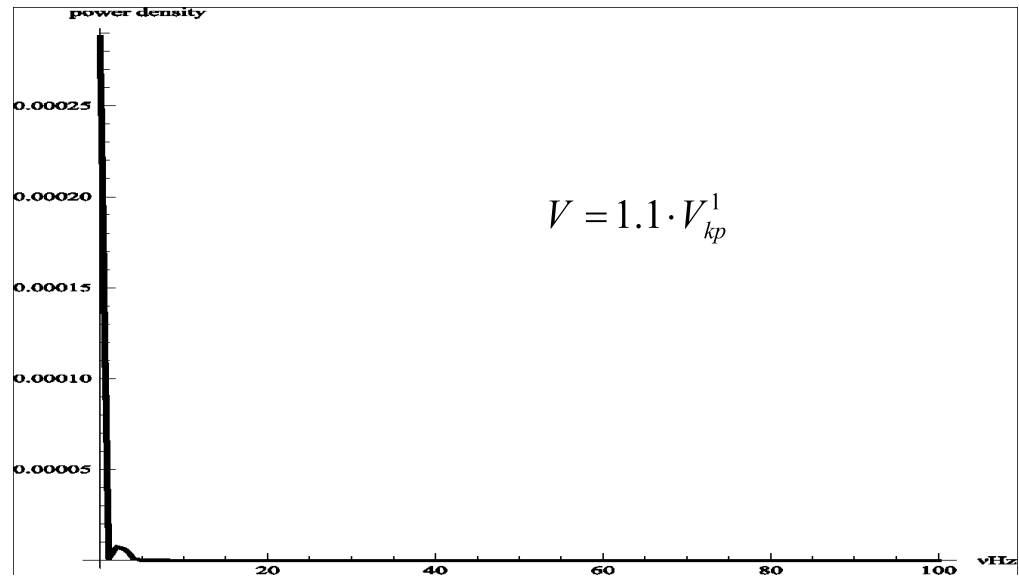
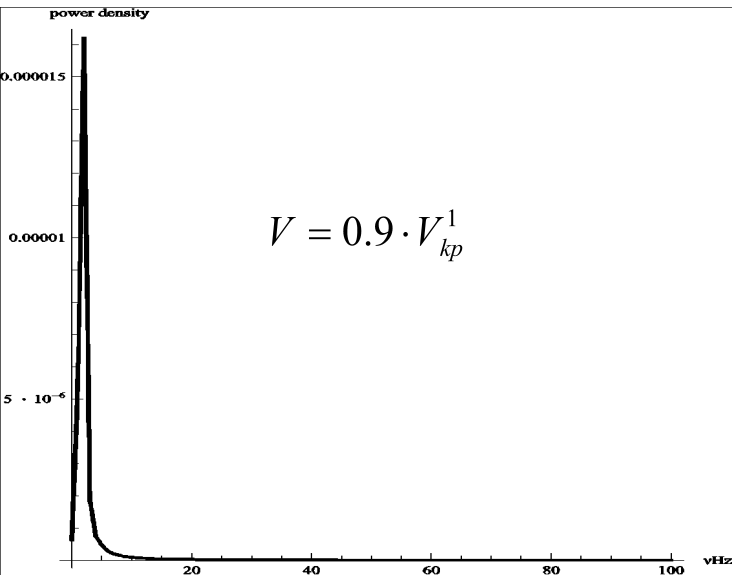


