



ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ



РАЗДЕЛ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Глава 1. Одномерные СВ

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Определения и классификация случайных величин.
2. Ряд распределения. Функция распределения СВ, ее свойства и график.
3. Плотность распределения вероятностей.
4. Числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин И. И. Высшая математика. – М.: Академия, 2004, стр. 531 – 545.
2. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2004, стр. 60 – 83.

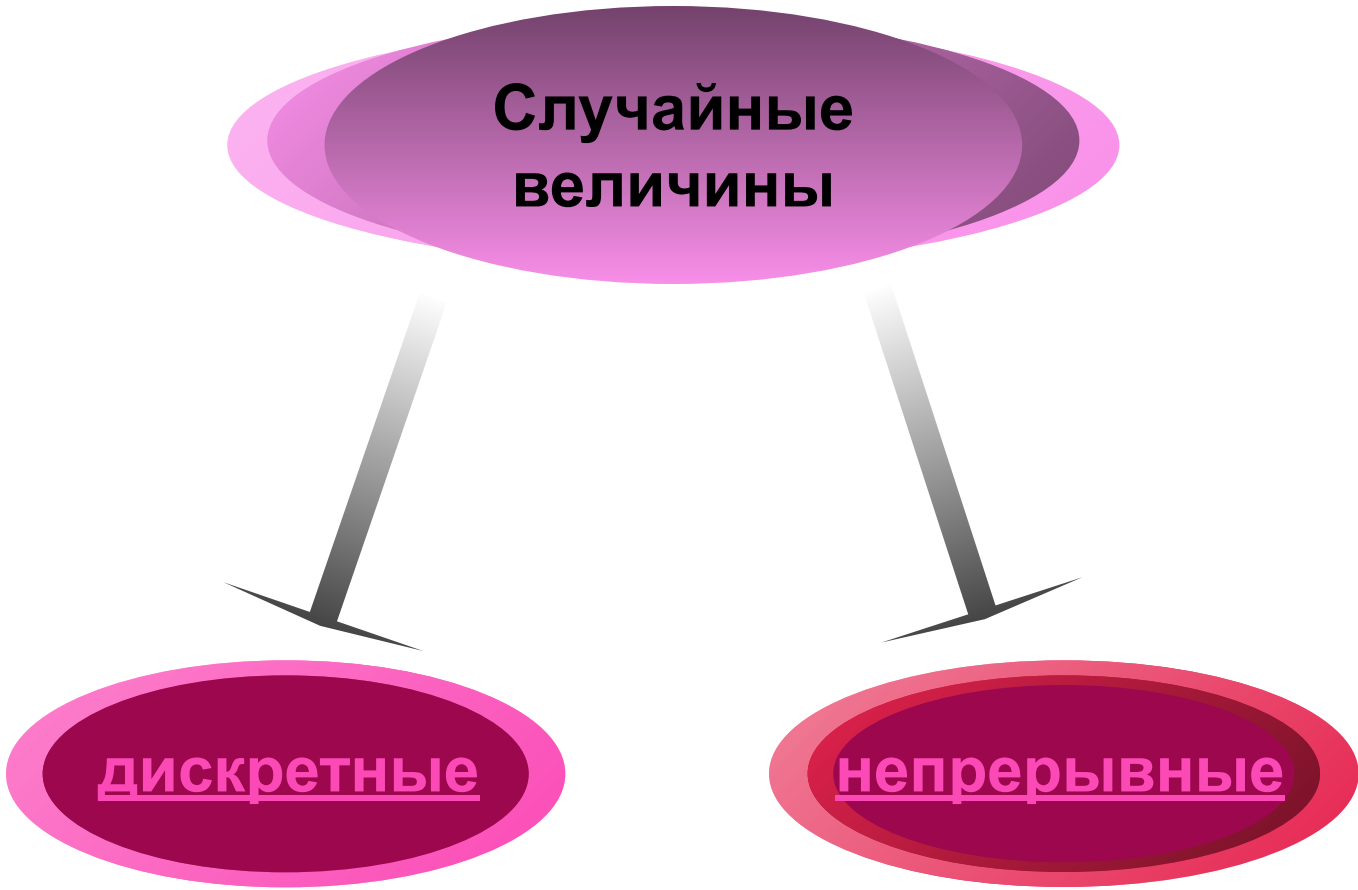




§1. Основные определения

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно какое именно.

Обозначения: $X, Y, Z \dots$



```
graph TD; A([Случайные величины]) --> B([дискретные]); A --> C([непрерывные]);
```

**Случайные
величины**

дискретные

непрерывные

 Определение. Случайная величина X называется **дискретной**, если в результате испытания она принимает одно из конечного или счетного множества значений $x_1, x_2, x_3, \dots$





 **Определение. Непрерывной** случайной величиной называют такую случайную величину, которая может принять любое значение из некоторого конечного или бесконечного интервала (интервалов).



