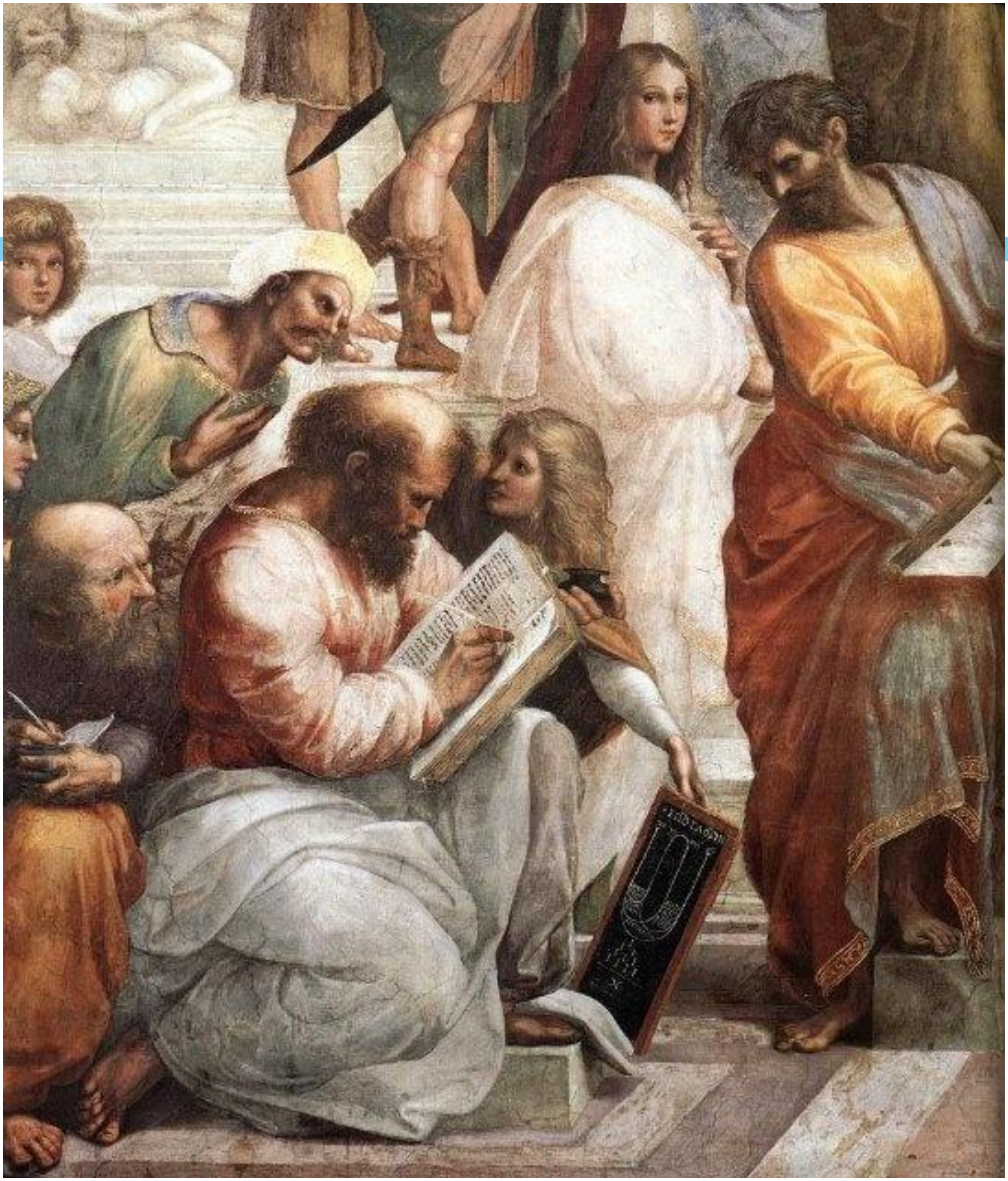
Применение теоремы Пифагора и пифагоровых троек для решения геометрических задач.



