

4.3. Число измерений, необходимое для получения заданной точности

Ситуация: после проведения измерений при выбранной доверительной вероятности p , доверительный интервал для результата измерения слишком широк. Так как СКО среднего уменьшается с ростом числа измерений N

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

и, следовательно, уменьшается доверительный интервал $\Delta = t S_{\bar{x}}$. Таким образом, можно увеличить число измерений для получения заданного доверительного интервала. Это задача из раздела математической статистики, называемого планирование эксперимента.

$\varepsilon = \frac{\Delta}{S}$	p			
	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	5	7	11	17
0,5	13	18	31	50
0,4	19	27	46	74
0,3	32	46	78	130
0,2	70	100	170	280
0,1	270	390	700	1100
0,05	1100	1500	2700	4300
0,01	27000	38000	66000	110000

Алгоритм:

- 1). Задаются доверительным интервалом Δ ;
- 2). Используя СКО наблюдений из предыдущих измерений

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

определяют относительный интервал

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{S}$$

- 3). Задаются доверительной вероятностью p
- 4). По ε и p из таблицы определяют числа измерений N для получения заданного доверительного интервала.

$$n \geq \frac{t_{\alpha, m}^2 \cdot S_x^2}{\delta^2} = t_{\alpha, m}^2 \cdot \left(\frac{S_x}{\delta} \right)^2 = t_{\alpha, m}^2 \cdot \varepsilon^2$$

где $\varepsilon = S_x/\delta$.

4.4. Исключение промахов

Промехом называют грубую погрешность, т.е. погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов.

Именно грубые погрешности и могут быть вызваны ошибками, которые допускает оператор: неправильный отсчет по шкале измерительного прибора или неправильная запись результата наблюдений. Также их причинами могут стать внезапные и кратковременные изменения условий измерения или незамеченные неисправности в аппаратуре.

Промехи могут возникать при однократных измерениях и могут быть выявлены и устранены при повторных измерениях.

Что же надо делать с измерениями, погрешность которых существенно выше погрешности остальных измерений? Надо их отбрасывать или можно оставить? Для ответа на данный вопрос существует ряд статистических критериев. Сама же процедура выявления слишком больших погрешностей, называется **цензурированием** выборки. Для того чтобы воспользоваться определенным критерием, необходимо знать закон распределения результата измерения.

Для проверки подозрительных результатов на промах используются статистические гипотезы. Гипотеза заключается в предположении, что некоторый результат наблюдения x_i не содержит грубой погрешности. Далее задаются уровнем значимости q – вероятностью того, что сомнительный результат (промах) действительно мог иметь место (q можно выбрать равным 0,01; 0,02; 0,05 или 0,1). Пользуясь статистическими критериями, пытаются опровергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удастся, то результат признается промахом, и его исключают.

В ГОСТ Р 8.736 – 2011 (Измерения прямые однократные. Методы обработки результатов наблюдений) рекомендуется использовать критерий Граббса. Данный статистический критерий **используется для нормального распределения** результатов наблюдений. Для наибольшего $x_{\max}$ и наименьшего $x_{\min}$ результатов измерений вычисляют критерии Граббса, предполагая, что эти результаты вызваны грубыми погрешностями:

$$G_1 = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S}, G_2 = \frac{|x_{\min} - \bar{x}|}{S}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

S - СКО наблюдений:

Если $G1$ ($G2$) $> G_T$ то $x_{\max}$ ($x_{\min}$) исключают, как маловероятное значение. Далее вновь вычисляют среднее арифметическое и среднеквадратическое отклонения ряда результатов измерений и процедуру проверки наличия грубых погрешностей при необходимости повторяют.