**ПРИВЕДИТЕ ПРИМЕРЫ
СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**



Закон распределения — всякое соответствие между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

**§ 2. ЗАКОН
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ДИСКРЕТНОЙ
СЛУЧАЙНОЙ
ВЕЛИЧИНЫ**





ТАБЛИЧНЫЙ СПОСОБ

• Пусть $X = x_1$ и $P(X = x_1) = p_1$;

$X = x_2$ и $P(X = x_2) = p_2$;

$X = x_3$ и $P(X = x_3) = p_3$;

.....

$X = x_n$, $P(X = x_n) = p_n$.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДСВ

Закон распределения или ряд распределения
дискретной случайной величины X ,
принимавшей конечное число значений

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n,$$

с соответствующими вероятностями

$p_i (i = 1, 2, \dots, p_n)$, задается в виде таблицы

X	x_1	x_2	x_3		x_n
P	p_1	p_2	p_3		p_n

РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДСВ

Ряд распределения дискретной случайной величины, принимающей счетное число значений задается в виде таблицы, где

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m < \dots -$$

возможные значений величины X , а p_m ($m = 1, 2, \dots$) – их вероятности.

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_m	$\dots$

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1.$$

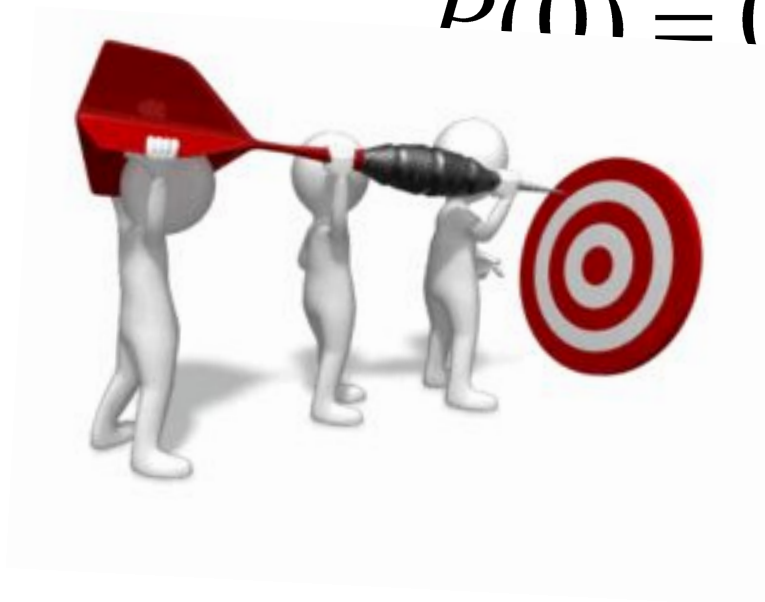
Пример.

- Два стрелка стреляют по цели по одному разу.
Вероятность попадания:
для первого стрелка 0,6;
для второго – 0,7.
- ***Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель.***



Ноль попаданий:

$$P(0) = 0,4 \cdot 0,3 = 0,12.$$



Одно попадание:

$$P(1) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,46.$$



Два попадания:

$$P(2) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42.$$




$$P(0)=0,12; P(1)=0,46; P(2)=0,42$$

Ряд распределения:

