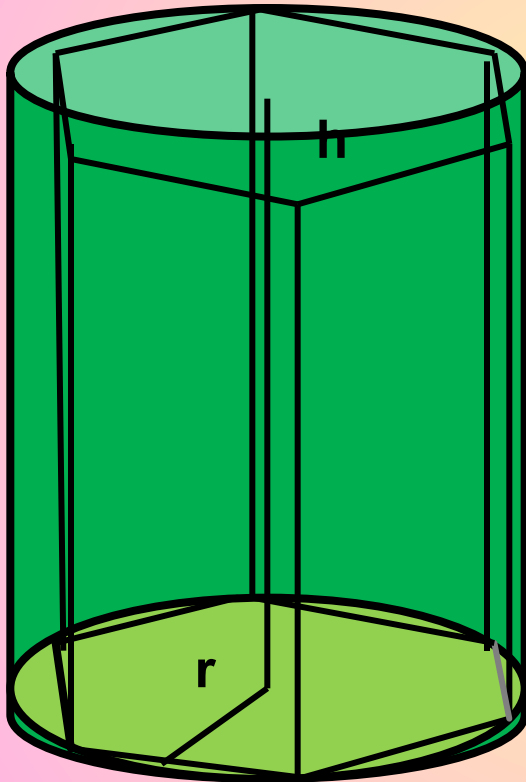
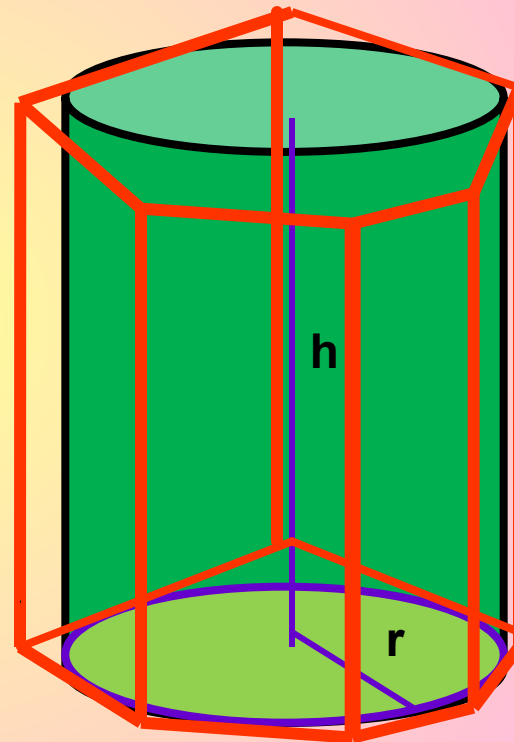


Объем цилиндра

Призмы, которые вписаны и описаны около цилиндра, и если их основание вписаны и описаны около цилиндра, то высоты этих призм равны высоте самого цилиндра.



Вписанная призма

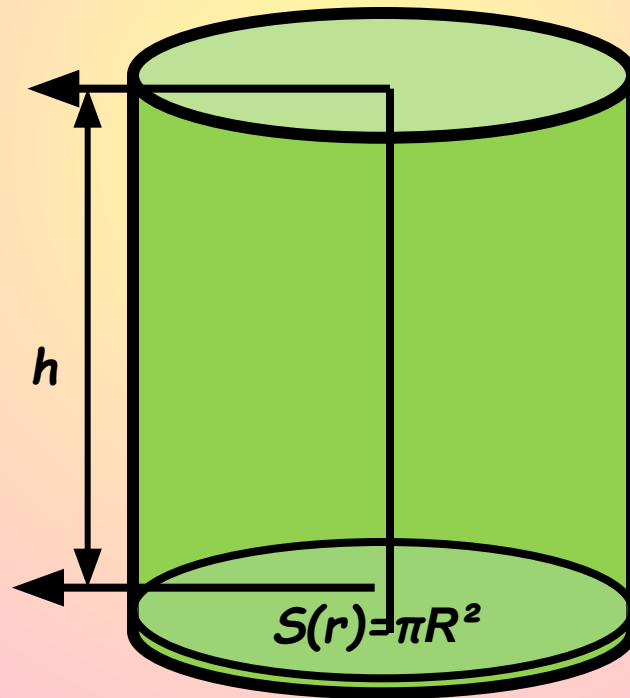


Описанная призма

Теорема:

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту. $V=S*h$

$$V=\pi R^2 * h$$



Доказательство:

Впишем в цилиндр правильную n -угольную призму F_n , а в F_n впишем цилиндр P_n .