Оценка выскакивающих измерений на промах

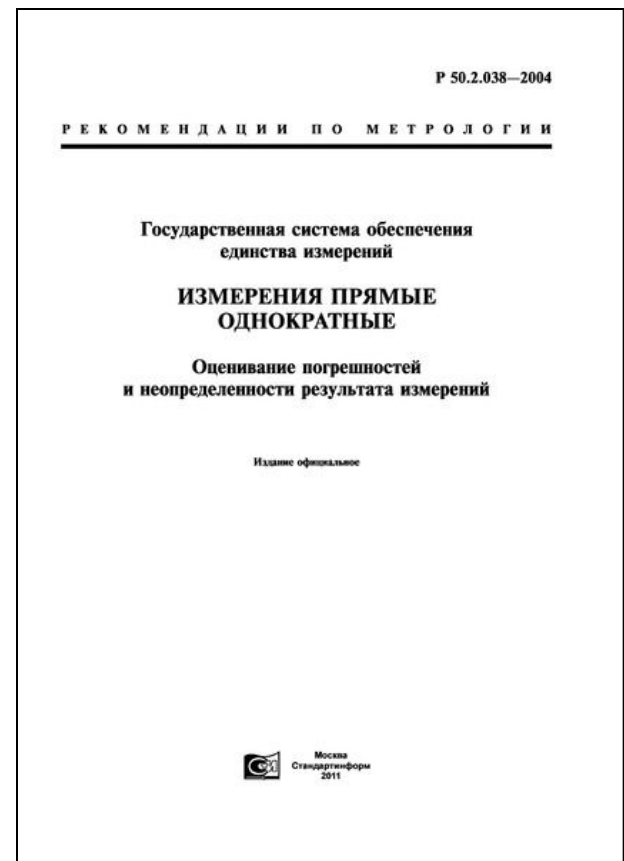
N	β			N	β		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
3	1,41	1,41	1,41	13	2,26	2,43	2,71
4	1,65	1,69	1,72	14	2,30	2,46	2,76
5	1,79	1,87	1,96	15	2,33	2,49	2,80
6	1,89	2,00	2,13	16	2,35	2,52	2,84
7	1,97	2,09	2,27	17	2,38	2,55	2,87
8	2,04	2,17	2,37	18	2,40	2,58	2,90
9	2,10	2,24	2,46	19	2,43	2,60	2,93
10	2,15	2,29	2,54	20	2,45	2,62	2,96
11	2,19	2,34	2,61	22	2,49	2,66	3,01
12	2,23	2,39	2,66	25	2,54	2,72	3,07

4.5. Прямые однократные измерения

$$\Delta_{сл} \ll \Delta_c$$

Р 50.2.038-2004

Рекомендации по метрологии «Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений»



Прямые однократные измерения

– производственная необходимость ;

– возможность пренебрежения случайными погрешностями;

– случайные погрешности существенны, но доверительная граница погрешности результата измерения не превышает допустимой погрешности измерений.

За погрешность измерения принимают неисключенную систематических погрешностей, если она одна.

При наличии нескольких неисключенных систематических погрешностей Δ_i , они суммируются

$$\Delta_{\Sigma} = k \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2},$$

где k – поправочный коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью и числом n составляющих Δ_i .

- $P=0,95 \Rightarrow k=1,1.$
- $P=0,99 \Rightarrow k=1,45$ при $n > 4.$

5. Полная погрешность измерений

5.1. Вычисление погрешностей косвенных измерений

Косвенные измерения: значение искомой физической величины определяют на основании результатов прямых измерений других величин, связанных с искомой функциональным соотношением.

На практике при вычислении погрешности косвенных измерений можно руководствоваться следующими правилами. Пусть $y = f(x_1; x_2; \dots x_n)$ есть косвенно измеряемая величина, являющаяся произвольной функцией непосредственно измеряемых и независимых величин $x_1; x_2; x_3; \dots x_n$.

В таком случае **абсолютная погрешность** Δy



$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta_n\right)^2} \quad \text{или} \quad (1)$$
$$\Delta y = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta_i\right)^2}$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - частная производная

Δ - **абсолютная** систематическая Δ_c (или случайная Δ^o) погрешности

Частная производная от функции $f(x_1; x_2; \dots x_n)$ по переменной x_i , т.е. производная, взятая при условии, что на момент взятия все остальные переменные x_j ($j \neq i$) есть постоянные величины; Δ стоящее перед u или со знаком i , в сумме означает суммарную погрешность величины u или x_i , систематическую составляющую погрешности Δ_C или случайную составляющую погрешности Δ_{x_i} $\square$

Погрешности Δ , должны быть взяты при одной и той же доверительной вероятности, например при $p = 0,95$

В этом случае погрешность результата косвенного измерения Δu будет иметь ту же доверительную вероятность.

