Решение краевых задач для уравнений эллиптического вида методом функций Грина

Свойства гармонических функций

Вторая формула Грина

Сущность метода функции Грина решения эллиптических уравнений

Свойства функций Грина

Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right)$$

$$\Delta u = 0 \qquad\qquad \Delta u = -f$$

уравнение Лапласа уравнение Пуассона

потенциальное течение жидкости

$\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi$ Если отсутствуют источники, то $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$

$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 0$ $\Delta\varphi = 0$, уравнение Лапласа

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с объемной плотностью $\mathbf{j}(x, y, z)$. Если в среде нет объемных источников тока, то $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$

закон Ома $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{j}}{\lambda}$ где λ — проводимость среды.

$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \qquad (\mathbf{j} = -\lambda\operatorname{grad}\varphi) \qquad \Delta\varphi = 0$

уравнение Лапласа

Свойства гармонических функций
Вторая формула Грина.

уравнение ***Лапласа*** $\Delta u = 0$

Его решения – ***гармонические функции***

Пусть функции ***u(M)*** обладают следующими свойствами:

1. непрерывны вместе частными производными второго порядка в области ***D,*** ограниченной поверхностью ***S***, кроме конечного числа точек.
2. интегрируемы вместе с частными производными первого порядка в области ***D***.
3. имеют интегрируемые в области ***D*** частные производные второго порядка

По *первой формуле Грина*

$$R[u,v] = -\int vL[u]dV = \int k(\nabla v, \nabla u)dV + \int qvudV - \int_S kv\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

Здесь $L[u] = div(k\nabla u) - qu$

Вычитая $R[u,v] - R[v,u]$ получим *вторую формулу Грина*

$$\int \{vL[u] - uL[v]\}dV = \int_S k\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma$$

Для задачи на числовой прямой 1D *вторая формула Грина* имеет вид

$$\int_0^l \{vL[u] - uL[v]\}dx = k\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_0^l$$

Следствие

Для уравнения $L[u] = div(k\nabla u) = f(M)$ во *второй формуле Грина* положим $v \equiv 1$ получим

$$\int_S k\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \int f(M)dV$$

Для двусвязной области, ограниченной концентрическими сферами S_R и S_{R1} $(R_1 < R)$ с центром в точке ***P***

$$\int\{vL[u] - uL[v]\}dV = \int_{S_R} k\left(v\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial v}{\partial r}\right)d\sigma_R - \int_{S_{R1}} k\left(v\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial v}{\partial r}\right)d\sigma_{R1}$$

для S_{R1} учтено, что . $\dfrac{\partial}{\partial n} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$

Определение

Функция $u(M)$ *называется **гармонической** в **D**, если она непрерывна и удовлетворяет уравнению **Лапласа*** $\Delta u = 0$ *в области **D**.*

В трёхмерном пространстве (***3D***) $u(M) = {}^{1}/_{r_{\text{MP}}}$

является ***гармонической*** всюду, кроме точки, где $r_{\text{MP}} = 0$

В двухмерном пространстве (***2D)*** $u(M) = ln\left({}^{1}/_{r_{\text{MP}}}\right)$

является ***гармонической*** всюду, кроме точки, где $r_{\text{MP}} = 0$

Функции ${}^{1}/_{r_{\text{MP}}}$ *и* $ln\left({}^{1}/_{r_{\text{MP}}}\right)$ называются ***фундаментальными решениями уравнения Лапласа.***

Для гармонических функций $$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0$$

Теорема (о среднем)

Значение в центре ***Р*** *шаровой области* D_R функции $u(M)$, *гармонической в* D_R *и непрерывной вместе с частными производными первого порядка в* $\overline{D_R} = D_R + S_R$ *равно среднему арифметическому её значению на сфере* S_R

$$u(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} u(M) d\sigma$$

Доказательство

Воспользуемся формулой

$$\int\{vL[u]-uL[v]\}dV=\int_{S_R}k\left(v\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial v}{\partial r}\right)d\sigma_R-\int_{S_{R1}}k\left(v\frac{\partial u}{\partial r}-u\frac{\partial v}{\partial r}\right)d\sigma_{R1}$$

полагая в ней $L[u]\equiv\Delta u$ $\quad k(M)\equiv 1$ $\quad v(M)={}^{1}/_{r_{\text{MP}}}$

Качестве $u(M)$ возьмём функцию, гармоническую в D_R. При этих условиях интеграл по D_R равен нулю, а интегралы по S_R и S_{R1} также равны нулю

$$\int_{S_R}u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_R-\int_{S_{R1}}u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)d\sigma_{R1}=0$$

Вычисляя производные и применяя к последнему интегралу теорему о среднем значении интеграла, получим

$$\frac{1}{R^2}\int_{S_R} u(M)d\sigma_R = \frac{1}{R_1^2}4\pi R_1^2 \cdot u(M^*) \qquad M^* \in S_{R1}$$

