



Геометрические задачи

по материалам ЕГЭ



Задачи

№1

Нахождение угла между плоскостью основания правильной пирамиды и прямой, соединяющей вершину основания с точкой пересечения медиан боковой грани.

№2

Нахождение тангенса угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$, в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1B_1C_1D_1$.

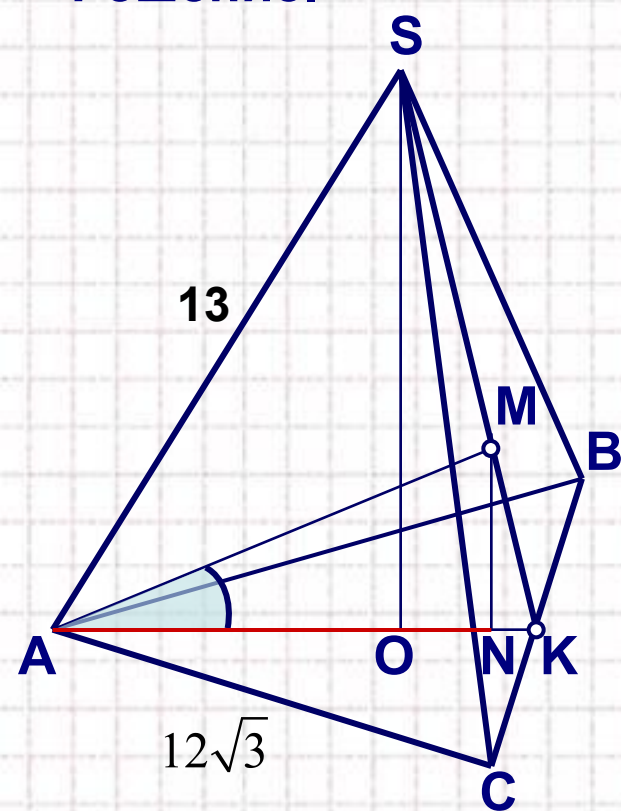
№3

Нахождение угла между плоскостью основания правильной пирамиды и прямой, соединяющей середины бокового ребра и ребра основания.

№
1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM , где M точка пересечения медиан грани SBC .

Решение.



Пусть K – середина ребра BC .

Прямая SK – апофема.

Прямая SO – высота пирамиды.

M – точка пересечения медиан грани SBC , поэтому $SM:MK = 2:1$.

Опустим из точки M перпендикуляр MN , тогда отрезок AN – проекция отрезка AM на плоскость основания.

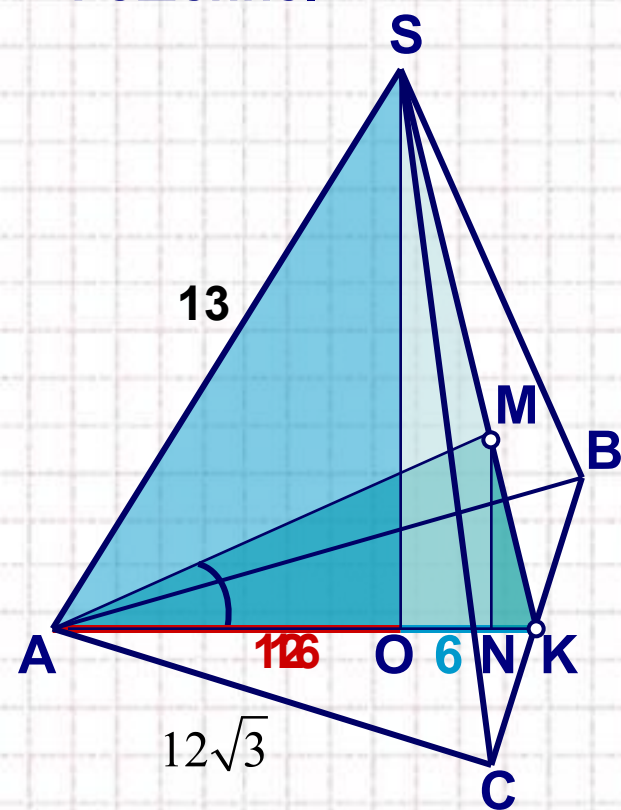
Угол MAN – искомый.

Его можно найти из прямоугольного треугольника MAN .

№
1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM , где M точка пересечения медиан грани SBC .

Решение.