$$V = 2.56 \cdot V_{kp}^1$$

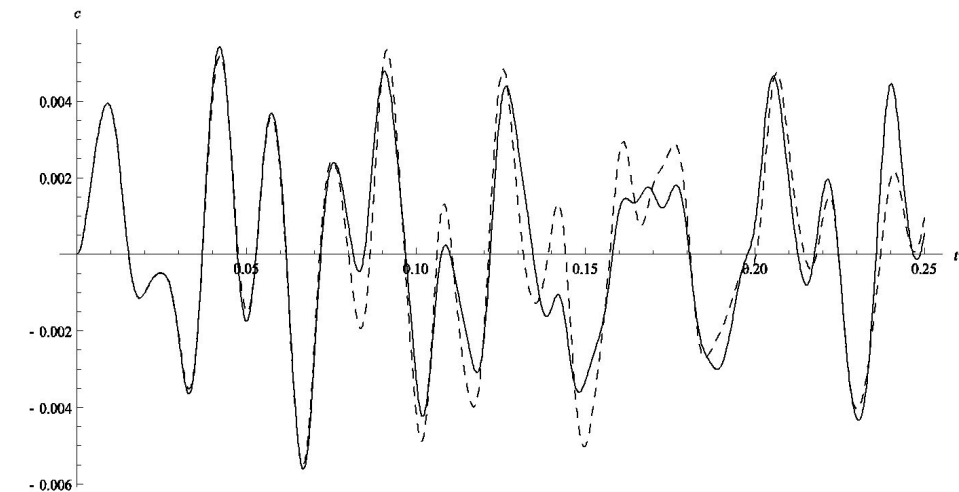
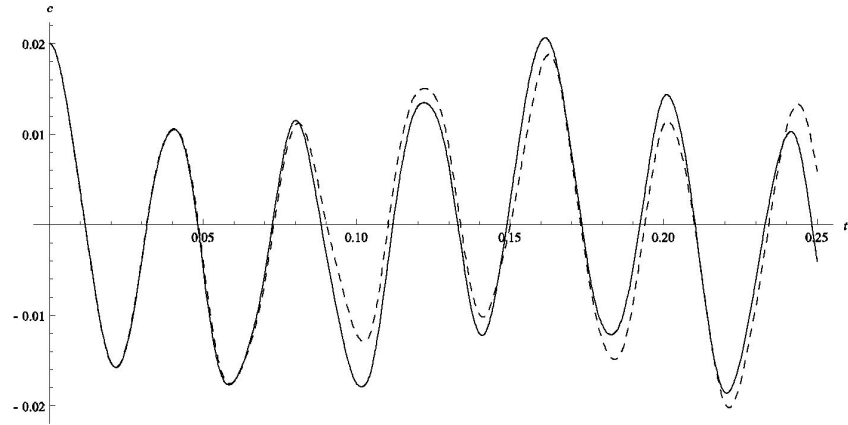
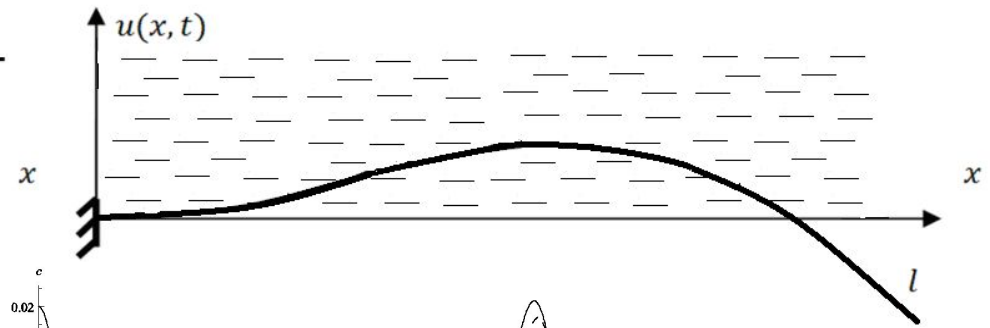
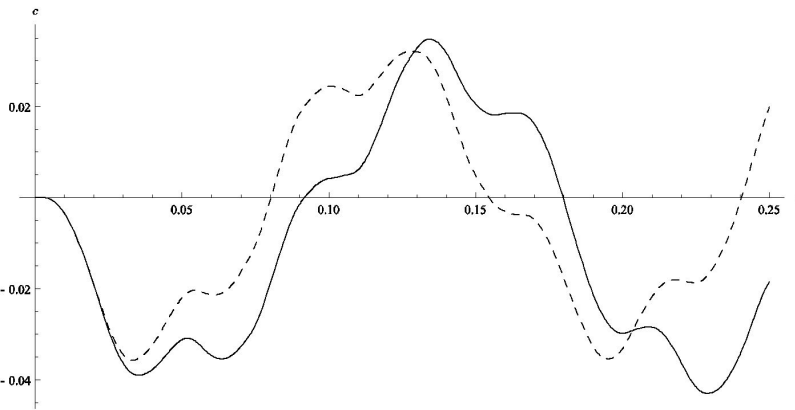
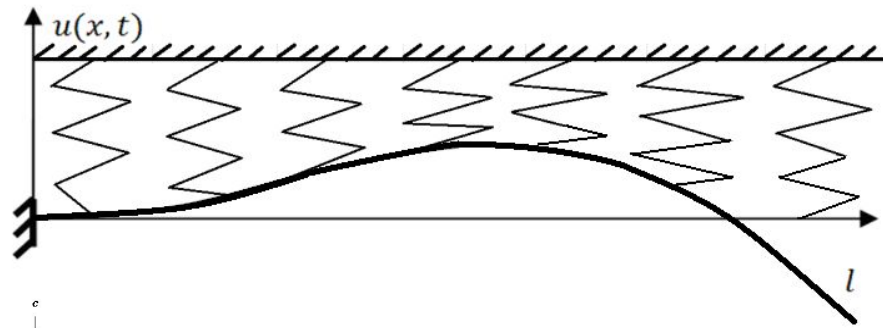


$$V = 2.7 \cdot V_{kp}^1$$

Спектри коливань вільного кінця трубопроводу, отримані методом експрес перетворення Фур'є при швидкостях течії рідини:

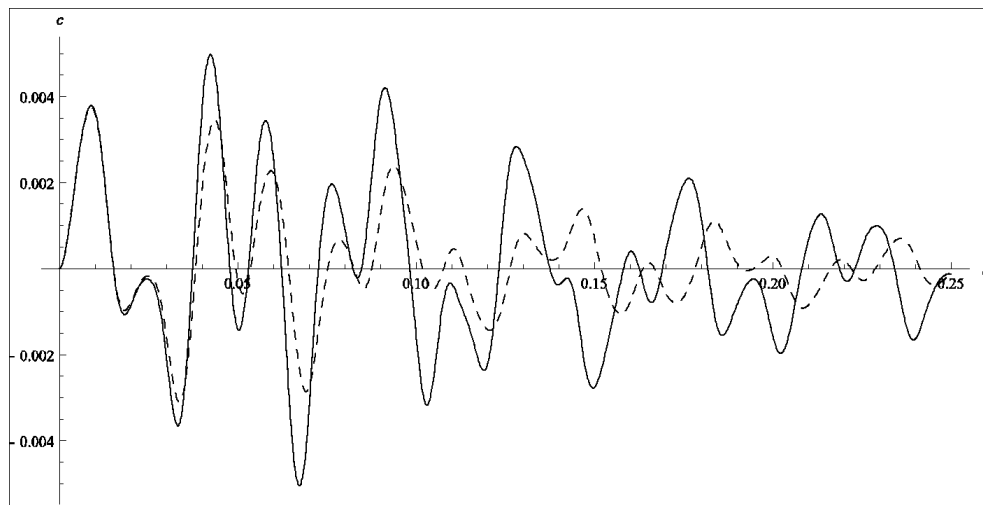
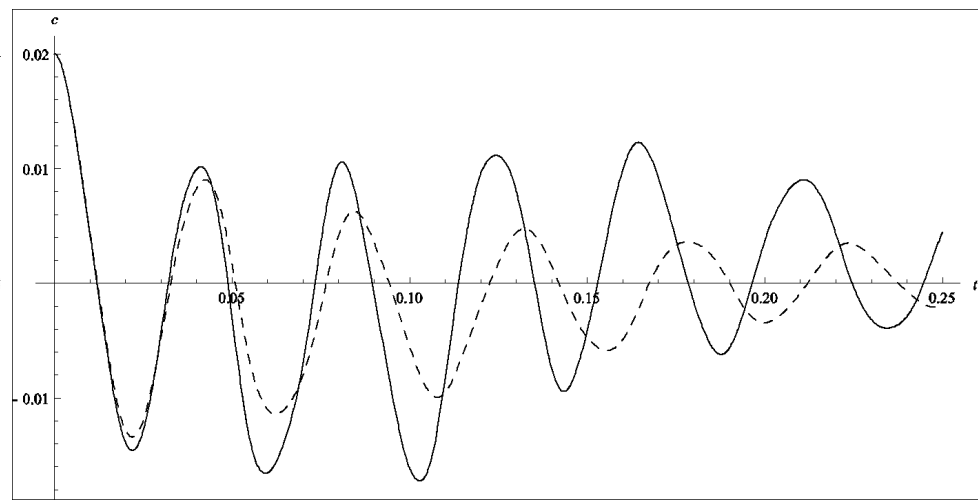
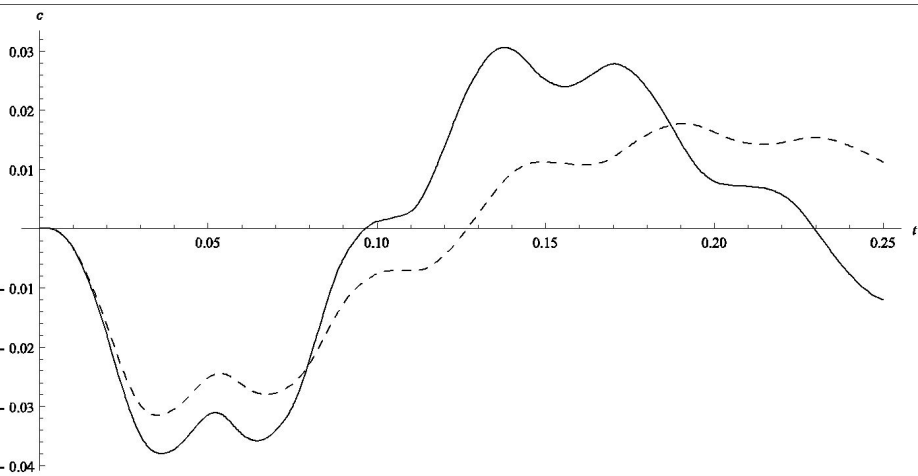


