

## 27.2. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний (механических и электромагнитных). Резонанс

Рассмотрим зависимость *амплитуды*  $A$  вынужденных колебаний от *частоты*  $\omega$ . Механические и электромагнитные колебания будем

рассматривать одновременно, называя колеблющуюся величину либо смещением ( $x$ ) колеблющегося тела из положения равновесия, либо зарядом ( $Q$ ) конденсатора. Из формулы (27.8) следует, что амплитуда  $A$  смещения (заряда) имеет максимум. Чтобы определить резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$  — частоту, при которой амплитуда  $A$  смещения (заряда) достигает максимума, — нужно найти максимум функции (27.8), или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по  $\omega$  и приравняв нулю, получим условие, определяющее  $\omega_{\text{рез}}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega = 0$$

Это равенство выполняется при  $\omega = 0, \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ , физический

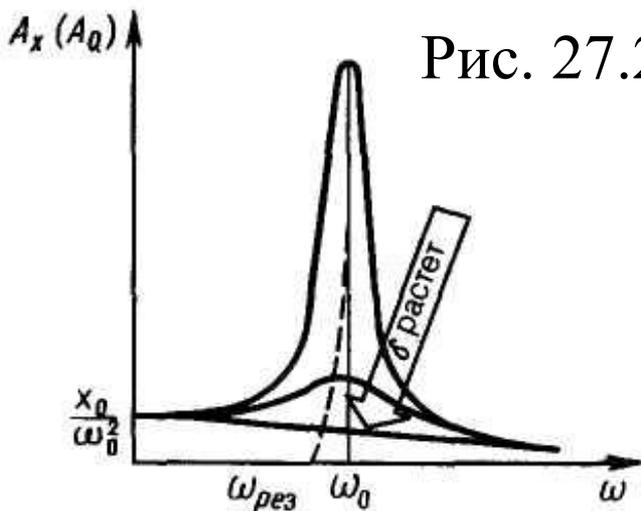


Рис. 27.2 смысл которых имеет лишь положительное значение. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad (27.2.1)$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте  $\omega_{\text{рез}}$  называется **резонансом** (соответственно **механическим** или **электрическим**). В случае когда  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , значение  $\omega_{\text{рез}}$  практически совпадает с собственной частотой  $\omega_0$  колебательной системы. Подставляя (27.2.1) в формулу (27.8), получим

$$A_{\text{рез}} = \frac{x_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}. \quad (27.2.2)$$

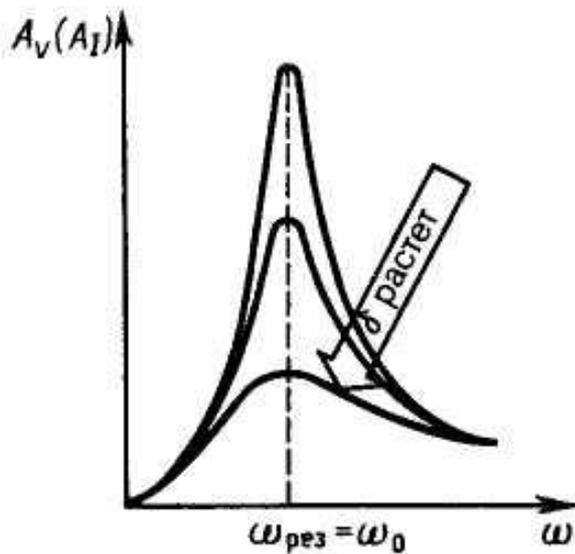
На рис. 27.2 приведена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях  $\beta$ . Из (27.2.1) и (27.2.2) вытекает, что чем меньше  $\beta$ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если  $\omega \rightarrow 0$ , то все кривые (см. также (27.8)) приходят к одному и тому же, отличному от нуля предельному значению  $x_0/\omega_0^2$ , так называемому **статическому отклонению**. В случае механических колебаний  $x_0/\omega_0^2 = F_0/(m\omega_0^2)$ , в случае электромагнитных —  $(U_m/(L\omega_0^2))$ . Если  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная

совокупность кривых называется **резонансными кривыми**.