X			
P			

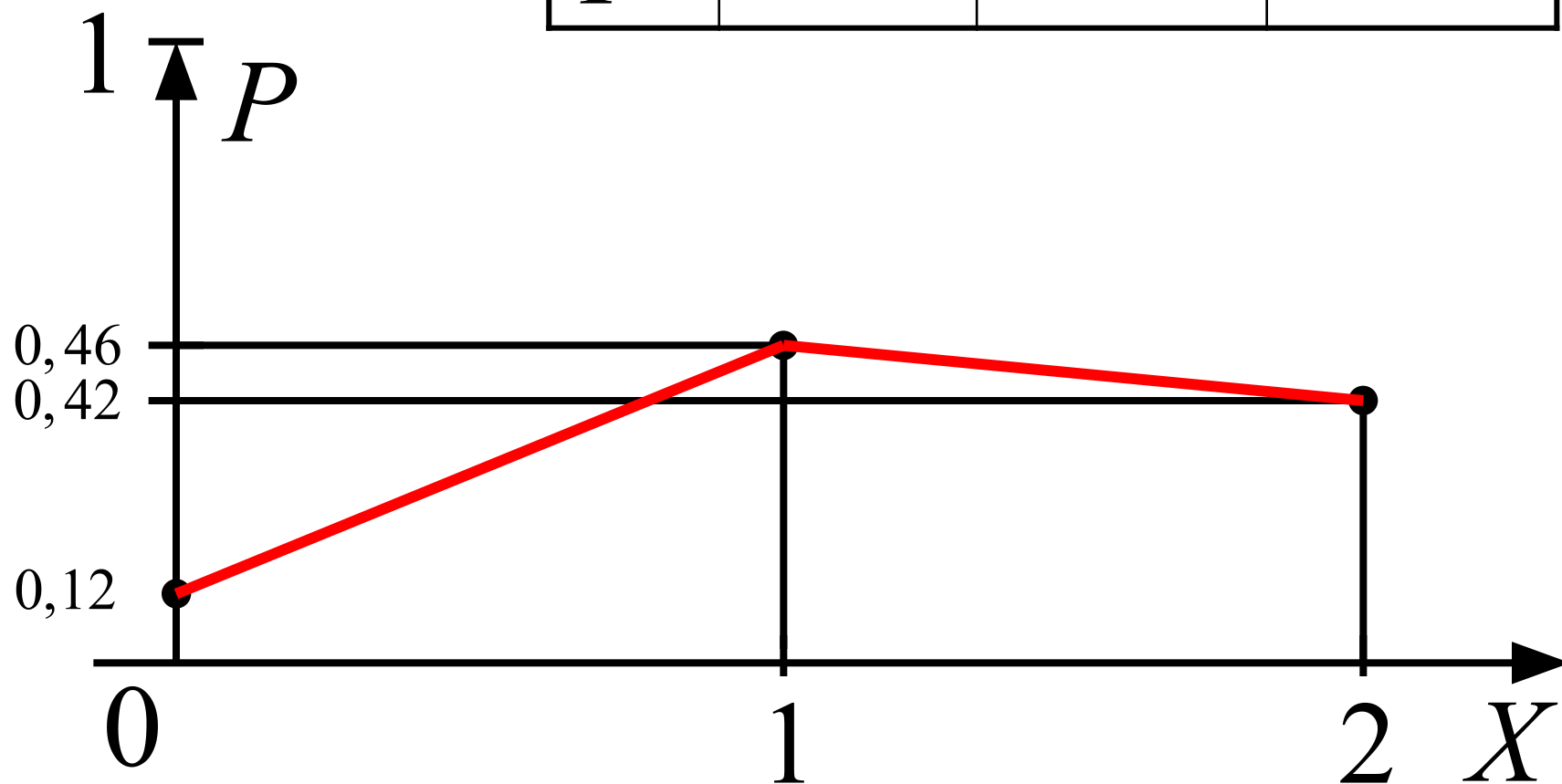
$$0,12 + 0,46 + 0,42 = 1.$$



ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Многоугольник распределения

X	0	1	2
P	0,12	0,46	0,42





АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ



**С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ $F(x)$**

§ 3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Функция распределения

 Определение. Функцией распределения случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше, чем x :