Аналіз ефективності використання нелінійного демпфера у вигляді однобічної пружності, або однобічної в'язкості



Амплітудні параметри перших трьох
форм коливань. Суцільна лінія -
однобічна додаткова пружність,
штрих-пунктир – звичайна система

$$V = 0.9 \cdot V_{critical},$$

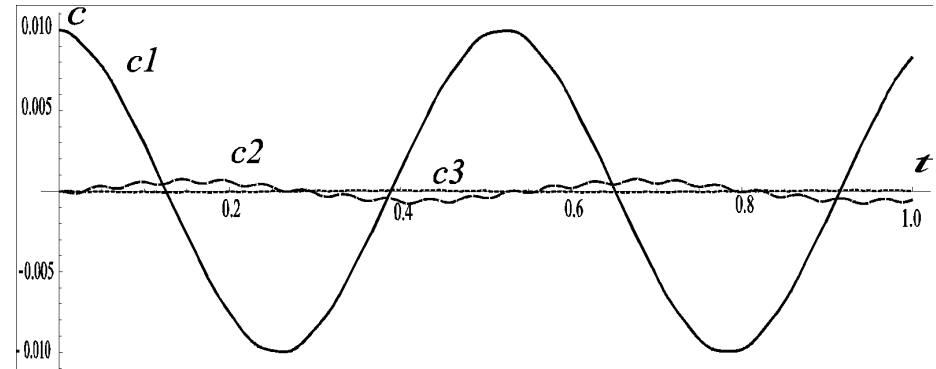
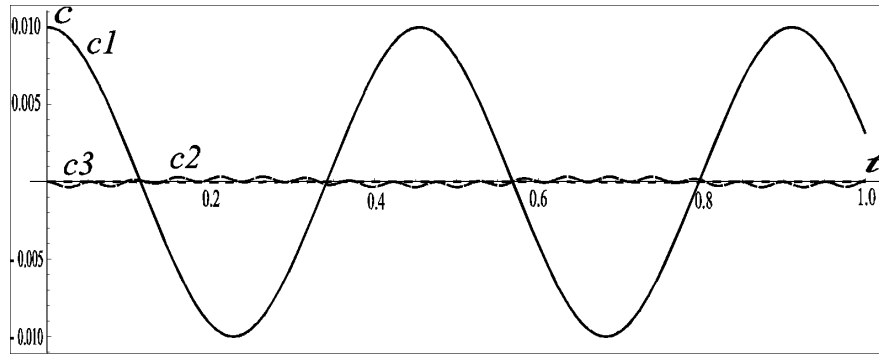


Амплітудні параметри перших трьох форм коливань. Суцільна лінія - однобічна додаткова в'язкість, штрих-пунктир – двобічна додаткова в'язкість.

$$V = 0.9 \cdot V_{critical},$$

Аналіз впливу сил Коріоліса на поведінку системи трубопровод-
рідина при докритичних та закритичних швидкостях течії рідини.