Приведенной формулой можно пользоваться при любом виде функции $y = f(x_1; x_2; \dots x_m)$, однако формула (1) наиболее удобна, если независимые переменные или функции от них образуют сумму или разность, например,

$$y = ax_1 + bx_2^3 + c \sin x_3$$

Для $y = Ax_1 + Bx_2$ абсолютная погрешность y будет:

$$\Delta y = \sqrt{(A\Delta x_1)^2 + (B\Delta x_2)^2}$$

Если переменные x_i или функции от них образуют произведение или частное, удобнее пользоваться следующей формулой для подсчета относительной погрешности результата косвенного измерения:

$$\ln y = \ln f(x_1, x_2 \dots x_n) \quad \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1} \Delta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2} \Delta_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n} \Delta_n\right)^2} \quad (2)$$

Или что тоже самое

$$\delta = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1}{f}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\Delta x_2}{f}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\Delta x_n}{f}\right)^2}$$

Можно рассчитать абсолютную (относительную) погрешность косвенного измерения используя таблицу

Номер	Вид функции	Абсолютная или относительная погрешность
1	$y = A x_1 + B x_2$	$\Delta y = \sqrt{(A \Delta x_1)^2 + (B \Delta x_2)^2}$
2	$y = A x_1 - B x_2$	$\Delta y = \sqrt{(A \Delta x_1)^2 + (B \Delta x_2)^2}$
3	$y = A x_1 \times x_2$	$\Delta y = \sqrt{(A x_2 \Delta x_1)^2 + (A x_1 \Delta x_2)^2}$ или по (2) $\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$
4	$y = \frac{A x_1}{x_2}$	Аналогично как и для произведения
5	$y = A x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$	

5.2. Оценка оптимальных требований к точности измерений

Задача: получить максимальную точность при проведении косвенных измерений и минимизировать затраты на их проведение и обработку результатов измерений

Определение плотности цилиндра

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 l}; \quad \ln \rho = \ln 4 + \ln m - \ln \pi - 2 \ln d - \ln l$$

Частные производные:

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial m} = \frac{1}{m}; \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial \pi} = -\frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial d} = -\frac{2}{d}; \quad \frac{\partial \ln \rho}{\partial l} = -\frac{1}{l};$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho}{\rho} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial x_i} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta_C m}{m} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_C \pi}{\pi} \right)^2 + \left(2 \frac{\Delta_C d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_C l}{l} \right)^2} \end{aligned}$$



Пренебрегать
составляющими
погрешности

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \leq 0.1 \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)_{\max}$$

$$l \approx 11 \text{ см}, \quad d \approx 5 \text{ мм}, \quad m \approx 20 \text{ г}$$

$$\frac{\Delta_C m}{m} = \frac{0.0001 \text{ г}}{20 \text{ г}} = 5 \cdot 10^{-6}; \quad \text{- аналитические весы, допустимая погрешность} < 0.1 \text{ мг}$$

$$\frac{2\Delta_C d}{d} = \frac{2 \cdot 0.004 \text{ мм}}{5 \text{ мм}} = 1,6 \cdot 10^{-3}; \quad \text{- микрометр, допустимая погрешность} \pm 0.004 \text{ мм}$$

играет основную роль

$$\frac{\Delta_C l}{l} = \frac{0.1 \text{ мм}}{100 \text{ мм}} = 1 \cdot 10^{-3} \quad \text{- штангенциркуль, допустимая погрешность} \pm 0.1 \text{ мм}$$

π - МОЖНО ВЗЯТЬ С ЛЮБОЙ ТОЧНОСТЬЮ, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАКОВ

Пренебрегать
составляющими
погрешности

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \leq 0.1 \left(\frac{\Delta x_i}{x_i} \right)_{\max}$$

Массу m с максимально возможной точностью измерять нет смысла,
достаточно чтобы

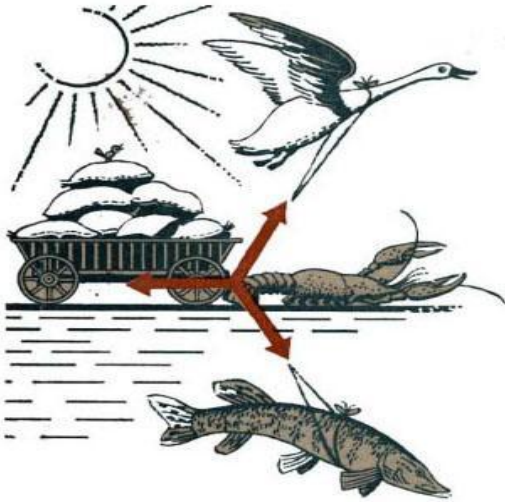
$$\frac{\Delta_C m}{m} = 2 \cdot 10^{-4} \quad \text{-- на порядок точнее } d \text{ и } l$$