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = P(X < x)$$

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

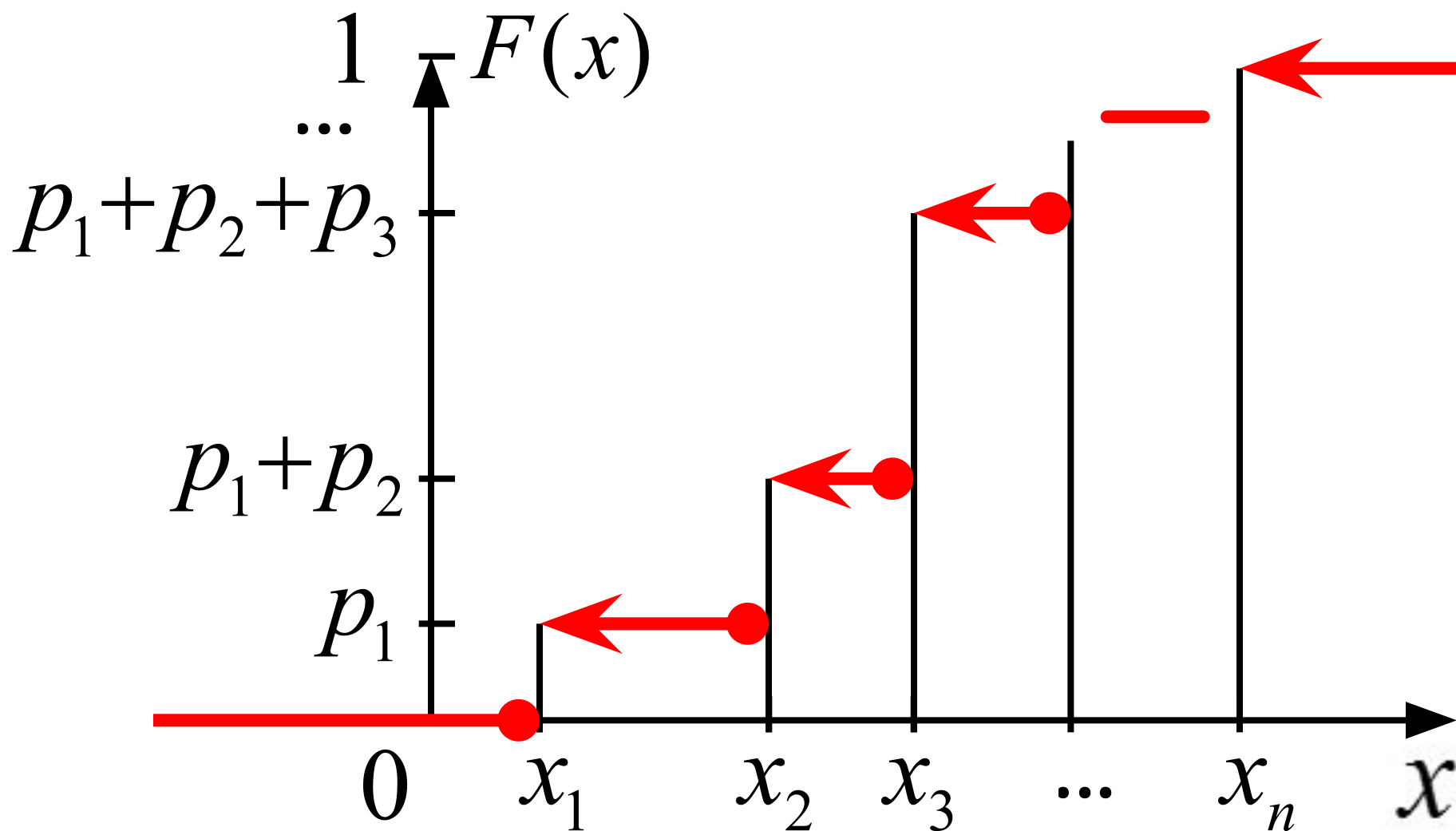
$F(x)$ для ДСВ X

определяется формулой

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1, \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \leq x_3, \\ \dots & \dots \\ 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_1, \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \leq x_2, \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \leq x_3, \\ \dots & \dots \\ 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$$

График –
ступенчатая функция



Свойства функции распределения

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

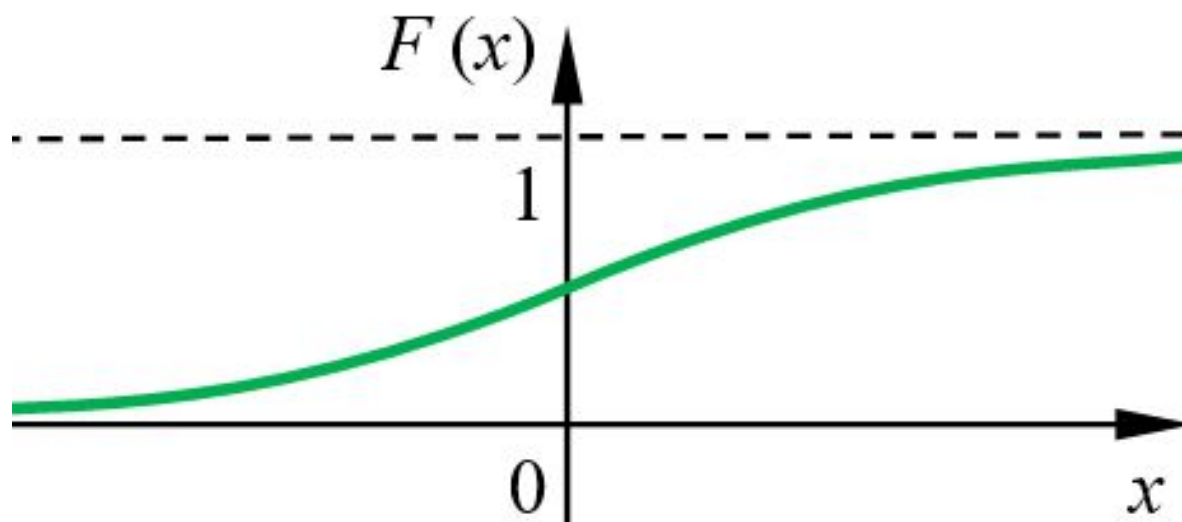
2) $F(x)$ неубывающая функция на $(-\infty; +\infty)$.

3) $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$

4. Если X - непрерывная случайная величина, то $P(X = \alpha) = 0$

$$\begin{aligned} P(\alpha \leq X < \beta) &= P(\alpha < X < \beta) = \\ &= P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta). \end{aligned}$$

- 5. Если X - непрерывная случайная величина, то $F(x)$ – **непрерывная функция**.