Объект исследования:

Теорема Пифагора и пифагоровы тройки.

Предмет исследования:

Применение пифагоровых троек для быстрого решения геометрических задач.

- ***Цель:*** Собрать сведения о пифагоровых тройках и их применения для решения практических задач курса геометрии и задач ЕГЭ типа В 4..
- ***Гипотеза:*** Мы сможем найти способы быстрого решения геометрических задач и заданий ЕГЭ типа В 4, если будем знать приемы формирования пифагоровых триад и применять таблицы пифагоровых троек.

Задачи:

- 1. Показать уникальность открытия Пифагора и дать определение понятия пифагоровых троек .
- 2. Описать простые способы формирования пифагоровых троек.
- 3. Проанализировать возможности применения теоремы Пифагора, применения полученных знаний о пифагоровых тройках для их практического применения при решении задач.

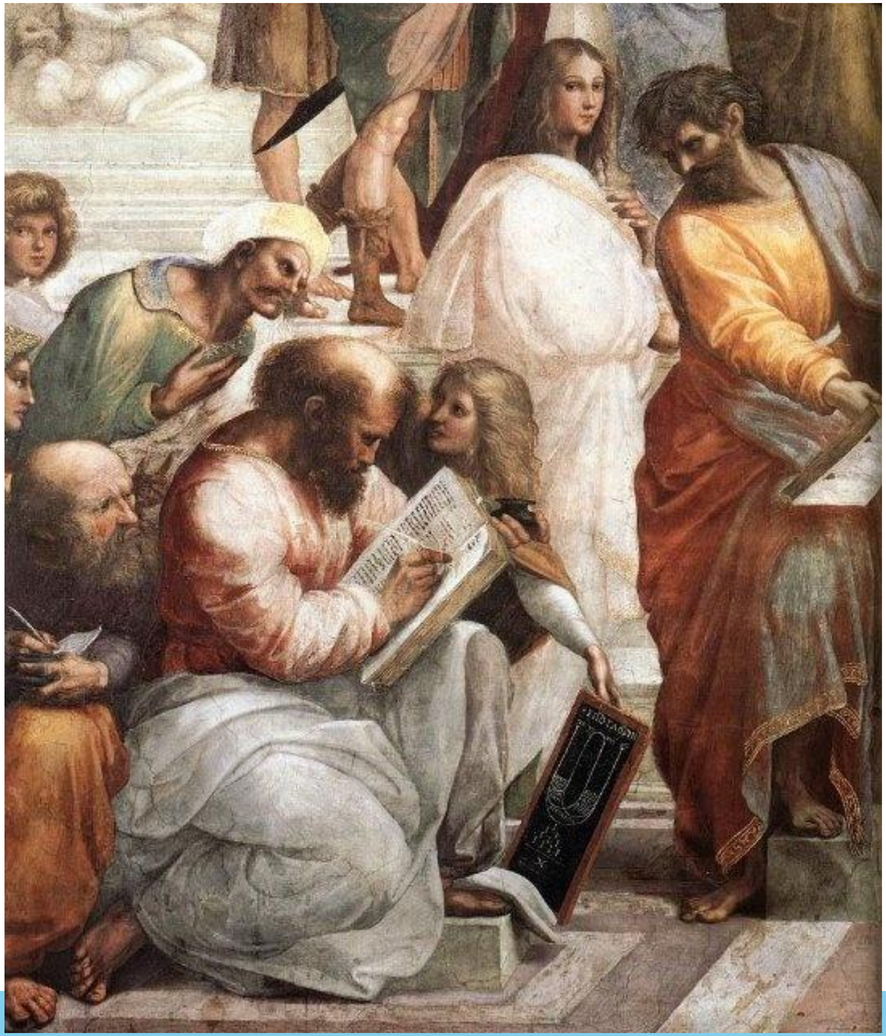
Методы исследования:

- методы теоретического исследования (анализ литературы, поиск источников);
- анализ ряда задач учебника геометрии 7-9 класса;
- методы эмпирического исследования (изучение опыта решения геометрических задач, нахождение рациональных способов).

