

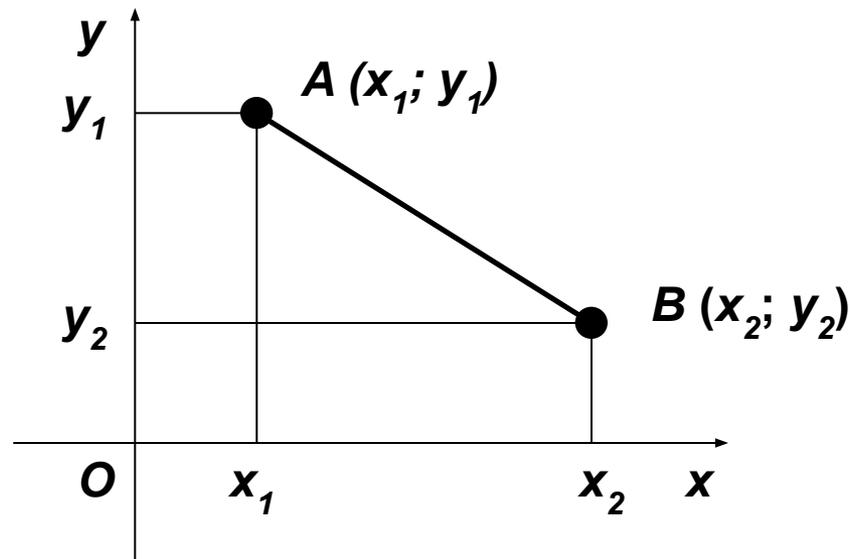
Координатный метод

Геометрия
9класс

Расстояние между точками

Рассмотрим вопрос о нахождении расстояния между точками, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и известны координаты точек **A** и **B** в этой системе координат: **A** ($x_1; y_1$) и **B** ($x_2; y_2$). Тогда расстояние $d(A, B) = AB$ между точками **A** и **B** можно найти по формуле

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

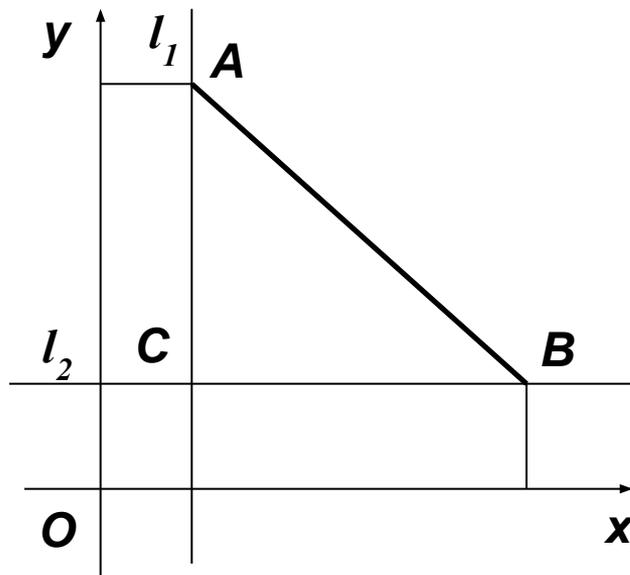


Докажем формулу $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ для случая, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, т. е. когда отрезок **AB** не параллелен ни одной из координатных осей. Пусть **C** – точка пересечения прямых l_1 и l_2 , которые проходят через точки **A**, **B** соответственно и параллельны осям **Oy**, **Ox**. Рассмотрим прямоугольный треугольник **ABC**. Длины сторон **AC** и **BC** равны: **AC** = $|x_2 - x_1|$, **BC** = $|y_2 - y_1|$. Тогда по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

или

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Заметим, что формула $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ верна и для случаев:

- а) $x_1 = x_2, y_1 \neq y_2$ (отрезок параллелен оси **Oy**, рисунок 1);
- б) $x_1 \neq x_2, y_1 = y_2$ (отрезок параллелен оси **Ox**, рисунок 2);
- в) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ (точки **A** и **B** совпадают).

В случае а) $d(A, B) = AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$.

В случае б) $d(A, B) = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$.

Если точки **A** и **B** совпадают, то $d(A, B) = 0$.

