

Розділ 1.

Теорія випадкових подій

1. *Основні поняття теорії імовірностей. Операції над подіями.*
 2. *Поняття імовірностей. Класичне, статистичне та аксіоматичне визначення імовірності. Імовірний простір.*
 3. *Умовні імовірності. Формули добутку імовірностей.*
 4. *Формули повної імовірності та Байєса.*
 5. *Повторні випробування. Формула Бернуллі. Локальна теорема Лапласа.*
- 

Перші роботи, в яких виникли основні поняття теорії імовірностей, з'явилися у XV–XVI ст. як спроба побудови теорії азартних ігор і належать таким видатним ученим, як Б. Спіноза, Дж. Кардано, Галілео Галілей.

Наступний етап (кінець XVII — початок XVIII ст.) розвитку теорії імовірностей пов'язаний з роботами Б.Паскаля, П. Ферма (знаменита переписка), Х.Гюйгенса (1657р. перша книга з ТІЙ «О расчетах в азартной игре»), К.Гаусса, Я. Бернуллі та Н.Бернуллі (1713р. «Искусство предположения» перші теоретичні обґрунтування накопичених раніше фактів, класичне визначення імовірності), С.Пуассона, А.Муавра (ввів терміни незалежність подій, математичне сподівання, умовна імовірність), П.Лапласа, Т.Байєса.

В XIX ст. теорію імовірностей почали успішно застосовувати у страховій справі, артилерії, статистиці.

Лише наприкінці XIX ст. П.Л.Чебишов та його учні А.А. Марков та А.М.Ляпунов перетворили теорію імовірностей у математичну науку.





1.1. Основні поняття теорії імовірностей. Операції над подіями

Предмет теорії імовірностей

Розглянемо деякий дослід, у результаті якого може з'явитись або не з'явитись подія A .

Прикладами такого дослідів можуть бути:

- а) дослід — виготовлення певного виробу, подія A — стандартність цього виробу;
- б) дослід — кидання монети, подія B — випав герб;
- в) дослід — стрільба п'ятьма пострілами у мішень, подія C — вибито 30 очок;
- г) дослід — введення програми у комп'ютер, подія D — безпомилковий ввід.

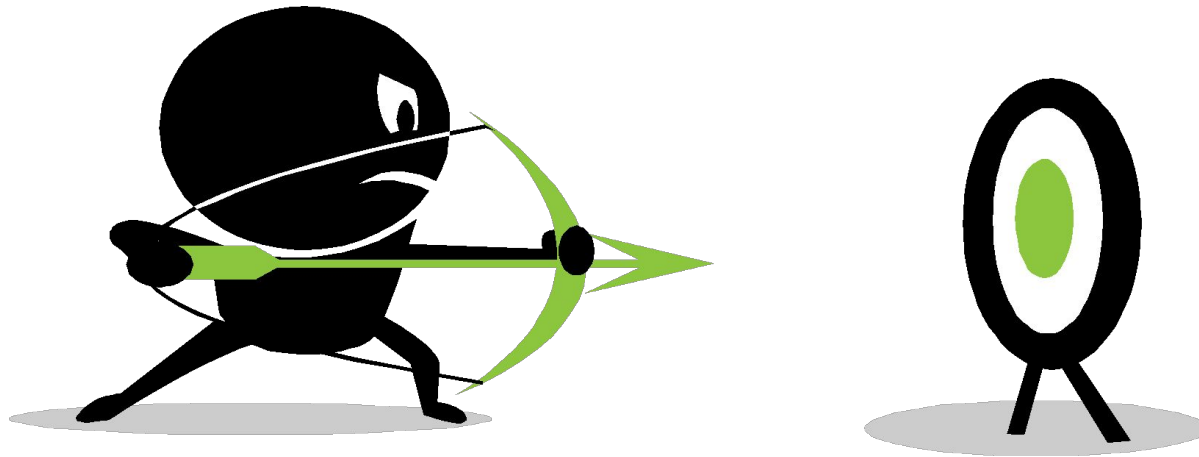


- **Випробуванням** називається експеримент, який можна проводити в однакових умовах (принаймні теоретично) будь-яке число разів.
- Найпростіший результат випробування називається **елементарною подією** або **наслідком**. При випробуванні обов'язково настає лише один наслідок.