§ 4. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



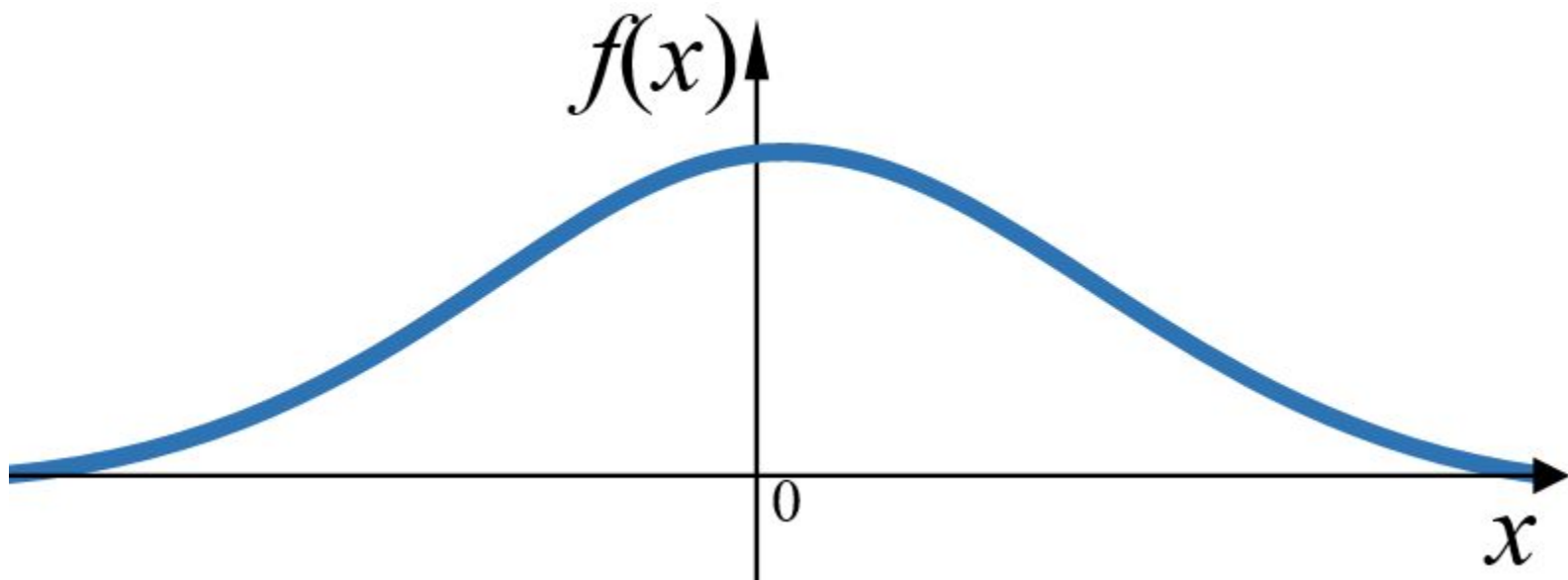
 **Определение.** Дифференциальной функцией распределения или плотностью распределения вероятностей наз. первая производная интегральной функции распределения

$$f(x) = F'(x).$$

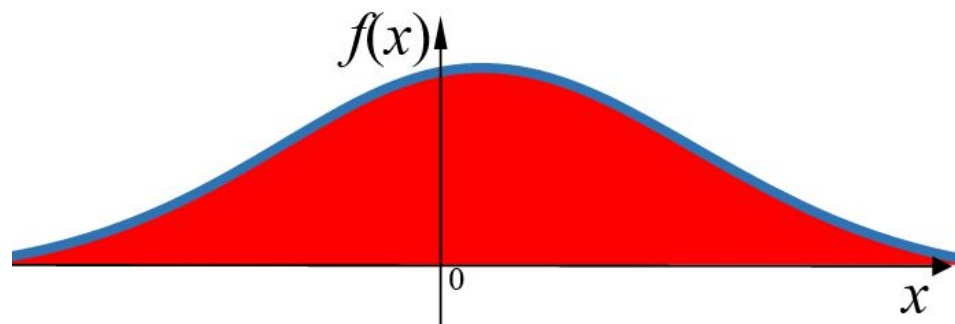
- Иногда плотность распределения вероятностей обозначают

$$p(x) = F'(x).$$

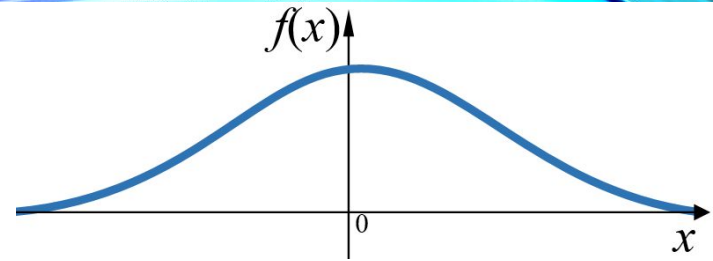
- График дифференциальной функции распределения $f(x)$ наз. **кривой распределения**:



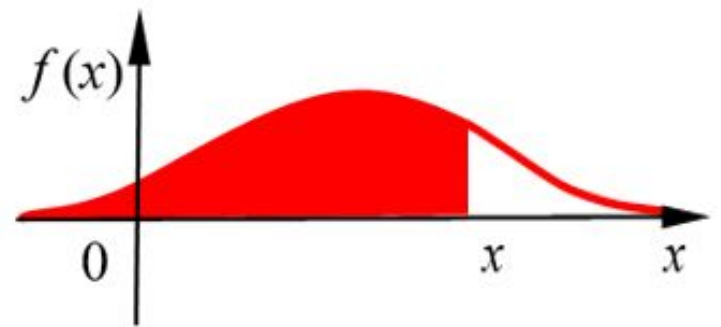
СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



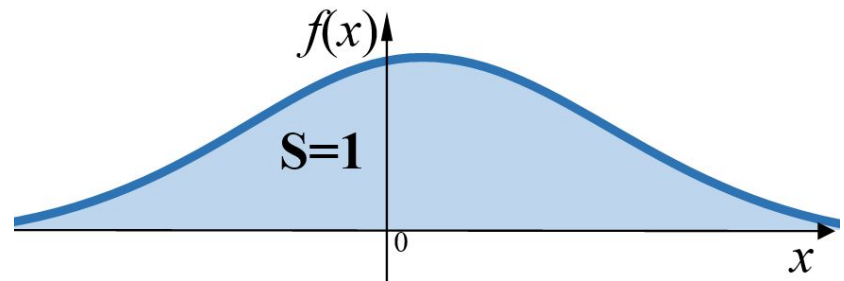
- 1. Для $\forall x \quad f(x) \geq 0$.



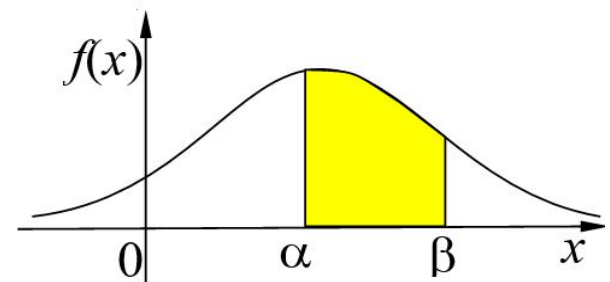
- 2. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$



- 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.



- 4. $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.





§5. Числовые характеристики СВ



- Пусть X - дискретная случайная величина с распределением вероятностей

X	x_1	x_2	...	x_m
P	p_1	p_2	...	p_m

или

X	x_1	x_2	...	x_m	...
P	p_1	p_2	...	p_m	...



 Определение.

Математическим ожиданием ДСВ X называется число

$$MX = \sum_{k=1}^m p_k x_k$$

для конечного множества значений X ,

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k$$

для счетного множества значений X .



Пример. Рассмотрим случайную X величину с рядом распределения:

X	9	10	11
P	0,4	0,1	0,5

Математическое ожидание случайной величины X в нашем примере:

X	
P	

$$M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,3 = 10,1$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

 Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , называется несобственный интеграл

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

 В случае, когда все возможные значения НСВ X принадлежат отрезку $[a, b]$, ее **математическое ожидание** вычисляется по формуле

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$



Свойства математического ожидания

- 1. Если $X \equiv C = const$, то $MX = C$.
- 2. Если k – константа, то $M(kX) = kMX$.
- 3. Если k – константа, то $M(k + X) = k + MX$.
- 4. $M(X \pm Y) = MX \pm MY$
- 5. Если СВ X и Y независимы, то
$$M(XY) = MX \cdot MY$$



ДИСПЕРСИЯ

 **Определение. Дисперсией (рассеиванием)** случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$



$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Пример.

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,5625 = 1,5$$

Возможные значения квадрата отклонения:

$$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1,5)^2 = 2,25$$

$$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1,5)^2 = 0,25$$

$$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1,5)^2 = 0,25$$

Дисперсия равна:

$$D(X) = 2,25 \cdot 0,0625 + 0,25 \cdot 0,375 + 0,25 \cdot 0,5625 = 0,375$$



Вычисление дисперсии

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее мат. ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$



$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Вычисление дисперсии

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X ²	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

Математическое ожидание случайной величины равно:

$$M(X) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,5625 = 1,5$$

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,0625 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,5625 = 2,625$$

$$D(X) = 2,625 - [1,5]^2 = 0,375$$



ДИСПЕРСИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СВ

- **Дисперсия** непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$$



ДИСПЕРСИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СВ

Для практического вычисления дисперсии используется формула

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$



СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

$$1^0. D [a] = 0, a = const;$$

$$2^0. D [a X] = a^2 D[X];$$

$$3^0. D [X] \geq 0;$$

4⁰. если X, Y независимы, то

$$D [X \pm Y] = D [X] + D [Y].$$



СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

 Определение.