Треугольник ABC - правильный, значит

$$AO = R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12, \quad OK = r = \frac{R}{2} = 6.$$

Из $\triangle SOA$: $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 144} = 5.$

$\triangle SOK \sim \triangle MNK$, $k = 3$. Тогда,

$$MN = \frac{1}{3}SO = \frac{5}{3}, \quad NK = \frac{1}{3}OK = 2, \quad ON = 4.$$

Из прямоугольного $\triangle MAN$, находим

$$\operatorname{tg}(\angle MAN) = \frac{MN}{AN} = \frac{5/3}{12 + 4} = \frac{5}{48}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg} \frac{5}{48}.$

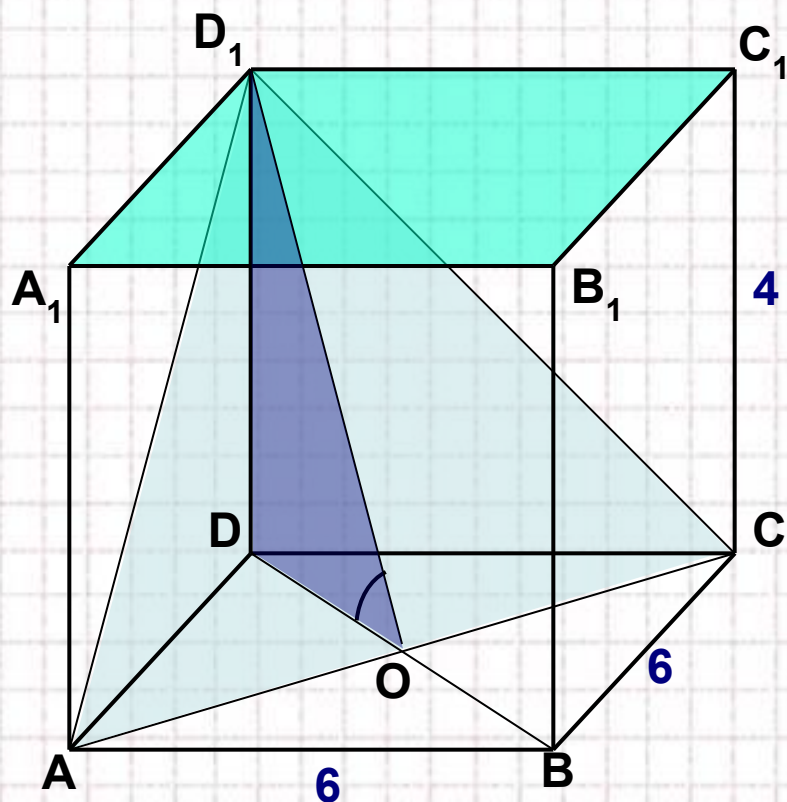
Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{5}{48}.$



№
2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Решение.



Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

- 1) Построим плоскость ACD_1 .
- 2) Вместо плоскости $A_1 B_1 C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC .
- 3) $ABCD$ – квадрат, диагонали $AC \cap BD$ в точке O , O – середина AC , $DO \perp AC$.

$$DO = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AD^2 + DC^2} = 3\sqrt{2}.$$
- 4) $D_1 O \perp AC$, так как $\triangle AD_1 C$ – равнобедренный, $AD_1 = D_1 C$.
- 5) Значит, $\angle D_1 O D$ – линейный угол искомого угла.
- 6) $\triangle D_1 D O$ – прямоугольный, тогда

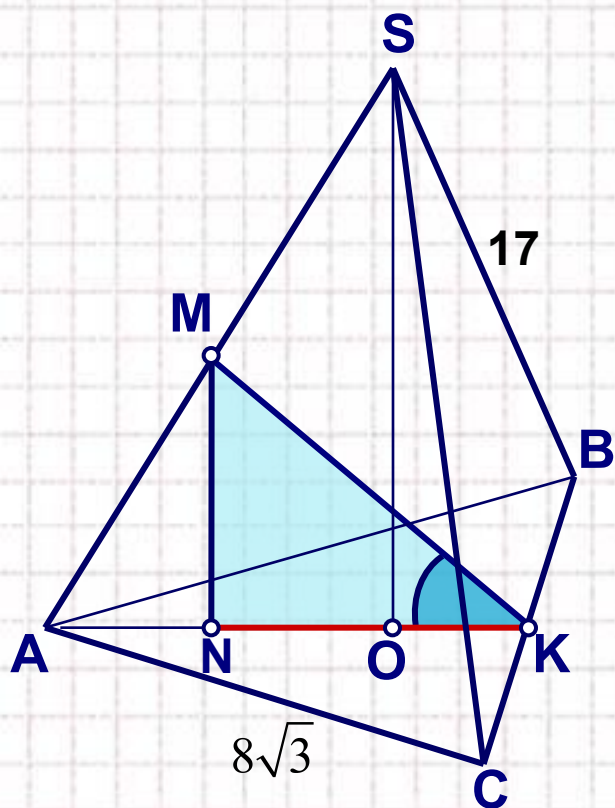
$$\operatorname{tg}(\angle D O D_1) = \frac{DD_1}{DO} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



№
3

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой проходящей через середины ребер AS и BC .