Практическая значимость исследования определяется:

- проведением исследования по проблеме формирования пифагоровых троек (описание простых способов)
- описанием опыта применения знаний о пифагоровых тройках;
- разработкой рекомендаций ученикам 8-11 класса при решении задач, материалы исследования могут быть использованы учениками и учителями при преподавании курса геометрии.

Глава 1. Теорема Пифагора и пифагоровы тройки
1.1 Биография Пифагора

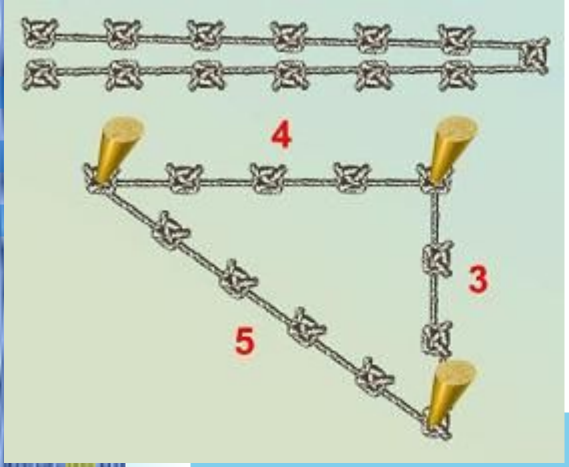


- *Пифагор Самосский* — древнегреческий философ и математик, создатель религиозно-философской школы пифагорейцев

1.3 Пифагоровы тройки и способы их формирования

- Пифагоровы тройки – это тройки (x, y, z) натуральных чисел x, y, z, для которых выполняется равенство

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (1)$$



Способ **1.**

- Обычно пользуются таким приемом подбора решений: произвольные взаимно простые числа m и n, $(m,n)=1$, $m > n$ одно из них четное, а другое нечетное, и формируют триаду
  $\boldsymbol{(m^2 - n^2;\ 2mn;\ m^2 + n^2)}$ (1)

- Триаду (a, b, c) принято называть ***примитивной*** (основной), если a и b – взаимно простые числа, т. е. $(a, b) = 1$ формула $\boldsymbol{(m^2 - n^2;\ 2mn;\ m^2 + n^2)}$ дает все возможные примитивные триады.

2. Следующий приём возник из наблюдений над некоторыми свойствами триад.

а) Пусть первое число триады (длина одного катета) – нечетное, тогда, например, для триады

(3; 4; 5) наблюдаем: $3^2 = 4+5$,

(5; 12; 13) наблюдаем: $5^2 = 12+13$,

(7; 24; 25) - $7^2 = 24+25$ и т. д.

А

Эти наблюдения показывают приём подбора: **взять <u>нечетное</u> число , возвести его в квадрат и результат представить в виде суммы двух последовательных чисел; слагаемые будут вторым и третьим членами триады.**

- Пример: триада (13;84;85),
  $13^2 = 84+85$
  действительно $13^2 + 84^2 = 85^2$.

б) пусть первое число триады – четное. Тогда, например, для триады **(3; 4; 5)** наблюдаем: **$4=2(3+5)$,** для триады **(8;15; 17)** **$8=2(15+17)$** и т. д.

Наблюдения показывают прием подбора:

- **Взять число, кратное 4, его квадрат разделить на 2 и результат представить как сумму двух последовательных нечетных чисел; слагаемые будут вторым и третьим членами триады.**
- **Пример: (16; 63; 65) $16^2=2(63+65)$**

Свойства пифагоровых троек

Свойство 1. Числа, входящие в простейшую пифагорову тройку, попарно взаимно просты.