Средним квадратическим отклонением (СКО) случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии. СКО является мерой рассеяния случайной величины и обозначается $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}$$

СКО имеет ту же размерность, что и случайная величина.



ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

- **Пример.** Случайным образом бросают точку на отрезок $[0,1]$. X – координата точки попадания.
- **Найти: дисперсию и среднеквадратическое отклонение.**
- **Решение.**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ 1, & \text{если } x \in (0,1] \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

$$M(X) = \int_0^1 x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Из формулы:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$



$$M(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



МОДА

 Определение. Модой M_0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение.

Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум.

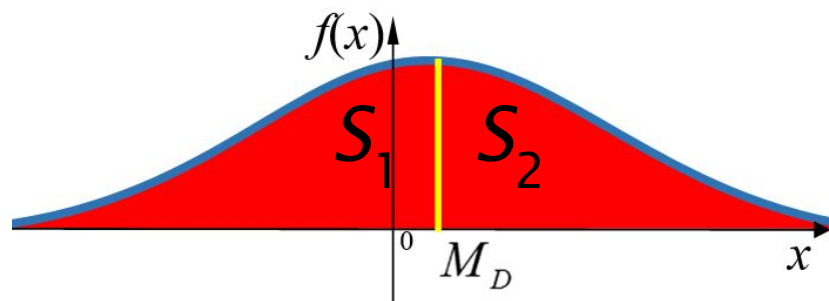


МЕДИАНА

 **Определение.** Медианой M_D случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины

$$P(X < M_D) = P(X > M_D)$$

Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам $S_1 = S_2$.



НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

***Определение.** Начальным моментом α_k k -го порядка СВ X называется

$$\alpha_k = MX^k.$$

***Определение.** Центральным моментом μ_k k -го порядка СВ X называется

$$\mu_k = M(X - MX)^k.$$



НАЧАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Для дискретной случайной величины:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx .$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.



ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Для дискретной случайной величины:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^k p_i .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx .$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения



КОЭФФИЦИЕНТ АСИММЕТРИИ

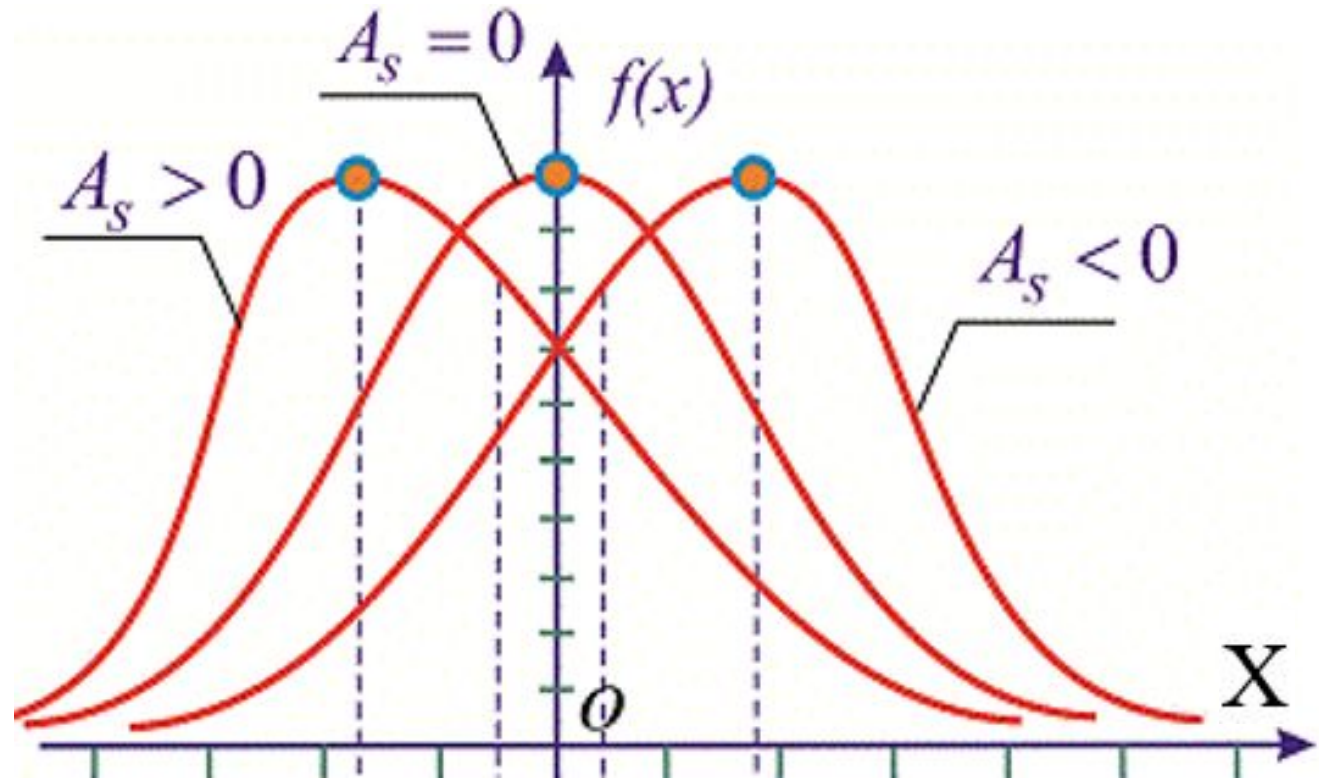
 Определение. Коэффициентом асимметрии A_S называется величина