Приклад. Стрілок робить постріл по мішені, що розділена на чотири області.

Постріл – це випробування.

Влучення в певну область мішені – подія.



Приклад. В урні знаходяться кольорові кулі. З урни навмання беруть одну кулю.

Виймання кулі – це випробування.

Поява кулі певного кольору – подія.





Події бувають достовірні, випадкові та неможливі.

- ▣ **Достовірною** називають таку подію, яка при розглянутих умовах обов'язково трапиться.
- ▣ **Неможливою** називають таку подію, яка при розглянутих умовах не може трапитись.
- ▣ **Випадковою** називають таку подію, яка при умовах, що розглядаються, може трапитися, а може й не трапитися.

Приклад.

Якщо в урні є лише білі кулі, то добування білої кулі з урни — достовірна подія, а добування з цієї урни кулі іншого кольору — неможлива подія.

Якщо кинути монету на площину, то поява герба буде випадковою подією, тому що замість герба може з'явитися надпис.

Випадкові події позначають великими літерами, наприклад

$$A, B, C, D, X, Y, A_1, A_2, \dots, A_n.$$

Кожна випадкова подія є наслідком багатьох випадкових або невідомих нам причин, які впливають на подію. Тому неможливо передбачити наслідок одиночного випробування.

Але якщо розглядати випадкову подію багато разів при однакових умовах, то можна виявити певну закономірність її появи або не появи. Таку закономірність називають *імовірною закономірністю масових однорідних випадкових подій*.



- ✓ У теорії імовірностей під *масовими однорідними випадковими подіями* розуміють такі події, які здійснюються багатократно при однакових умовах або багато однакових подій.

Наприклад, кинути одну монету 1000 разів або 1000 однакових монет кинути один раз в теорії імовірностей вважають однаковими подіями.

- ✓ Предметом теорії імовірностей є вивчення імовірностних закономірностей масових однорідних випадкових подій.



Алгебра випадкових подій

- Події називають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Приклад. Серед однорідних деталей у ящику є стандартні та нестандартні. Навмання беруть із ящика одну деталь.

Події

A — взята стандартна деталь,

B — взята нестандартна деталь

несумісні тому, що одна деталь не може бути одночасно стандартною та нестандартною.



- Події називають *сумісними*, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших.

Приклад. Два стрільця стріляють у мішень.

Події

A_1 — перший стрілок влучив у мішень,

A_2 — другий стрілок влучив у мішень

будуть сумісними випадковими подіями.



- Випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють ***повну групу подій***, якщо вони попарно несумісні і внаслідок випробування одна з них з'явиться обов'язково.

Приклад. Кидають шестигранний кубик.

Позначимо події так:

A_1 — випала грань 1;

A_2 — випала грань 2;

A_3 — випала грань 3;

A_4 — випала грань 4;

A_5 — випала грань 5;

A_6 — випала грань 6.



Події $A_1, A_2, \dots, A_6$ утворюють повну групу.

Приклад. Стрілок стріляє у мішень.

Події

A_1 — стрілок влучив у 1 коло мішені,

A_2 — стрілок влучив у 2 коло мішені.



Події A_1 та A_2 не утворюють повної групи.

Але якщо позначити A_0 подію, що стрілок не влучив у мішень, тоді події A_0 , A_1 та A_2 утворюють повну групу.



- Події називають *рівноможливими*, якщо немає причин стверджувати, що будь-яка з них можливіша за інші.

Приклад. Події — поява 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок при киданні шестигранного кубика — рівноможливі при умові, що центр його ваги не зміщений.





- Дві несумісні події, які утворюють повну групу, називають *протилежними*.

Подія, протилежна події A , позначається $\square A$.

Приклад. Якщо позначити через A подію, що при стрільбі по мішені вибито 8 очок, то подія $\square A$ — при стрільбі по мішені вибито будь-яке інше число очок.



Тепер розглянемо важливе поняття *простору елементарних наслідків*.

Нехай виконується деякий експеримент, який має елементи випадковості. Кожне випробування може мати різні наслідки.

Так, при киданні монети можуть бути два можливих наслідки: герб або надпис.

При киданні грального кубика можуть бути шість можливих наслідків.

У випробуванні «постріл у мішень» можна розглядати такі наслідки, як влучення у мішень, або кількість вибитих очок, або координати точки влучення.

