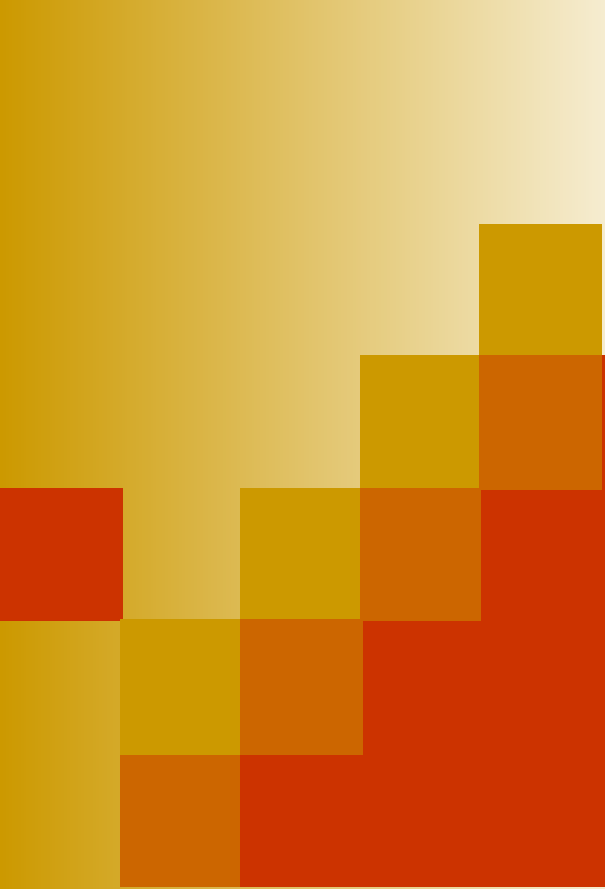




Исследование функций и построение графиков

Дифференциальное
исчисление. Приложение
производной.



Схема полного исследования

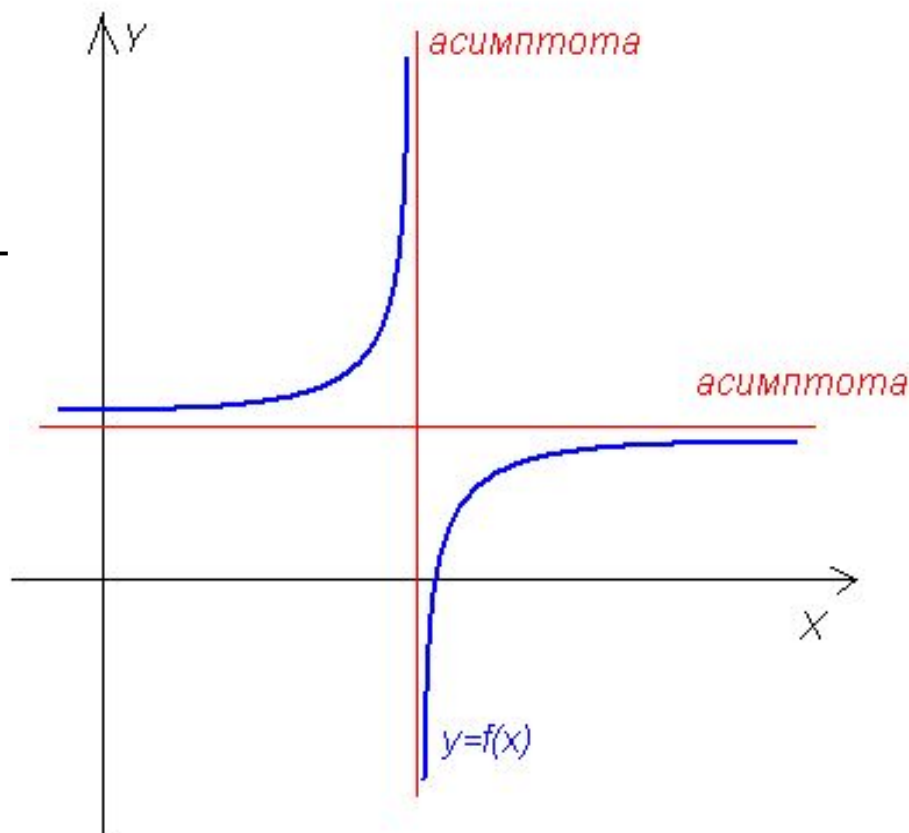
1. Нахождение области определения функции.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение точек экстремума и интервалов монотонности.
4. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости.
5. Анализ свойств функции: четность, периодичность.
6. Нахождение точек пересечения с осями координат.