Решение.



Пусть точка K – середина ребра BC ,

Точка M – середина ребра AS .

MK – прямая, проходящая через точки M и K .

SO – высота пирамиды.

Опустим из точки M перпендикуляр MN ,
тогда отрезок KN – проекция отрезка KM
на плоскость основания.

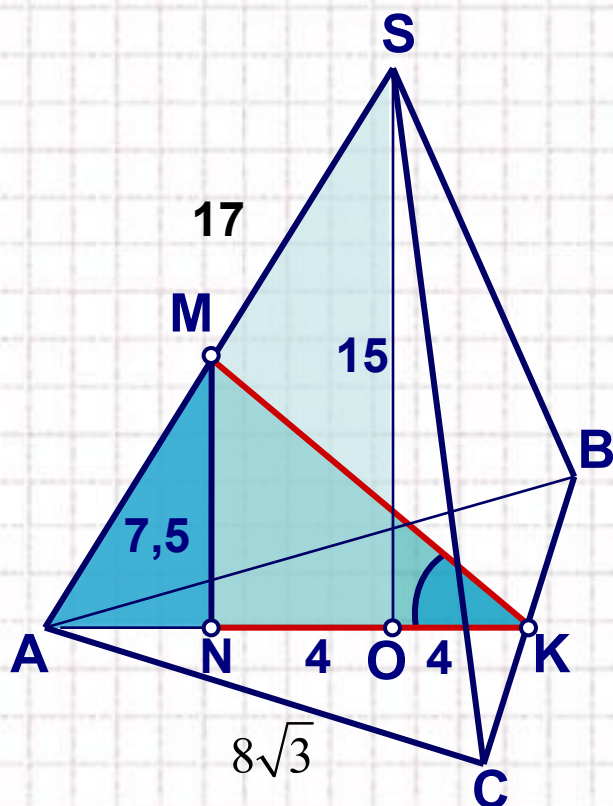
Угол MKN – искомый.

Его можно найти из прямоугольного
треугольника MKN .

№
3

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 8\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой проходящей через середины ребер AS и BC .

Решение.



Треугольник ABC - правильный, значит

$$AO = R = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8, \quad OK = r = \frac{R}{2} = 4.$$

$$\text{Из } \triangle SOA: SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{289 - 64} = 15.$$

$\triangle SOA \sim \triangle MNA$, т.к. $\angle A$ – общий, $\angle N = \angle O = 90^\circ$

$$k = 2, \text{ т.к. } M \text{ середина } AS, \text{ значит и } AN = NO = \frac{AO}{2} = 4,$$

$$MN = \frac{1}{2} SO = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Из прямоугольного $\triangle MKN$, находим

$$\operatorname{tg}(\angle MKN) = \frac{MN}{KN} = \frac{7,5}{4+4} = \frac{15}{16}.$$

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg} \frac{15}{16}.$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{15}{16}.$



Реши самостоятельно

№
1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $SC = 5$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MK , где K — середина ребра AC , а точка M делит ребро BS так что $BM:MS=3:1$.

Чертеж и подсказка

№
2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 8, а боковое ребро равно 6, найдите тангенс угла между плоскостями $BC_1 D$ и $A_1 B_1 C_1$.