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$



КОЭФФИЦИЕНТ АСИММЕТРИИ

Если $A_s=0$, то СВ
распределена
симметрично
относительно
математического
ожидания.



- ***Коэффициент асимметрии по другому можно назвать коэффициентом «скошенности».***



ЭКСЦЕСС

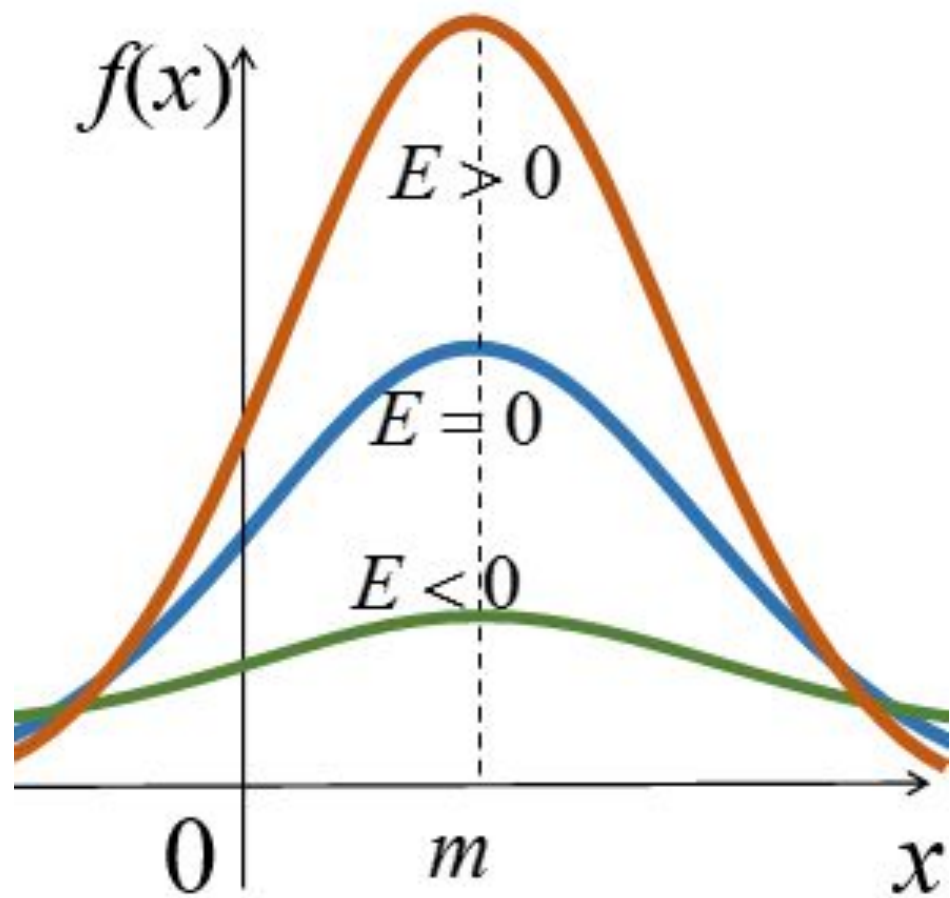
-  Определение. Эксцессом E называется величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$



СУЩЕСТВУЕТ ТАК
НАЗЫВАЕМОЕ
НОРМАЛЬНОЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
СВ. ДЛЯ НЕГО $E=0$.
КРИВЫЕ, БОЛЕЕ
ОСТРОВЕРШИННЫ
Е, ЧЕМ
НОРМАЛЬНАЯ
ОБЛАДАЮТ
ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ
ЭКСЦЕССОМ,
БОЛЕЕ
ПЛОСКОВЕРШИНН
ЫЕ –
ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ.

ЭКСЦЕСС





Спасибо!