

8-дәріс. Математикалық талдауға кіріспе

Тамаша шектер

Бірінші тамаша шек $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| = 1.$

1-мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \cdot \sin mx}{m \cdot x} = m \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{m \cdot x} = m \cdot 1 = m.$

2-мысал. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{kx}{2}}{x^2} =$
 $= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{kx}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{kx}{2}}{x} = 2 \cdot \frac{k^2}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{kx}{2}}{\frac{kx}{2}} = 2 \cdot \frac{k^2}{4} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{k^2}{2}.$

6) Екінші тамаша шек.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = |1^\infty| = e = 2,7182818284523...$$

немесе

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = |1^\infty| = e$$

Бұл $|1^\infty|$ түріндегі анықталмағандықты шешу үшін қолданылатын тәсіл.

$y = \log_a x$ функциясында $a = e$ болса, онда $y = \ln x$ - натурал логарифм деп аталады. $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e \cdot \ln x$, $\lg e = M$ - ауысу модулі.

Сонда $\lg x = M \ln x$, $\ln x = \frac{1}{M} \lg x$, $\frac{1}{M} \approx 2,302585$.

$$\text{3-мысал.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4} \right)^{2x+1} = |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+4-7}{5x+4} \right)^{2x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{5x+4} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-7}{5x+4} \right)^{\frac{5x+4}{-7}} \right]^{\frac{-7(2x+1)}{5x+4}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-14x-7}{5x+4}} = e^{-\frac{14}{5}}$$

$$\text{4-мысал.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7} \right)^x = |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8x-3}{x^2-3x+7} \right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}} \right]^{\frac{x \cdot (8x-3)}{x^2-3x+7}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}} = e^8.$$

Шексіз аз және шексіз көп функциялар (шамалар).

Егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ немесе $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ болса, онда $\alpha = \alpha(x)$ функциясы (шамасы) *шексіз аз функция (шама)* деп аталады.

Егер $y = f(x)$ функциясын $y = e + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ – ақырсыз кішкене шама, түрінде жазуға мүмкін болса, онда $\lim y = e$ ($x \rightarrow a$ немесе $x \rightarrow \infty$). Керісінше $\lim y = e$ болса, онда $y = e + \alpha$, $\alpha \rightarrow 0$ түрінде жазуға болады.

Егер $\alpha(x)$ ақырсыз кішкене шама болса, яғни $\alpha(x) \rightarrow 0$, онда $\frac{1}{\alpha(x)}$ ақырсыз үлкен шама деп аталады, $\frac{1}{\alpha(x)} \rightarrow \infty$.

Сонымен, егер $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, онда $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

Шексіз аз шамалардың қасиеттері

1⁰ Шексіз аз шамалардың алгебралық қосындысы да шексіз аз шама болады.

2⁰ Шексіз аз шама $\alpha = \alpha(x)$ -тің шектелген $z = z(x)$ функциясына $\alpha(x) \cdot z(x)$ көбейтіндісі де шексіз аз шама болады.

3⁰ Шексіз аз шама $\alpha(x)$ -тің $z(x)$ функциясына қатынасы $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ да шексіз аз шама болады ($\lim_{x \rightarrow a} z(x) = 0$).

α, β - шексіз аз шамалар болсын.

Егер $\lim \frac{\beta}{\alpha} = A \neq 0$ болса, онда шексіз аз α және β шамалары бірдей өлшемді шексіз аз шамалар деп аталады.

Егер $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ болса, онда α және β эквивалент шексіз аз шамалар деп аталады.

Е с к е р т у. Егер $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ - шегі жоқ болса және шексіздікке ұмтылса, онда α мен β салыстырылмайды дейді.

Эквивалент ақырсыз кішкене шамалар. Егер $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ болса, онда

α және β эквивалент ақырсыз кішкене шамалар деп аталады. ($\alpha \approx \beta$)

Егер $\alpha(x)$ функциясы $x \rightarrow a$ -да ақырсыз аз шама болса, онда

1. $\sin \alpha(x) \approx \alpha(x)$.

2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \approx \alpha(x)$.

3. $\arcsin \alpha(x) \approx \alpha(x)$.

4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \approx \alpha(x)$.