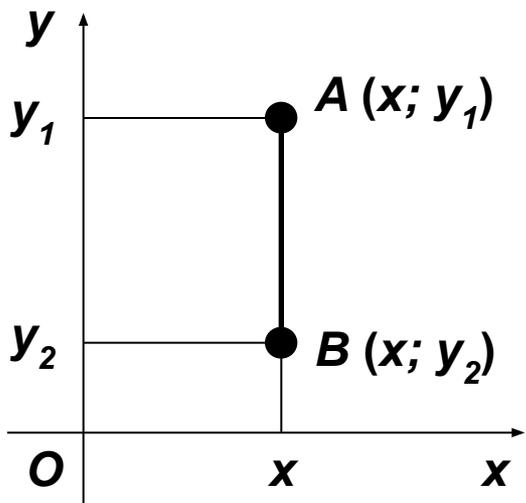


Рис. 1

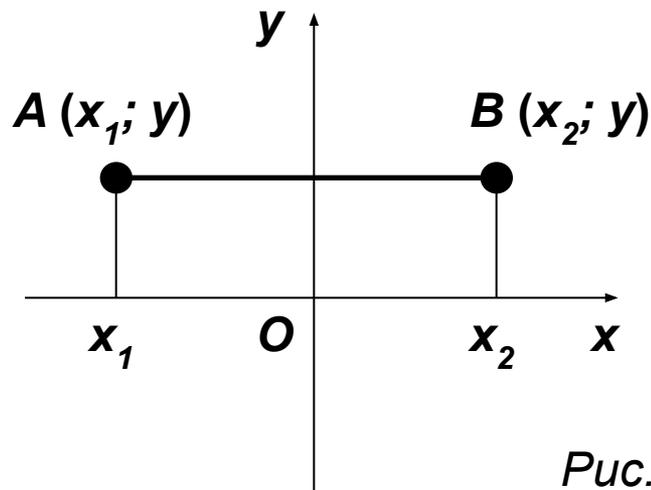


Рис. 2

Рассмотрим пример.

Пусть необходимо вычислить площадь квадрата **$ABCD$** , две вершины которого имеют координаты **$A(8; 8)$** и **$B(5; 5)$** . Площадь квадрата равна квадрату длины стороны.

Следовательно, **$S_{ABCD} = AB^2$** . Для вычисления длины стороны **AB** воспользуемся формулой расстояния между двумя точками

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

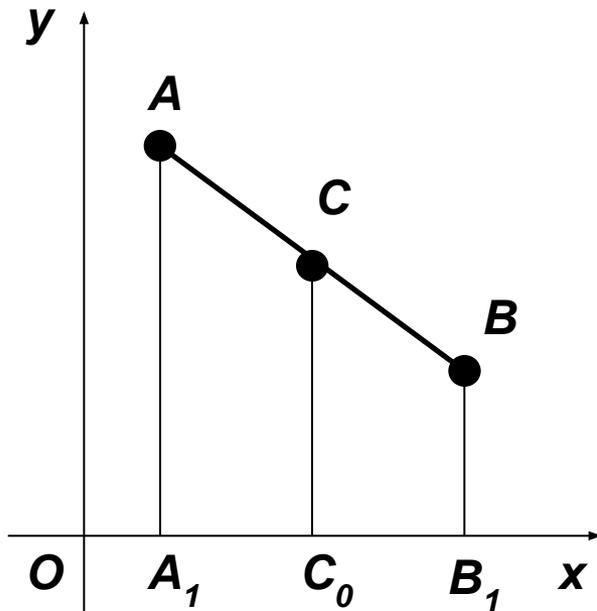
$$AB = \sqrt{(8 - 5)^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь квадрата **$S_{ABCD} = AB^2 = 18$ кв. ед.**

Ответ: 18 кв. ед.

Координаты середины отрезка

Рассмотрим вопрос о вычислении координат середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка.



Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ – произвольные точки плоскости, а точка $C(x_0; y_0)$ – середина отрезка AB . Найдем координаты x_0 и y_0 .

Найдем координату x_0 .

1) Пусть отрезок AB не параллелен оси Oy , т. е. $x_1 \neq x_2$. Проведем через точки A , B и C прямые, параллельные оси Oy , которые пересекают ось Ox в точках $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ и $C_0(x_0; 0)$ соответственно. Тогда по теореме Фалеса точка $C_0(x_0; 0)$ – середина отрезка A_1B_1 , т. е. $A_1C_0 = C_0B_1$ или $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x_0 - x_1 = x_0 - x_2$, либо $x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$, то первое равенство невозможно, а значит, верно второе равенство, из которого

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

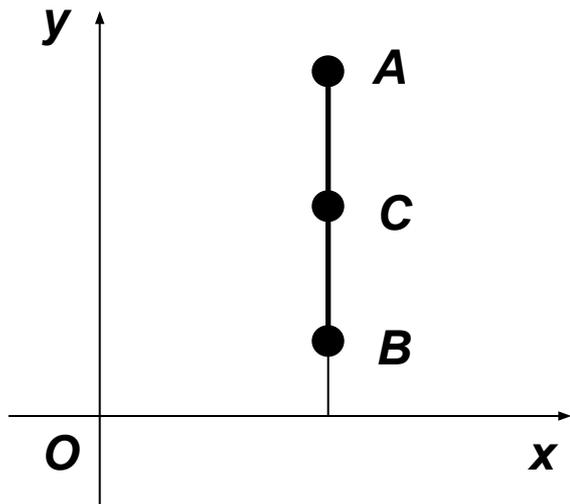


Рис. 1

2) Пусть отрезок **AB** параллелен оси **Oy**, т. е. $x_1 = x_2$. В этом случае все точки **A**₁, **B**₁, **C**₀ имеют одну и ту же абсциссу, а следовательно, формула

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

верна и в этом случае (рис. 1).