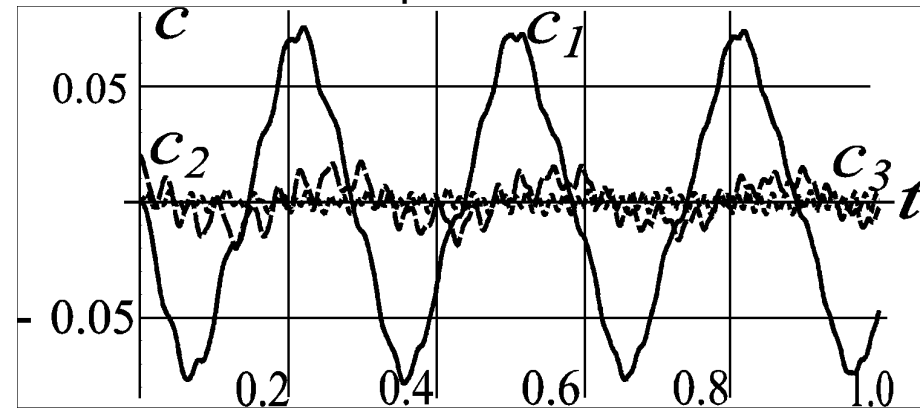
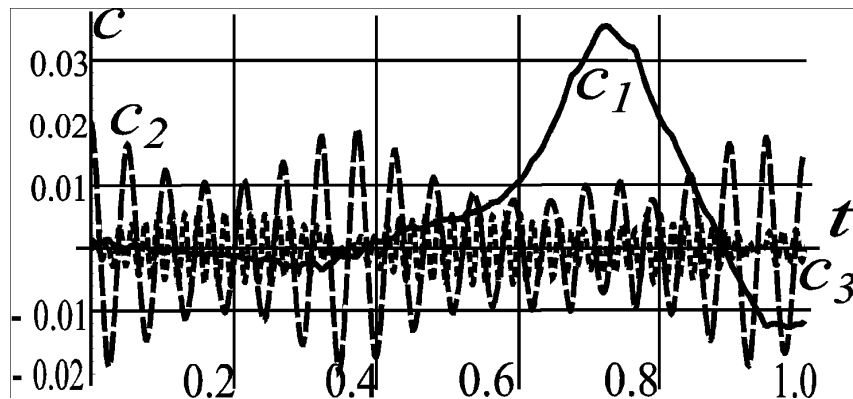
$$V = 0.9 \cdot V_{kp}^1$$



Без урахування
впливу
сил Коріоліса

$$V = 1.5 \cdot V_{kp}^1$$

З урахуванням
впливу
сил Коріоліса



Теоретичні висновки

1. Розроблено нелінійну модель динаміки трубопроводу при швидкісній течії рідини, яка орієнтована на дослідження задач динаміки трубопроводу в околі втрати стійкості прямолінійної форми і здатна надійно видавати результати як для докритичних швидкісних режимів течії рідини, так і для закритичних режимів. Модель враховує більшість відомих нелінійних механізмів і їх взаємний вплив на систему.
2. На основі методу модальної декомпозиції побудовано нелінійну скінченновимірну модель динаміки системи трубопровід–рідина для довільної кількості власних форм коливань (при чисельній реалізації приймалося до уваги дванадцять власних форм коливань), що дало змогу більш детально проаналізувати рух системи в закритичних режимах течії рідини. Засобами символної математики, реалізованими у програмному пакеті Mathematica 8, систему диференціальних рівнянь аналітично було приведено до форми Коші.
3. Для випадку консольно закріпленого трубопроводу з вільним кінцем розроблено і реалізовано модель динамічної системи та програмний пакет засобами програмного середовища Mathematica 8 із застосуванням найбільш передових інструментів адаптивного неявного аналізу диференціальних рівнянь, реалізованих у даному середовищі. Достовірність побудованої моделі підтверджується повною відповідністю результатів для випадку відсутності течії рідини та відповідністю частини результатів дослідженням інших авторів.
4. Визначення існування островців стійкості в закритичній області швидкостей течії рідини. Для підтвердження існування яких було проведено безпосереднє моделювання поведінки системи в визначених областях швидкостей течії рідини, де був отриманий прогноз можливості коливань навколо стійкого прямолінійного положення рівноваги за першою формою.

Практичні результати та висновки

1. Досліджено специфіку прояву сил Коріоліса в докритичному та закритичному діапазонах швидкостей течії рідини, а також визначені стани динамічної рівноваги та досліджено розвиток коливань трубопроводу навколо станів альтернативної рівноваги. Також на основі аналізу 4-ох модової лінійної системи, виконана класифікація основних режимів коливань трубопроводу з точки зору теорії стійкості, а саме за першим методом Ляпунова.
2. Було проведено дослідження впливу на систему трубопровід-рідина присутності нелінійного демпферу у вигляді однобічної додаткової пружності, або однобічної в'язкості. Ідея такого демпферу полягала у тому, що за рахунок нелінійності буде відбуватися інтенсивний перерозподіл енергії коливань між власними формами, тобто буде відбуватися відкачка енергії із нижчих форм, коливання яких мають найбільшу амплітуду і представляють найбільшу небезпеку, до вищих форм де можуть бути швидко задемпфовані. Але в процесі аналізу таких демпферів було виявлено їх низьку ефективність у порівнянні із впливом сил Коріоліса.