5. $1 - \cos \alpha(x) \approx \frac{(\alpha(x))^2}{2}$.

6. $(1 + \alpha(x))^a - 1 \approx a \cdot \alpha(x)$.

7. $\log_a(1 + \alpha(x)) \approx \frac{\alpha(x)}{\ln a}$.

8. $\ln(1 + \alpha(x)) \approx \alpha(x)$.

9. $a^{\alpha(x)} - 1 \approx \alpha(x) \ln a$.

10. $e^{\alpha(x)} - 1 \approx \alpha(x)$.

11. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} \approx \frac{\alpha(x)}{n}$.

12. $(1 + \alpha(x))^{1/\beta(x)} \approx e^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}$.

Функция үзіліссіздігі

Бір жақты шектер. Егер x айнымалы a -дан кіші мәндер қабылдап a санына ұмтылғанда $f(x)$ функциясы b_1 -ге ұмтылса, онда былай белгіленеді:

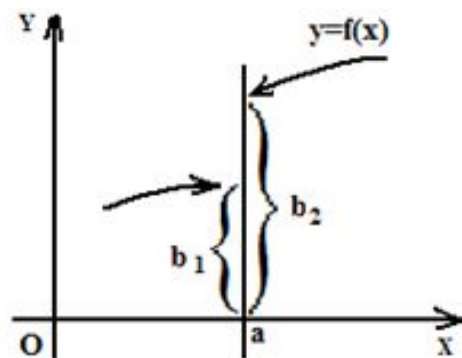
$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b_1$$

және b_1 -ді $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *сол жақ шегі* деп атайды.

Егер x айнымалы a санынан тек үлкен мәндер қабылдап a -ға ұмтылса, онда былай белгіленеді

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b_2$$

және b_2 -ні $f(x)$ функциясының a нүктесіндегі *оң жақ шегі* деп атайды.



5-мысал. $f(x) = e^{\frac{1}{x-a}}$ функциясының $x \rightarrow a$ -да біржақты шектерін табу керек.

Шешуі: Егер $x \rightarrow a - 0$ болса, онда $\frac{1}{x-a} = \frac{1}{-0} = -\infty$.

$$\text{Сонымен, } f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} e^{\frac{1}{x-a}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Егер $x \rightarrow a + 0$ болса, онда $\frac{1}{x-a} = \frac{1}{+0} = +\infty$.

$$\text{Сонымен, } f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} e^{\frac{1}{x-a}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Функцияның нүктедегі және аралықтағы үзіліссіздігі. $y = f(x)$ функциясы берілсін. $x_0 \in X$ - анықталу облысы болсын. Егер

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

болса, онда $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде *үзіліссіз функция* деп аталады.

Бұл анықтама мынадай үш шарттың орындалуымен мәндес деп саналады:

а) x_0 нүктесі өзінің қандай да бір маңайымен қоса X анықталу облысына тиісті болады;

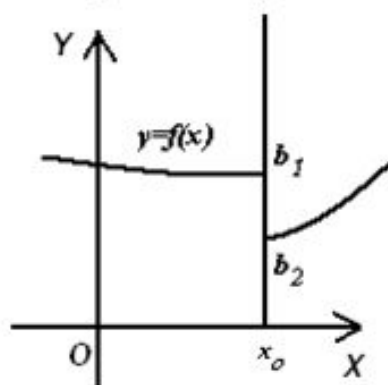
ә) x_0 нүктесінде функцияның бір жақты шектері бар және олар өзара тең, яғни $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ болады;

б) функциясының бір жақты шектері оның осы x_0 нүктедегі мәніне тең, яғни $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ болады.

Егер $f(x)$ функциясы қандай да бір аралықтың әрбір нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол сол *аралықта үзіліссіз функция* деп аталады.

Үзіліс нүктелері және олардың түрлері. Функцияның үзіліссіздік шарттарының кемінде біреуі орындалмайтын нүктелері оның *үзіліс нүктелері* деп аталады.

Үзіліс түрлері. 1) Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының сол жақ және оң жақ шектері бар болып, бірақ олар бір-біріне тең болмаса, немесе олар бір-біріне тең, бірақ олар x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *бірінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.