Из формулы (27.2.2) вытекает, что при малом затухании ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансная амплитуда смещения (заряда)

$$A_{\text{рез}} = \frac{X_0}{2\beta\omega_0} = \frac{\omega_0 X_0}{2\beta\omega_0^2} = \theta \frac{X_0}{\omega_0^2},$$

где  $\theta$  — добротность колебательной системы  $x_0/\omega_0^2$  — рассмотренное выше статическое отклонение. Отсюда следует, что добротность  $\theta$  характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше  $\theta$ , тем больше  $A_{\text{рез}}$ . На рис. 27.26 представлены резонансные кривые для амплитуды скорости (тока).



$$\omega A = \frac{X_0 \omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2}}$$

максимальна при  $\omega_{\text{рез}} = \bar{\omega}_0$  и равна  $x_0/(2\beta)$ , т. е. чем больше коэффициент затухания  $\beta$ , тем ниже максимум резонансной кривой.

Используя ранее выведенные формулы, получим, что амплитуда скорости при механическом резонансе равна  $(A_v)_{\max} = x_0/(2\beta) = F_0/r$ , а амплитуда тока при электрическом резонансе

$$(A_I)_{\max} = x_0/(2\beta) = U_m/R.$$

Из выражения  $\operatorname{tg} \varphi = 2\beta\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$  (см. (26.9)) следует, что если затухание в системе отсутствует ( $\beta = 0$ ), то *только* в этом случае колебания и вынуждающая сила (приложенное переменное напряжение) имеют одинаковые фазы; во всех других случаях  $\varphi = 0$ .

Зависимость  $\varphi$  от  $\omega$  при разных коэффициентах  $\beta$  графически представлена на рис. 26.27, из которого следует, что при изменении  $\omega$  изменяется и сдвиг фаз  $\varphi$ . Из формулы (26.9) вытекает, что при  $\omega = 0$   $\varphi = 0$ , а при  $\omega = \omega_0$  независимо от значения коэффициента затухания  $\beta$   $\varphi = \pi/2$ , т. е. сила (напряжение) опережает по фазе колебания на  $\pi/2$ . При дальнейшем увеличении  $\omega$  сдвиг фаз возрастает и при  $\omega \gg \omega_0$   $\varphi \rightarrow \pi$ , т. е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения). Семейство кривых, изображенных на рис. 27.27, называется *фазовыми резонансными кривыми*.

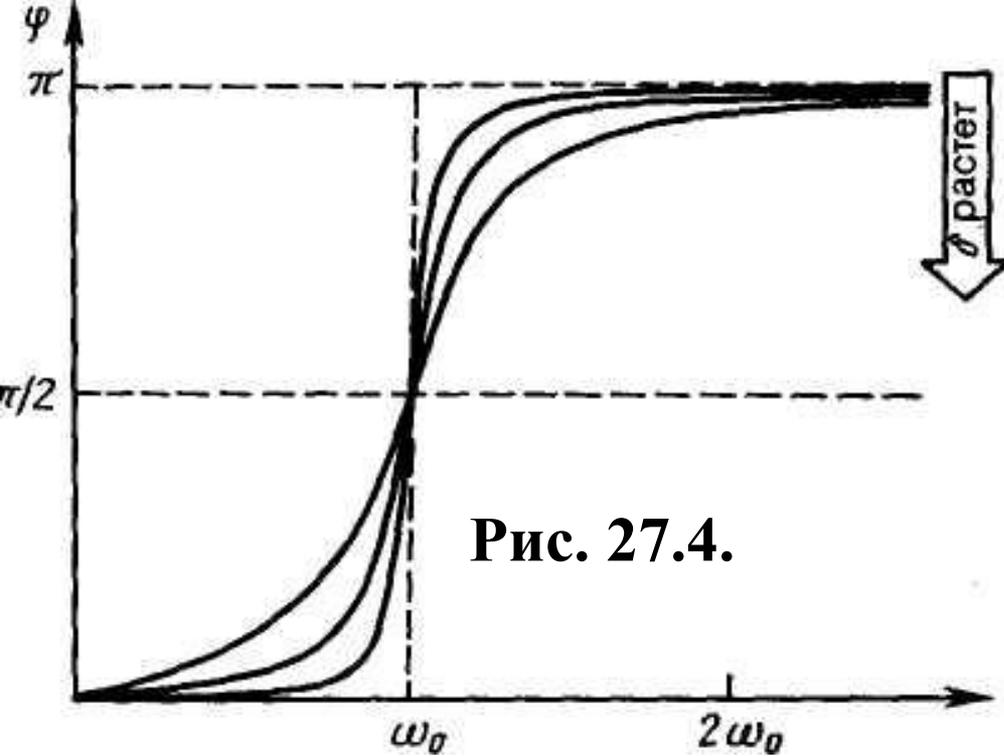


Рис. 27.4.

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в

противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, оборудование, воспринимающее электрические колебания, основаны на явлении резонанса.