Отже, що приймати за наслідок випробування,
● залежить від умови задачі.



- **Елементарними наслідками** називають такі події, які неможливо розділити на більш прості.
- Множину усіх можливих елементарних наслідків називають **простором елементарних наслідків**.
- ✓ Простір елементарних наслідків може містити кінцеву, злічену або незлічену множину елементів.

У ролі елементарних наслідків можна розглядати точки n -вимірного простору, відрізок деякої лінії, точки поверхні S або об'єму V трьохвимірного простору, функцію однієї або багатьох змінних.
- ✓ У більшості випадків припускають, що елементарні наслідки рівноможливі.

Приклади.

а) При двократному киданні монети простір елементарних наслідків містить 4 точки

$\{(Г, Г), (Г, Н), (Н, Г), (Н, Н)\},$

де $Г$ — означає появу герба,

$Н$ — появу надпису.



Приклади.

б) Нехай по мішені стріляють одиночними пострілами до першого влучення. Можливі такі елементарні події

w_1 {влучення при першому пострілі},

w_2 {влучення при другому пострілі},

w_3 {влучення при третьому пострілі} і т.д.

У цьому випадку простір елементарних наслідків може мати нескінченну кількість точок, які можна шляхом нумерації перелічити. Тому простір елементарних наслідків буде зліченим.

Приклади.

в) При виробництві кінескопів виникають неоднакові умови технологічного процесу, тому час роботи кінескопа відрізняється від його номінального значення, тобто буде випадковою подією.

Простір елементарних наслідків у цьому випадку буде нескінченною незліченою множиною, елементи якої неможливо пронумерувати.



Операції над подіями

Нехай A та B — випадкові події.

□ **Об'єднанням (сумою) випадкових подій $A \cup B$**
(або $A + B$) називають таку випадкову подію, яка
полягає у появі подій

A або B або A та B .

Якщо A та B — несумісні, то $A \cup B$ означає появу
події A або події B .

Аналогічно визначають об'єднання (суму) більшої кількості випадкових подій.

□ *Об'єднанням (сумою) випадкових подій*

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

називають таку випадкову подію, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій.

Якщо події попарно несумісні, то їх сума полягає в тому, що повинна з'явитися подія A_1 або A_2 ... або A_n . Нескінченну суму випадкових подій позначають

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

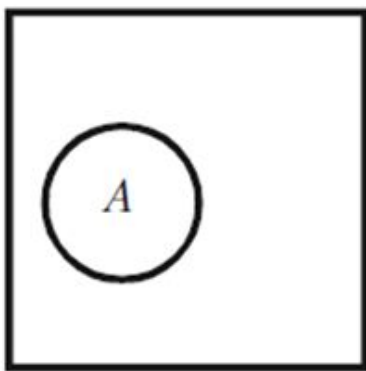
Приклад. Стрілок робить один постріл у мішень, поділену на три області. Позначимо подія A_1 — влучення в першу область; подія A_2 — влучення у другу область; подія A_3 — влучення в третю область; подія A_4 — немає влучення у мішень; подія B — влучення в першу або другу області; подія D — влучення хоча б в одну область мішені.

Тоді маємо $B = A_1 \cup A_2$; $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

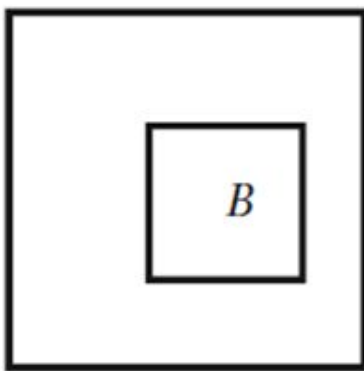
В цьому прикладі події A_1 , A_1 , A_3 та A_4 — несумісні.



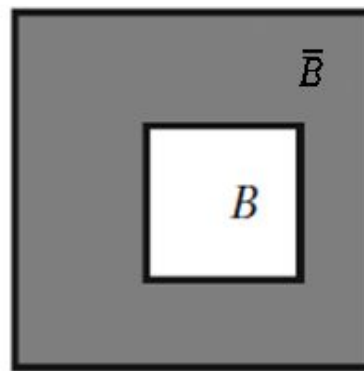
□ **Різницею** $B \setminus A$ (або $B - A$) двох випадкових подій B , A називають усі наслідки, які полягають у тому, що подія B з'являється, а подія A не з'являється.