устремляя *R1* к нулю, получим формулу

$$u(P) = \frac{1}{4\pi \mathrm{R}^2}\int_{S_R} u(M)d\sigma$$

Для двумерного пространства **2D**

$$u(P) = \frac{1}{2\pi \mathrm{R}}\int_{C_R} u(M)dl$$

Здесь C_R - окружность с центром в точке P и в формуле

$$v(M) = ln\left({}^{1}/_{r_{\mathrm{MP}}} \right)$$

Теорема (о наибольшем и наименьшем значении гармонической функции)

Функция $u(M)$, ***гармоническая*** *в области* ***D*** *и непрерывная вместе с частными производными первого порядка в* $\bar{D} = D + S$ *достигает своего* ***наибольшего*** *и* ***наименьшего*** *значения на границе* ***S.***

Доказательство

Если $u(M) = constant$ в области ***D*** то справедливость теоремы очевидна.

Положим что $u(M) \neq constant$ в области ***D*** . Обозначим H_S наибольшее значение функции на ***S*** и H_D наибольшее значение функции на $\bar{D}$. Надо доказать, что $H_S = H_D$

Предположим, что это неверно.

Пусть тогда $H_S < H_D$ и в некоторой точке M_0 $M_0 \in D$ $u(M_0) = H_D$

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$v(M) = u(M) + \frac{H_D - H_S}{2d^2}[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]$$

где, d - диаметр области D, т.е. верхняя граница расстояний между точками области D; (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) - координаты точек M и Mo .

Тогда для всех точек $M \in D$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < d^2$

$$v(M_0) = u(M_0) = H_D$$

С другой стороны, в точках M границы области S имеем

$$v(M) < H_S + \frac{H_D - H_S}{2d^2} = \frac{H_D + H_S}{2} < H_D$$

Следовательно, непрерывная в $\overline{D}$ функция $v(M)$ должна достигать своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке M_1 области D. В этой точке должно быть $\Delta v \le 0$, так как в точке максимума ни одна из производных не может быть положительной. С другой стороны,

$$\Delta v = \Delta u + 3\frac{H_D - H_S}{\mathrm{d}^2} = 3\frac{H_D - H_S}{\mathrm{d}^2} > 0$$

Полученное противоречие заставляет отказаться от предположения, что $H_S < H_D$ следовательно, $H_S = H_D$

Применяя полученный результат к функции $u(M)$ -, мы получим доказательство теоремы и для наименьшего значения.

<u>Следствие</u> *Гармоническая в области* ***D*** *функция* $u(M)$ *, не равная тождественно постоянной, не может иметь локальных максимумов и минимумов внутри* ***D*****.**

Теорема *Решение первой внутренней краевой задачи*

$$\begin{cases} \Delta u = f(M) \\ u|_S = \varphi(P) \end{cases}$$

непрерывное в замкнутой области, $\overline{D} = D + S$, $M \in D$ $P \in S$ *единственно.*

Доказательство

Пусть две функции u_1 и u_2 являются решением рассматриваемой задачи.

Тогда их разность $u_3 = u_1 - u_2$ является гармонической в функцией, непрерывной в D и равной нулю на S .

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0 \\ u_3|_S = 0 \end{cases}$$

По теореме о наибольшем и наименьшем значении эта функция тождественно равна нулю.

Сущность метода функции Грина решения эллиптических уравнений.

Рассмотрим краевые задачи внутренние и внешние

$$\begin{cases} L[u] = f(M) & (9) \\ \left(\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial n} + \gamma_2 u\right)_S = 0 & (10) \end{cases}$$

в замкнутой области D причём, $\gamma_1(\mathrm{M})$ и $\gamma_2(\mathrm{M})$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ и ${\gamma_1}^2 + {\gamma_2}^2 \neq 0$

Метод функции Грина решения эллиптических уравнений заключается в том, что сначала решается специальная задача:

$$\begin{cases} L[G] = -\delta(M, P) & (11) \\ \left(\gamma_1 \frac{\partial G}{\partial n} + \gamma_2 G\right)_S = 0 & (12) \end{cases}$$

Решение этой специальной задачи называется *функцией Грина*.

Решение исходной задачи находится применением *второй формулы Грина* к функции Грина и искомому решению

$$\int \{GL[u] - uL[G]\}dV = \int_S k\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma \tag{13}$$

Используя уравнения (9) и (11) преобразуем (13)

$$\int \{f(M)G(M,P)\}dV + \int \{u(M)\delta(M,P)\}dV = \int_S k\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma \tag{14}$$

$$\boldsymbol{u(P) = \int_S k\left(G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right)d\sigma - \int \{f(M)G(M,P)\}dV}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta u = f(M)} \\ \boldsymbol{\left(\gamma_1\frac{\partial G}{\partial n} + \gamma_2 G\right)_S = \varphi(P)} \end{cases}$$