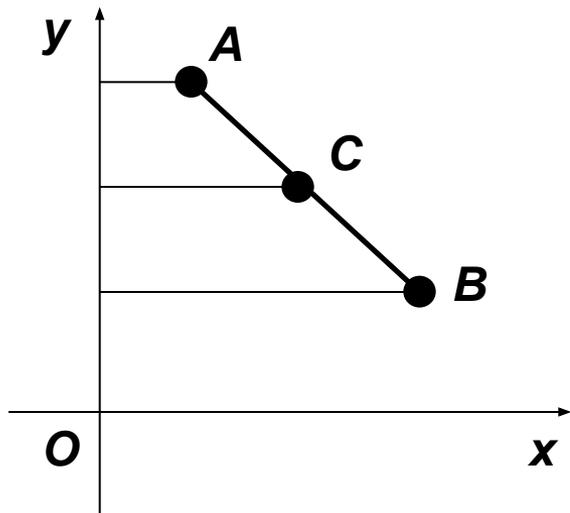
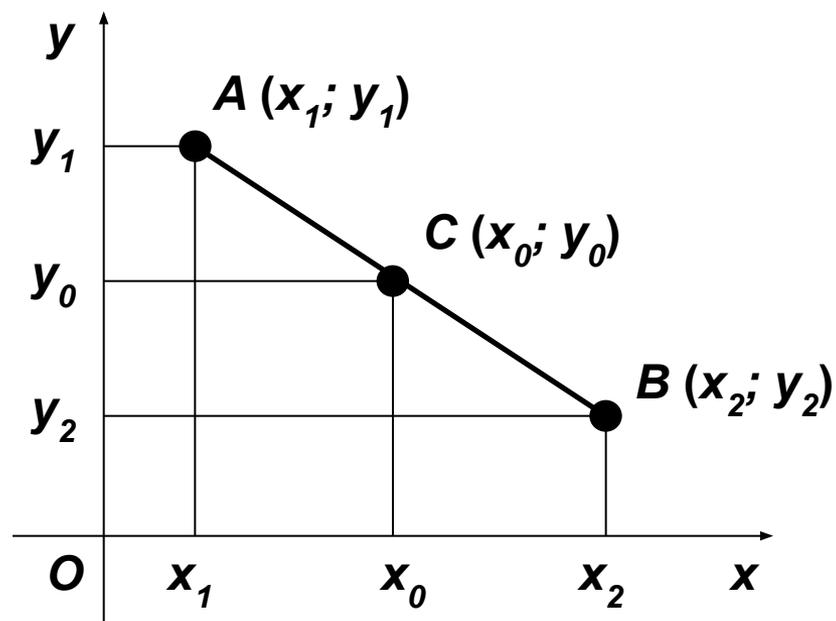


Рис. 2

Координата **y**₀ точки **C**₀ находится аналогично. В этом случае рассматриваются прямые, параллельные оси **Ox** (рис. 2), а соответствующая формула имеет вид

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Середина **C** отрезка **AB**, где **A** ($x_1; y_1$), **B** ($x_2; y_2$):

$$C(x_0; y_0)$$
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Задача. Концами отрезка служат точки $A(-8; -5)$, $B(10; 4)$. Найдите координаты точек C и D , которые делят отрезок AB на три равные части.

Решение.

Пусть точки C и D имеют координаты $(x_C; y_C)$ и $(x_D; y_D)$.

1) Найдем абсциссы точек C и D .

Так как точка C – середина отрезка AD , то выполняется равенство

$$x_C = \frac{x_D - 8}{2},$$

так как точка D – середина отрезка CB , то

$$x_D = \frac{10 + x_C}{2}.$$

Решив систему $\begin{cases} 2x_C = x_D - 8, \\ 2x_D = 10 + x_C, \end{cases}$

находим $x_C = -2$, $x_D = 4$.

2) Найдем ординаты точек **C** и **D**.

Для нахождения ординат точек **C** и **D** воспользуемся равенствами

$$y_C = \frac{y_D - 5}{2}; \quad y_D = \frac{y_C + 4}{2}.$$

Решив систему

$$\begin{cases} 2y_C = y_D - 5, \\ 2y_D = y_C + 4, \end{cases}$$

находим $y_C = -2$, $y_D = 1$.

Ответ: C (-2; -2), D (4; 1).

Заключение

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.