- Действительно, если два из них, например *x* и *y* имеют простой общий делитель *p*, то из равенства (1) следует, что на *p* делится и третье число *z*. Это противоречит тому, что тройка – простейшая.
- **Следствие.** В простейшей пифагоровой тройке только одно число может быть чётным.
- **Свойство 2.** В простейшей пифагоровой тройке числа *x* и *y* не могут быть одновременно нечётными.

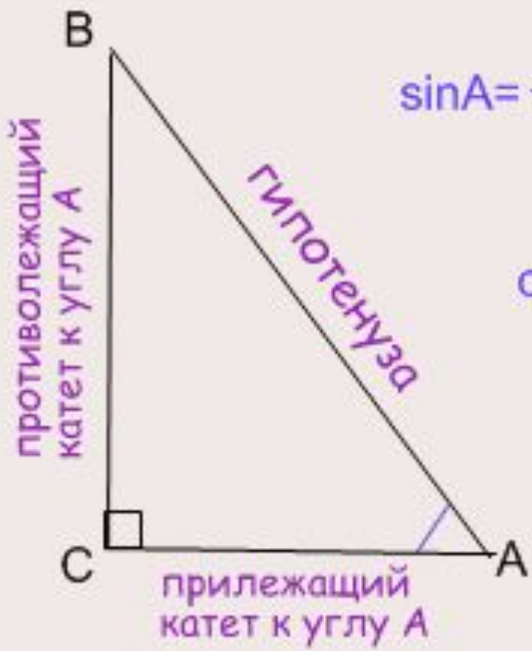
Свойство 3.

- Из данного пифагорова треугольника со сторонами *(a, b, c)* можно получить бесконечное множество подобных ему треугольников со сторонами *(ka, kb, kc)* , где *k* – произвольное натуральное число.

Таблица **1.** Примитивные пифагоровы тройки для $m \le 10$

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	4	3	5	8	1	16	63	65
3	2	12	5	13	8	3	48	55	73
4	1	8	15	17	8	5	80	39	89
4	3	24	7	25	8	7	112	15	113
5	2	20	21	29	9	2	36	77	85
5	4	40	9	41	9	4	72	65	97
6	1	12	35	37	9	8	144	17	145
6	5	60	11	61	10	1	20	99	101
7	2	28	45	53	10	3	60	91	109
7	4	56	33	65	10	7	140	51	149
7	6	84	13	85	10	9	180	19	181

Рассмотрим решение заданий, содержащихся в открытом банке заданий (адрес сайта **http://mathege.ru/or/ege/**).



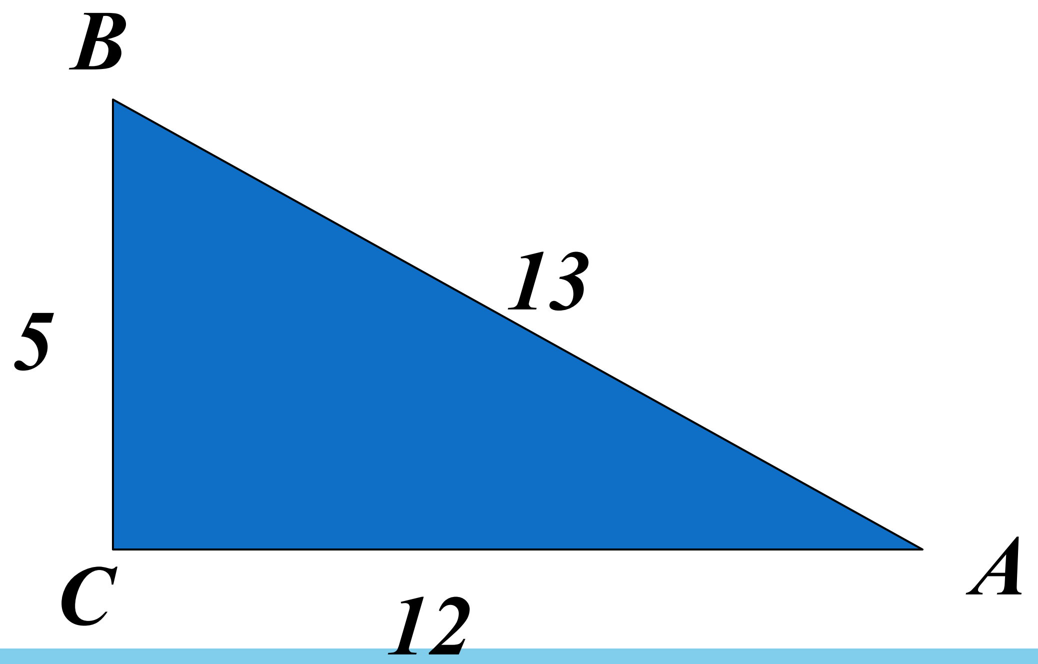
$$\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\cos A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