Аналогично, $\frac{\Delta_C \pi}{\pi} = 2 \cdot 10^{-4}$, следовательно, можно брать до третьего знака

$$\pi = 3.142$$

$$\Delta_C \pi * \pi = 0.000628$$

5.3. Правила сложения систематической и случайной составляющих погрешности (ГОСТ 8.207-76)



Рассмотрим суммирование систематической и случайной составляющих погрешности, сложившийся в настоящий момент в метрологической практике.

Пусть:

Δ_C - неисключённая систематическая погрешность,
 Δ^0 - случайная погрешность

Сл. 1. Если , $\Delta_C < 0.8 S_{\bar{x}}$ то неисключёнными систематическими погрешностями пренебрегают по сравнению со случайными и принимают, что граница погрешности измерений равна границе доверительного интервала случайной составляющей.

$$\Delta = \Delta^0;$$

Сл. 2. Если , $\Delta_C > 8 S_{\bar{x}}$ то случайной погрешностью пренебрегают по сравнению с систематической и считают, что граница погрешности результата измерений равна границе неисключённой систематической погрешности.

$$\Delta = \Delta_C$$

Сл.3. Если $0.8 S_{\bar{x}} \leq \Delta_C \leq 8 S_{\bar{x}}$ то границу погрешности результата измерения находят путем построения композиции распределений случайной и неисключенной систематической погрешностей по формуле

$$\Delta = k S_{\Sigma};$$

k - коэффициент, зависящий от соотношения случайной и систематической погрешностей, он вычисляется по эмпирической формуле,
 S_{Σ} - оценка суммарного квадратического отклонения результата измерения

$$k = \frac{\Delta^0 + \Delta_C}{S_{\bar{x}} + \frac{\Delta_C}{\sqrt{3}}}; \quad S_{\Sigma} = \sqrt{\frac{\Delta_C^2}{3} + S_{\bar{x}}^2}$$

для $N \geq 10$ и $P_d = 0,95$

$$k = \sqrt{3}; \quad \Delta = \sqrt{\Delta_C^2 + (\Delta^0)^2}$$

На практике обычно применяют для суммарной погрешности

$$\Delta = \sqrt{\Delta_c^2 + (\Delta^0)^2}$$

Также на практике разумно использовать ***критерий ничтожно малой погрешности***, который можно сформулировать следующим образом: если одна величина меньше другой на порядок, то ею можно пренебречь.

5.4 Округление результата измерений.

Сколько значащих цифр оставлять в погрешности?

Для постоянного использования на практике можно сформулировать следующие правила:

Значение погрешности при пользовании современной вычислительной техникой может быть получено с большим числом знаков. Поскольку роль погрешности состоит в демонстрации того, каким значащим цифрам можно доверять в результате измерений, то часто приходится производить процедуру округления. Весь вопрос: сколько значащих цифр оставлять в погрешности?

В практике неметрологических (обычных) измерений сложилось следующее правило: **если полученное число начинается с цифры равной или большей трех, то в нем оставляют один знак, а если оно начинается с цифр 1 и 2, то в нем сохраняют два знака** (для представления точных, а также промежуточных измерений сохраняют две и три значащих цифры соответственно).

Округление результата измерения проводят после округления погрешности, т.е. числовое значение результата должно оканчиваться цифрой того ж разряда, что и значение погрешности. Для постоянного использования на практике можно сформулировать следующие правила:

Округление результата измерения проводят после округления погрешности, т.е. числовое значение результата должно оканчиваться цифрой того же разряда, что и значение погрешности.

Для постоянного использования на практике можно сформулировать следующие правила:

1. **Погрешность** результата указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной – если первая 3 и более.
2. **Результат** измерения округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности.
3. **Округление проводится лишь в окончательном результате**, все предварительные вычисления проводятся с **одним-двумя лишними знаками**.