$F_n = S_n \cdot h$ где S_n - площадь основания призмы
Цилиндр P содержит призму F_n ,
которая в свою очередь,
содержит цилиндр P_n .

Тогда $V_n < S_n \cdot h < V$ (1)

Будем увеличивать
число $n \Rightarrow R_n = r \cos 180/n^\circ$
при $n \rightarrow +\infty$

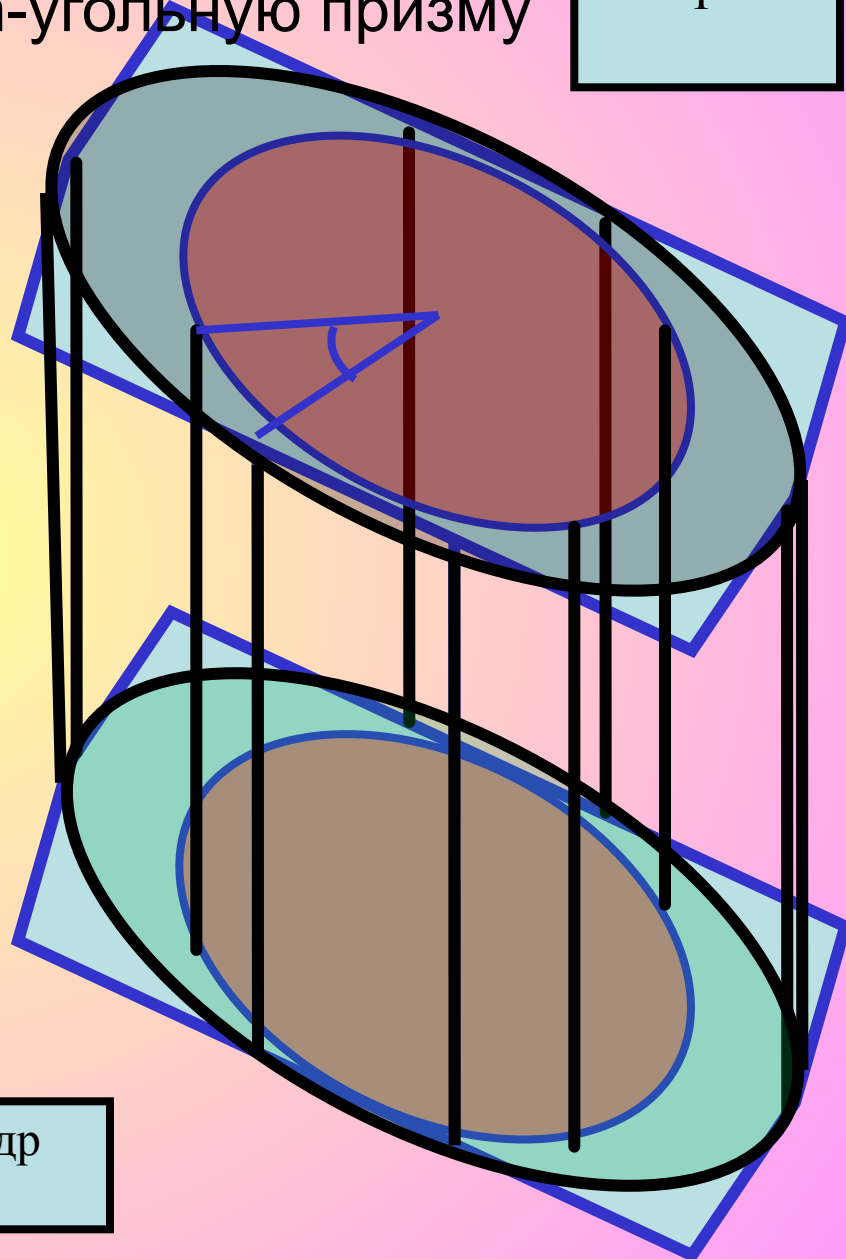
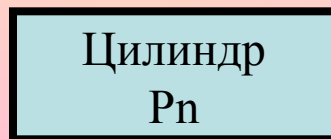
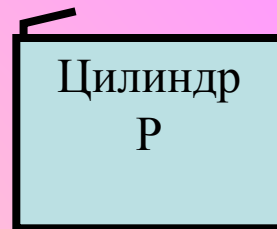
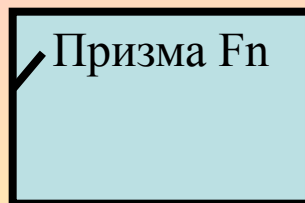
Поэтому: $\lim V_n = V$