Область определения функции

- О.О.Ф. – совокупность значений аргумента, при которых функциональное выражение имеет смысл.
- О.З.Ф. – совокупность значений функции $y(x)$

Асимптоты функции

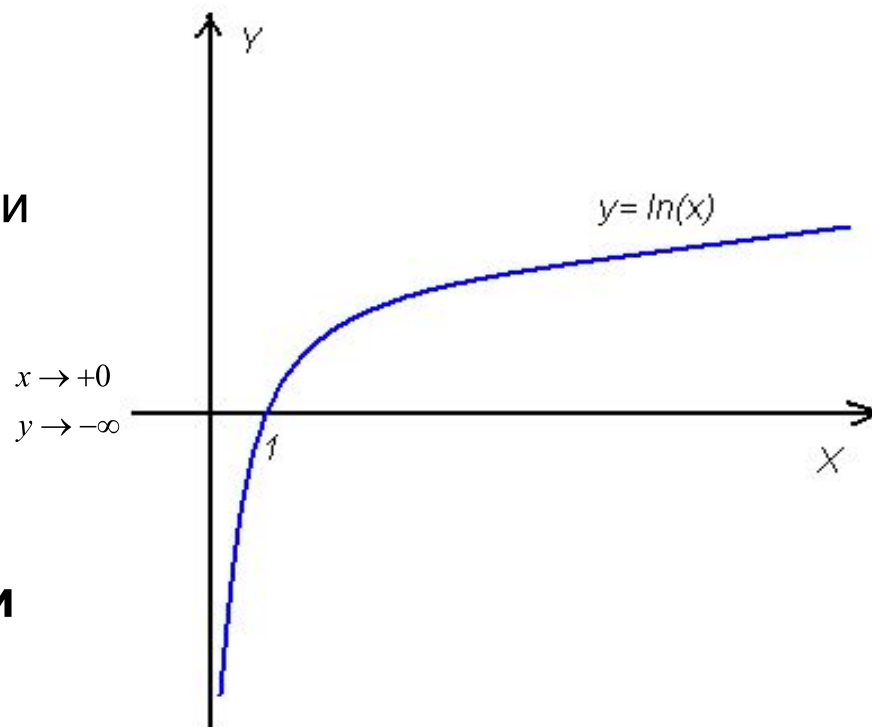
- Прямая называется **асимптотой** графика функции, если расстояние от текущей точки графика кривой до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность



Нахождение вертикальной асимптоты

- Вертикальная прямая $X=X_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности, т.е.

X_0 – точка разрыва функции



$$\begin{aligned}x &\rightarrow +0 \\ y &\rightarrow -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} y(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} y(x) = \pm\infty$$

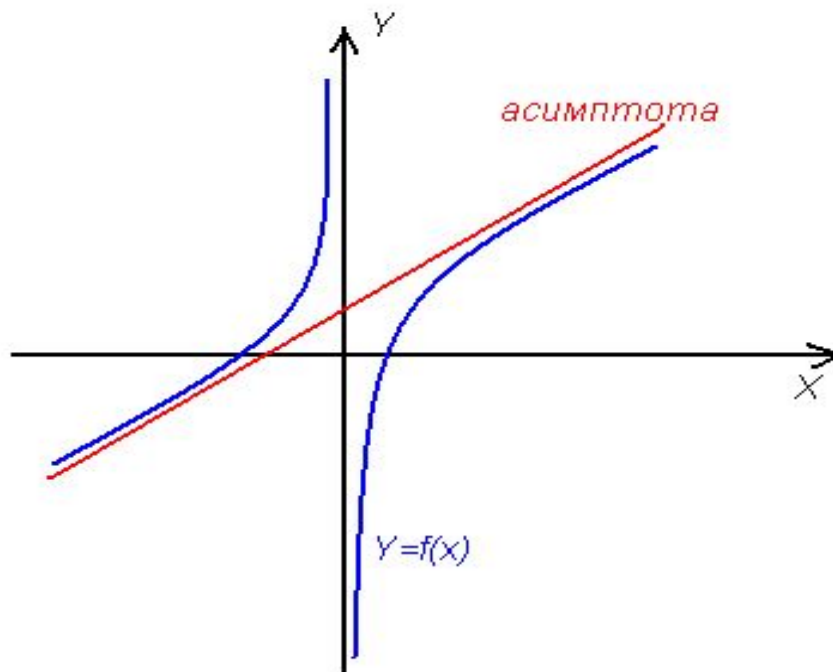
Нахождение наклонной асимптоты

$y=kx+b$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

- Если $k = 0$, то $y = b$ уравнение горизонтальной асимптоты графика функции.