Цифры в числе могут быть значащими и незначащими. *Значащими цифрами числа являются все цифры данного числа, кроме нулей, стоящих слева. Нули, стоящие в середине или в конце числа (справа) являются значащими цифрами, так как обозначают отсутствие единиц в соответствующем разряде. При этом цифры множителя 10^n не учитываются. Примеры определения количества значащих цифр в числах представлены в табл.*

Примеры определения количества значащих цифр

Число	Количество значащих цифр
12	2
12,0	3
12,4	3
120	3
124	3
$1,24 \cdot 10^{-3}$	3
0,1240	4
0,1046	4
$0,526 \cdot 10^6$	3
$0,206 \cdot 10^{-3}$	3
$0,200 \cdot 10^{-3}$	3
$0,020 \cdot 10^{-3}$	2

Примеры ограничения числа значащих цифр и округления погрешности

Пример	Пояснения
$0,154 \approx 0,15$ $1,967 \approx 2,0$ $19,37 \approx 19$ $144,1 \approx 0,14 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “1”, поэтому оставляем две значащие цифры. Замечание. При необходимости число записывают с множителем 10^n , где n – показатель степени.
$0,294 \approx 0,29$ $2,94 \approx 2,9$	Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры.
$0,297 \approx 0,3$ $2,97 \approx 3$	Первая значащая цифра погрешности “2”, поэтому оставляем две значащие цифры, но так как при округлении цифра “2” превращается в цифру “3”, то оставляем только одну значащую цифру.
$0,917 \approx 0,9$ $9,17 \approx 9$ $91,7 \approx 9 \cdot 10$ $9123 \approx 9 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “9”, поэтому оставляем одну значащую цифру.
$0,0977 \approx 0,10$ $0,956 \approx 1,0$ $956 \approx 1,0 \cdot 10^3$	Первая значащая цифра погрешности “9”, поэтому оставляем одну значащую цифру, но так как при округлении цифра “9” превращается в число “10”, т.е. первая значащая цифра “1”, то оставляем две значащие цифры.

Примеры ограничения количества значащих цифр в измеренном значении и его погрешности

Пример	Пояснения
$43,234 \pm 0,0417 \approx 43,23 \pm 0,04$ $32,3754 \pm 0,0917 \approx 32,38 \pm 0,09$	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
$4,3234 \pm 0,0397 \approx 4,32 \pm 0,04$ $43,2364 \pm 0,0522 \approx 43,24 \pm 0,05$ $432,37 \pm 0,0917 \approx 432,37 \pm 0,09$	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – сотые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – сотые.
$432,37 \pm 0,956 \approx 432,4 \pm 1,0$ $432,3477 \pm 2,45 \approx 432,3 \pm 2,4$ $432,134 \pm 2,86 \approx 432,1 \pm 2,9$ $43,234 \pm 3,94 \approx 43,2 \pm 3,9$	В погрешности оставляем две значащие цифры, последний разряд – десятые. В измеренном значении оставляем также младший разряд – десятые.
$43,234 \pm 3,97 \approx 43 \pm 4$ $432,364 \pm 5,55 \approx 432 \pm 6$ $432,34 \pm 39,4 \approx 432 \pm 39$ $432,34 \pm 19,37 \approx 432 \pm 19$	В погрешности оставляем одну значащую цифру, младший разряд – единицы. В измеренном значении оставляем также младший разряд – единицы.

Пример.

При измерении напряжения было получено значение $U = 4,65 \text{ В}$, погрешность составила $\pm 0,07245 \text{ В}$.

В результате округления результат должен быть записан в следующем виде $U = (4,65 \pm 0,07) \text{ В}$.

Если погрешность будет составлять $\pm 0,007245 \text{ В}$, то результат надо будет представлять так: $U = (4,650 \pm 0,007) \text{ В}$.

Правила округления погрешности такие же, как и в математике: если цифра отбрасываемого разряда меньше пяти, то оставляемую цифру не изменяют, а если больше пяти, то увеличивают на единицу. Как же быть в случае, если отбрасываемая цифра равна 5? С 2012 года в России при обработке результатов прямых многократных измерений необходимо руководствоваться ГОСТ Р 8.736 - 2011.

В приложении Е к этому ГОСТу идет речь о правилах округления результатов измерений. Наряду с основными требованиям к округлению, там рассмотрен вопрос, как надо поступать в случае, если отбрасываемая при округлении цифра равна пяти: если отбрасываемая цифра неуказываемого младшего разряда равна пяти, то сохраняемую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины **увеличивают на единицу**.

$U = 4,65 \text{ В}$, погрешность составила $\pm 0,075 \text{ В}$, $U = (4,65 \pm 0,08) \text{ В}$