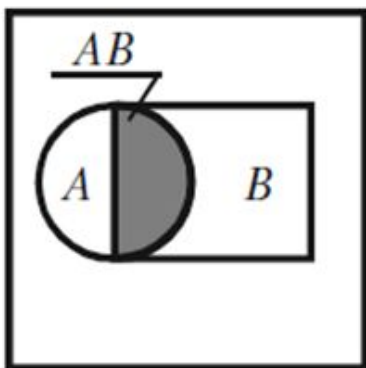
а)



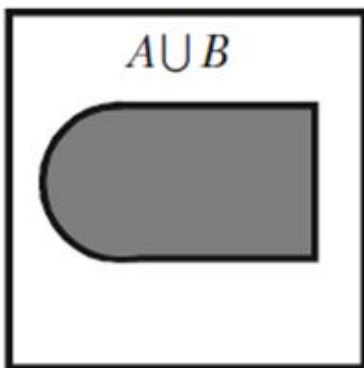
б)



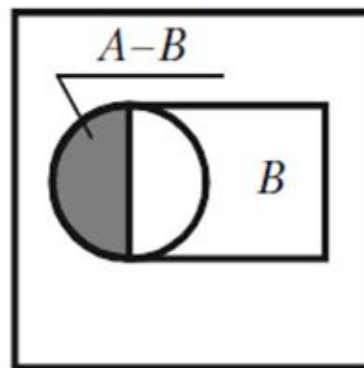
в)



г)



д)



е)



□ *Добутком (перетином) $A \cdot B$ (або $A \cap B$)*

випадкових подій A, B називають таку випадкову подію, яка полягає у появі подій A та B одночасно.

Якщо A та B — несумісні, то добуток $A \cdot B$ є множина, яка не має жодного елемента. Така множина називається порожньою і позначається $\emptyset$.

Таким чином, у разі несумісності подій A, B маємо

$$A \cdot B = A \cap B = \emptyset.$$

□ **Добутком (перетином) скінченої кількості випадкових подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, називають таку випадкову подію, яка полягає у сумісній появі усіх цих подій одночасно.**

Подія $\bigcap_{k=1}^n A_k$

означає, що розглядаються усі події A_k ($k=1, 2, \dots, n$) одночасно.

Приклад. Стрілець стріляє двічі по мішені. Описати простір елементарних наслідків. Записати подію, яка полягає в тому, що:

- а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C);
- б) стрілець влучив рівно один раз (подія D);
- в) стрілець не влучив у мішень (подія F).

Розв'язок. Позначимо

подія A — влучення при першому пострілі,

подія B — влучення при другому пострілі.

Простір елементарних наслідків складається з чотирьох подій

$$\{A B, A \square B, \square A B, \square A \square B\}.$$

а) Якщо стілець влучив у мішень принаймні один раз, то це означає, що він влучив або при першому пострілі $A \square B$, або при другому пострілі $\square A B$, або при обох $A B$.

$$\{A B, A \square B, \square A B, \square A \square B\}$$

Тобто, $C = A B \cup \square A B \cup A \square B.$

б) Рівно одне влучення може бути тільки тоді, коли стрілець при першому пострілі влучив, а при другому — ні, або при першому пострілі не влучив, а при другому — влучив.

$$\{A B, \textcolor{red}{A} \square \textcolor{red}{B}, \square \textcolor{red}{A} \textcolor{red}{B}, \square A \square B\}$$

Тому, $D = A \square B \cup \square A B .$

в) Якщо стрілець не влучив у мішень, то це означає, що він не влучив при обох пострілах,

$$\{A \rightarrow B, A \rightarrow \neg B, \neg A \rightarrow B, \neg A \rightarrow \neg B\}$$

Тобто, $F = \neg A \rightarrow \neg B$.

Резюме:

- ✓ Теорія імовірностей вивчає математичні моделі експериментів з випадковими результатами (наслідками).
- ✓ Будь-який результат інтерпретується як випадкова подія, яка може відбутися або не відбутися в результаті експерименту.
- ✓ Випадкові події можна порівнювати між собою за певною мірою можливості їх появи.
- ✓ Імовірністю випадкової події і називають деяку чисельну міру об'єктивної можливості появи випадкової події.