$$\mathrm{tg} A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$$

Задание B4 ЕГЭ

Задание B4 (№ 4595) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos B = \frac{5}{13}$, $AB = 13$. Найдите AC.



Задачи на нахождении тангенса острого угла

Задание B4 (№ 4609) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 10$, $AC = 8$. Найдите tgA.

- В этом задании сразу угадывается тройка (6, 8, 10). Остается только по рисунку определить отношение противолежащего катета углу А к прилежащему. tgA= 6/10= 0,6

Более сложными являются задачи вида: (№ 4637)

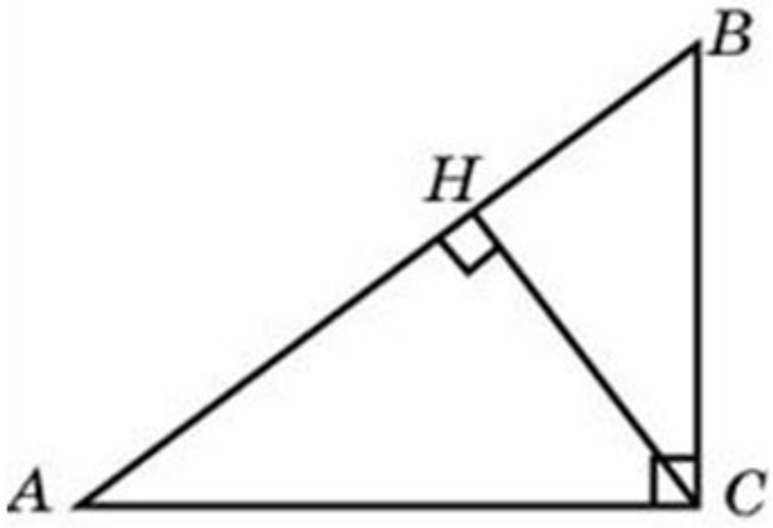
В треугольнике АВС угол С равен 90°, $\sin A = \frac{7}{8}$, $AC = \sqrt{15}$.

Найдите АВ.

- Решение: Быстрый способ решения основан на понимании того факта, что синус угла это есть отношение сторон треугольника и следовательно стороны его можно задать как АВ = 8х, ВС (противолежащий катет) = 7х. АС = √15.
- По теореме Пифагора, $(8x)^2=(7x)^2+(\sqrt{15})^2$,
- решая уравнение найдем х = 1 и тогда гипотенуза АВ = 8.

При решении заданий обращаем внимание, на то что подсказкой для использования той или иной «тройки» является значение синуса, косину и тангенса, обязательно необходим чертеж для решения заданий.

Задание В4 (№ 4811) В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\sin A = \frac{3}{5}$, $AC = 4$. Найдите высоту CH.



Заключение

- Пифагоровы тройки находят прямое применение в проектировании множества вещей, окружающих нас в повседневной жизни. А умы учёных продолжают искать новые варианты доказательств теоремы Пифагора.

Спасибо за внимание