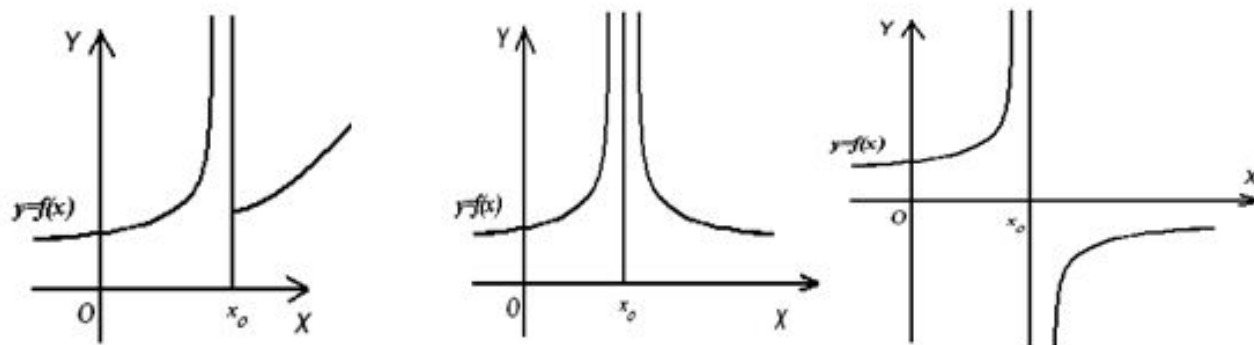
$$f(x_0 - 0) = b_1, f(x_0 + 0) = b_2,$$

$$f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0) = b_1 - b_2 < \infty,$$

$$b_1 \neq b_2$$

Ендеше x_0 нүктесінде 1-ші текті үзіліс

2) Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының бір жақты шектерінің кемінде бірі шексіз болып, не тіпті ол болмаса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *екінші текті үзіліс нүктесі* деп аталады.



3) Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының шегі бар (яғни сол жақ және оң жақ шектері бір-біріне тең) болса, бірақ ол x_0 нүктесіндегі функцияның мәніне тең емес (немесе $f(x_0)$ анықталмаған болса), онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының *жөнделетін үзіліс нүктесі* деп аталады.

6-мысал. $x = 4$ нүктесінде $y = \frac{x}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешуі: $\lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x}{x-4} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x}{x-4} = +\infty,$

яғни берілген функцияның $x \rightarrow 4$ -да не сол жақ, не оң жақ ақырлы шегі жоқ. Ендеше, $x = 4$ - екінші текті үзіліс нүктесі болады.

7-мысал. $x = 4$ нүктесінде $y = \arctg \frac{1}{x-4}$ функциясы үзілісті екенін көрсету керек.

Шешуі: Егер $x \rightarrow 4-0$ болса, онда $\frac{1}{x-4} \rightarrow -\infty$ және $\lim_{x \rightarrow 4-0} y = -\frac{\pi}{2}.$

Егер $x \rightarrow 4+0$ болса, онда $\frac{1}{x-4} \rightarrow +\infty$ және $\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \frac{\pi}{2}.$

Сонымен, $x \rightarrow 4$ -да берілген функцияның сол жақ және оң жақ ақырлы шектері бар, бірақ олар әртүрлі.

Ендеше, $x = 4$ - бірінші текті үзіліс (секіріс) нүктесі. $x = 4$ нүктесінде секіріс $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ -ге тең.

8-мысал. $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ функциясын үзіліссіздікке зерттеу керек.

Шешуі: $x = 5$ нүктесінде функция анықталмайды, себебі x орнына 5 қойсақ, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандық аламыз. Басқа нүктелерде $x - 5 \neq 0$ болғандықтан бөлшекті $(x - 5)$ -ке қысқартамыз. Сондықтан, $y = x + 5$ болады. Бұдан $\lim_{x \rightarrow 5-0} y = \lim_{x \rightarrow 5+0} y = 10$.

Сонымен, $x = 5$ болғанда функция жөнделетін үзілісті болады. Егер $x = 5$ болғанда $y = 10$ деп ұйғарсақ функция үзіліссіз болады.

Сонда $y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ функциясы барлық x нүктесінде үзіліссіз.

Мұндай функция графигі $y = x + 5$ түзуі болады.