Из неравенства (1) следует,
что $\lim S_n \cdot h = V$

Но $\lim S_n = \pi r^2$ таким образом

$V = \pi r^2 h$

$\pi r^2 = S \Rightarrow V = Sh$



Свойство объемов №1

Равные тела имеют равные объемы

Свойство объемов №2

Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Свойство объемов №3

Если одно тело содержит другое, то объем первого тела не меньше объема второго.

Зад. № 671г)

Дано: Цилиндр, вписанная n-угольная призма, $n=8$.

Найти: $V_{\text{пр.}} / V_{\text{цил.}}$

Решение:

$$V_{\text{цил.}} = \pi r^2 h. \quad V_{\text{пр.}} / V_{\text{цил.}} = 2\sqrt{2}/\pi$$

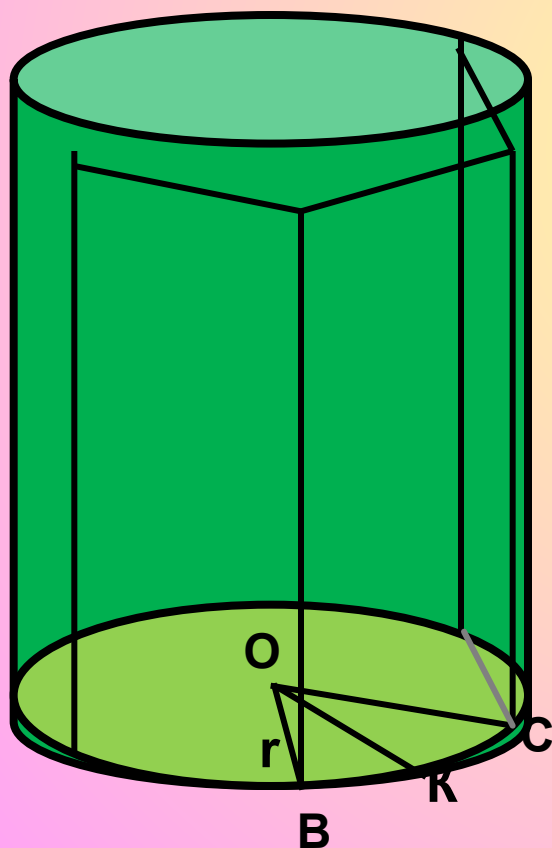
$$\angle BOC = 360^\circ / 8 = 45^\circ.$$

$$S_{\text{BOC}} = 1/2 OB * OC * \sin \angle BOC = 1/2 r^2 * \sin 45 = 1/2 r^2 \sqrt{2}/2 = r^2 \sqrt{2}/4.$$