Для **первой** краевой задачи $\gamma_1 = 1;\ \gamma_2 = 0$ и из (14) получим решение искомой задачи (9) (10):

$$\boldsymbol{u(P) = \int_S k\left(\varphi(M)\frac{\partial G(M,P)}{\partial n}\right)d\sigma_M - \int \{f(M)\cdot G(M,P)\}dV_M}$$

Для **второй** краевой задачи $\gamma_1 = 0;\ \gamma_2 = 1$ и из (14) получим решение

искомой задачи (9) (10):

$$\boldsymbol{u(P) = \int_S k\big(G(M,P)\cdot\varphi(M)\big)d\sigma_M - \int \{f(M)\cdot G(M,P)\}dV_M}$$

Для **третьей** краевой задачи $\gamma_1 \neq 0;\ \gamma_2 \neq 0$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}G\Big|_S \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}u\Big|_S + \frac{\varphi(M)}{\gamma_2}\Big|_S$$

и из (14) получим решение искомой задачи (9) (10)

$$\boldsymbol{u(P) = \int_S k\frac{\varphi(M)}{\gamma_2}G(M,P)d\sigma_M - \int \{f(M)\cdot G(M,P)\}dV_M}$$

Свойства *функций Грина*

Свойство симметрии $G(M,P)=G(P,M)$

Применим вторую формулу Грина к функциям Грина $G_1(M,P)=G(M,P_1)$ и $G_2(M,P)=G(M,P_2)$, где P_1 и P_2 произвольные точки в области D

$$\int\{G_1L[G_2]-G_2L[G_1]\}dV=\int_S k\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)d\sigma$$

из уравнения

$$-\int\{G_1\delta(M,P_2)-G_2\delta(M,P_1)\}dV=G(P_1,P_2)-G(P_2,P_1)$$

$$G(P_1,P_2)-G(P_2,P_1)=\int_S k\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)d\sigma$$

интеграл в правой части равенства равен нулю.

Для первой и второй краевой задачи это очевидно, а для третьей

$$\int_S k\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial n}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial n}\right)d\sigma=-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}G_1G_2|_S+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}G_1G_2|_S\equiv 0$$

$$G(P_1,P_2),=G(P_2,P_1)$$

для всех точек из области D.

Исследование особенности функции Грина в точке *P*.

Ограничимся случаем $L[u] \equiv \Delta u$ Для этого случая функция Грина в точке ***P*** имеет для ***3D*** пространства особенность вида $\dfrac{1}{4\pi r_{MP}}$,

для ***2D*** пространства $\dfrac{1}{2\pi} ln\left(\dfrac{1}{r_{MP}}\right)$.

Из структуры уравнения $\Delta G = -\delta(M,P)$ можно предположить, что *функция Грина* будет иметь вид

$$G(M,P) = \varphi(r_{MP}) + v(M,P)$$

$v(M,P)$ гармоническая функция в D как функция M , а функция $\varphi(r_{MP})$

имеет особенность в т. *P*, т.е. при $r_{MP} = 0$ и должна удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = -\delta(M,P)$

Рассмотрим для определённости 3D случай. Обозначим через D_P^R

шаровую область с центром в т. *P*, ограниченную сферой S_P^R

Проинтегрируем тождество $\Delta\varphi \equiv -\delta(M,P)$ по области $D_P^R \in D$. Получим

$$\int_{D_P^R} \Delta\varphi dV_M = -1$$

$$\int_{D_P^R} \Delta\varphi dV_M = -1$$

По формуле Остроградского интеграл в левой части равен

$$\int_{S_P^R} \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\sigma_M = \int_{S_P^R} \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\sigma_M = -1$$

На сфере S_P^R функция $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ (как функция от r_{MP}) имеет постоянное значение, поэтому

$$\int_{S_P^R} \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\sigma_M = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r_{MP=R}} \int_{S_P^R} d\sigma_M = -1$$

или $4\pi R^2 \frac{\partial\varphi(R)}{\partial r} = -1$. Тогда $\varphi(R) = \frac{1}{4\pi R}$ а *функция Грина* имеет вид

$$\boldsymbol{G(M,P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} + v(M,P)}$$

и в т. P имеет особенность вида $\frac{1}{4\pi r_{MP}}$

Для плоскости (***2D***) функция Грина имеет вид

$$\boldsymbol{G(M,P) = \frac{1}{2\pi} ln\left(\frac{1}{r_{MP}}\right) + v(M,P)}$$

Функция $v(M,P)$ определяется как решение задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ \left(\gamma_1 \dfrac{\partial v}{\partial n} + \gamma_2 v\right)_S = -\dfrac{1}{4\pi}\left(\gamma_1 \dfrac{\partial\left(\frac{1}{\boldsymbol{r_{MP}}}\right)}{\partial n} + \gamma_2 \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r_{MP}}}\right)_S \end{cases}$$

Из определения *функции Грина* следует, что для ***3D***

$$\Delta\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r_{MP}}}\right) = -4\pi\delta(M,P)$$

и для ***2D***

$$\Delta \boldsymbol{ln}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r_{MP}}}\right) = -2\pi\delta(M,P)$$