$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

Экстремумы функции и монотонность

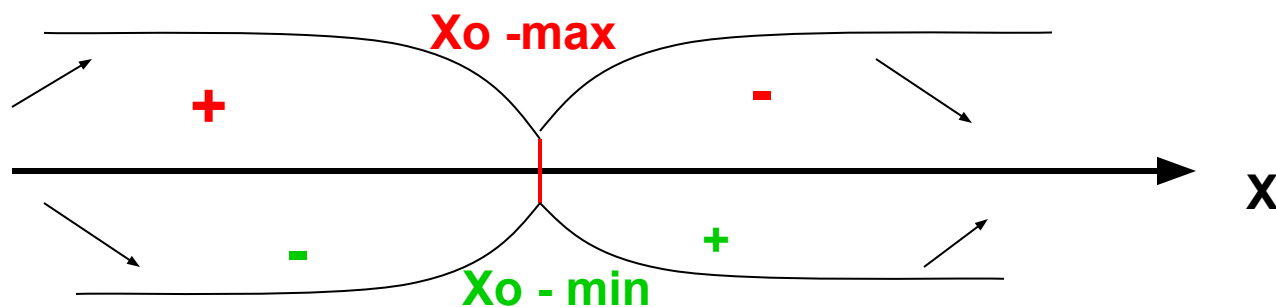
- **Монотонность** – характеристика поведения функции, т.е. её возрастание или убывание на определенных интервалах.
- **Монотонность** функции определяется знаком первой производной.
- Функция называется **возрастающей** на $[a; b]$, если **большему** значению аргумента **соответствует большее** значение функции.
Если $y'(x) > 0$, то $y(x)$ **возрастает**.
- Функция называется **убывающей** на $[a; b]$, если **большему** значению аргумента **соответствует меньшее** значение функции.
Если $y'(x) < 0$, то $y(x)$ **убывает**.



Необходимое и достаточное условия существования экстремума

Для того, чтобы непрерывная в точке x_0 функция $y=f(x)$ имела в точке x_0 экстремум

- необходимо: $y'(x_0)=0$
 $y'(x_0)=\infty$ или не существовала
- достаточно: производная $y'(x_0)$ меняла знак при переходе через x_0

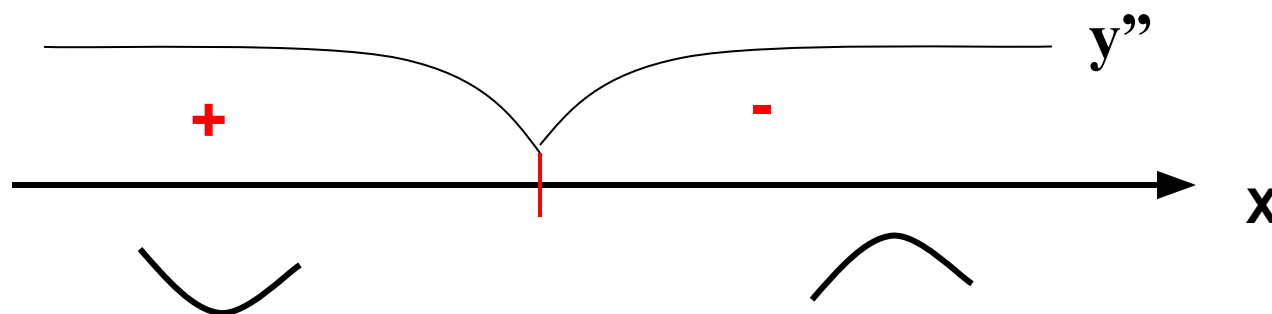


Точки перегиба. Интервалы выпуклости и вогнутости.

Если $y''(x_0)=0$, то x_0 является точкой перегиба графика функции $y=f(x)$

Если $y''(x_0)<0$, то график функции имеет выпуклость вверх.

Если $y''(x_0)>0$, то график функции имеет выпуклость вниз.



Анализ свойств функции

- Четность – нечетность.
 - График четной функции симметричен относительно оси **OY** .
 - График нечетной функции симметричен относительно начала координат.
- Периодичность.

Точки пересечения с осями координат

- $x=0$ $y=0$
- Значение функции в точках экстремума.
- Значение функции в точках перегиба.