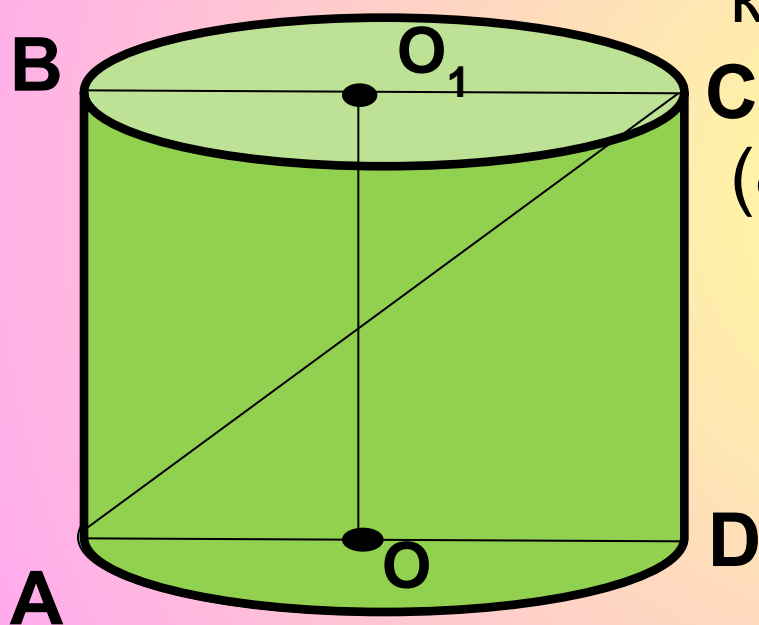
$$S_{\text{осн. пр.}} = 8 S_{\text{BOC}} = 8 r^2 \sqrt{2}/4 = 2 r^2 \sqrt{2}.$$

$$V_{\text{пр.}} = S_{\text{осн}} * h = 2 r^2 h \sqrt{2}$$

Ответ: $2\sqrt{2}/\pi$



Осевое сечение цилиндра – квадрат,
диагональ которого равна $8\sqrt{2}$ см.
Найдите: объем цилиндра.



Решение: $AC = 8\sqrt{2}$, т.к. ABCD-
квадрат. Пусть $CD = a$, тогда

$$\begin{aligned} & \text{С } CD = AD = a \\ & (8\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

$$a = 8 \text{ см}$$

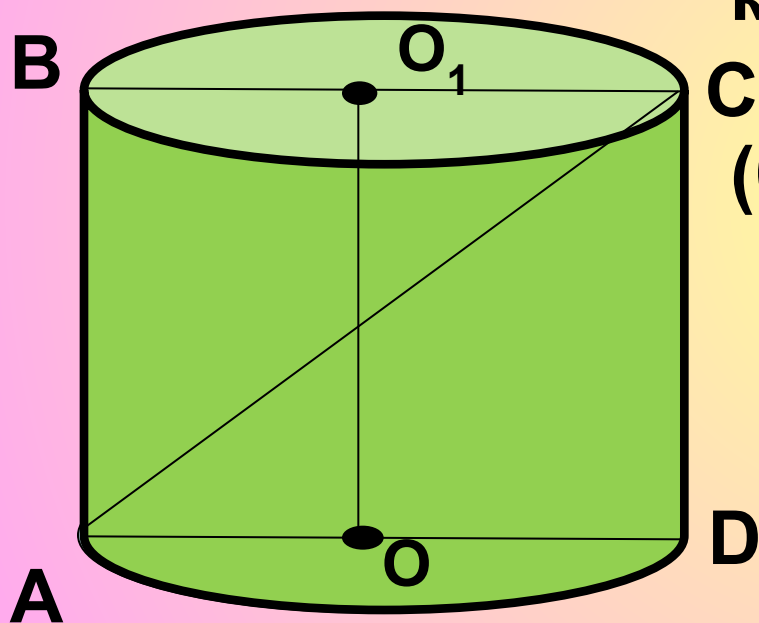
$$V = S_{\text{осн.}} * h$$

$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2 \quad V = \pi * 4^2 * 8 = 128\pi$$

$$V = 128\pi \text{ см}^3$$

Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна $6\sqrt{2}$ см.

Найдите: объем цилиндра.



Решение: $AC = 6\sqrt{2}$, т.к. ABCD – квадрат. Пусть $CD = a$, тогда

$$AC = AD = a$$
$$(6\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$a = 6 \text{ см}$$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2 \quad V = \pi \cdot 3^2 \cdot 6 = 54\pi$$

$$V = 54 \pi \text{ см}^3$$