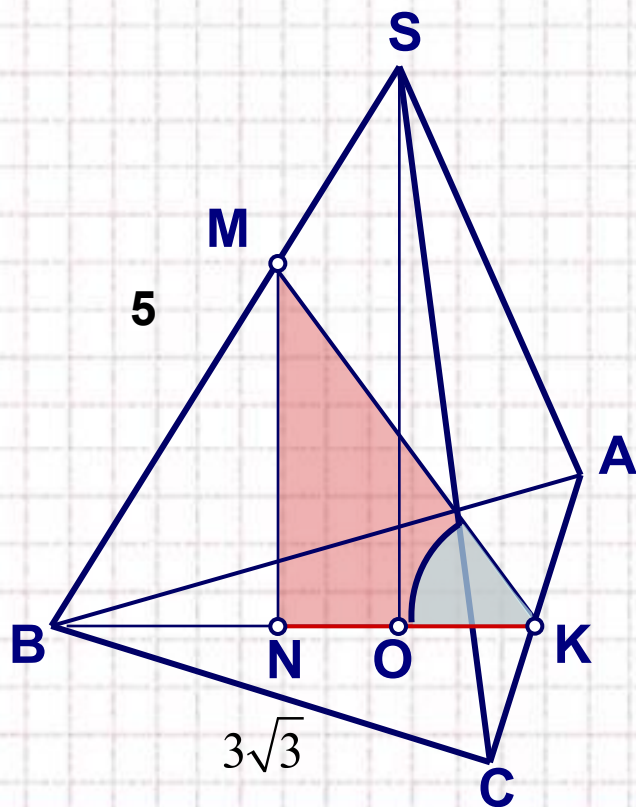
Чертеж и подсказка



Желаю удачи!

№
1

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 3\sqrt{3}$, $SC = 5$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой MK , где K – середина ребра AC , а точка M делит ребро BS так что $BM:MS=3:1$.



Пусть точка K – середина ребра AC .

SO – высота пирамиды.

Точка M – делит ребро BS так, что $BM:MS = 3:1$.

MK – данная прямая.

Опустим из точки M перпендикуляр MN , тогда отрезок NK – проекция отрезка MK на плоскость основания.

Угол MKN – искомый.

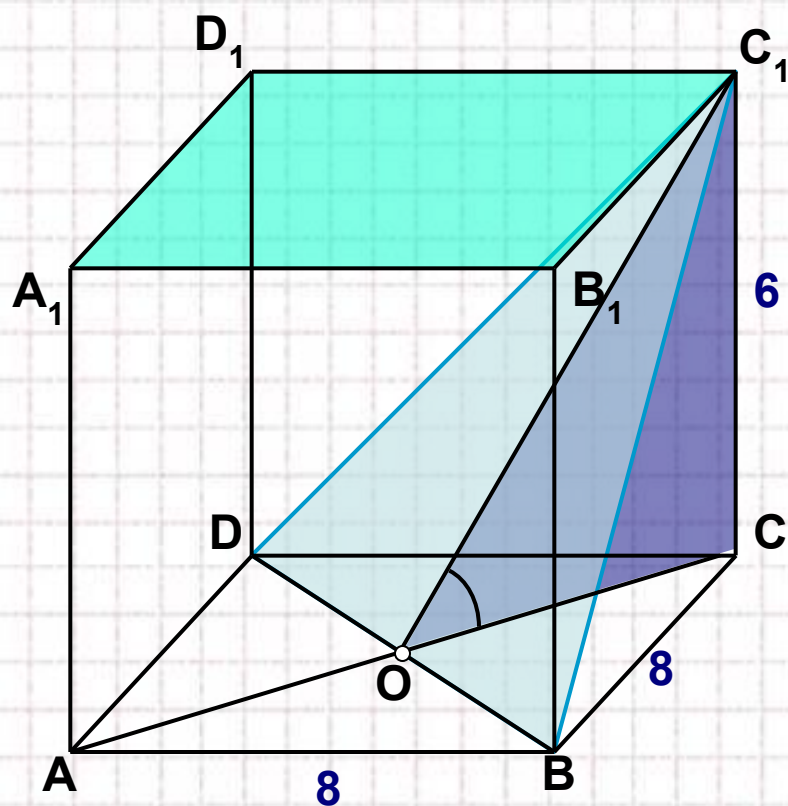
Его можно найти из прямоугольного треугольника MKN .

Ответ: $\arctg \frac{4}{3}$.



№
2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат со стороной 8, а боковое ребро равно 6, найдите тангенс угла между плоскостями $BC_1 D$ и $A_1 B_1 C_1$.



- 1) Построим плоскость $BC_1 D$.
- 2) Вместо плоскости $A_1 B_1 C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC .
- 3) $ABCD$ – квадрат, диагонали $AC \cap BD$ в точке O , O – середина AC , $DO \perp AC$.
- 4) $C_1 O \perp BD$, так как $\triangle BDC_1$ – равнобедренный, $DC_1 = C_1 B$.
- 5) Значит, $\angle C_1 O C$ – искомый угол.
- 6) $\triangle C_1 C O$ – прямоугольный, тогда $\operatorname{tg} \angle C_1 O C = \frac{CC_1}{CO}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



Использованные ресурсы

Тексты задач взяты с сайта Александра Ларина:

<http://alexlarin.narod.ru/ege.html>

Рисунок на слайдах №2 и №8 взяты с сайта:

<http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B>

Для создания шаблона презентации использовалась картинка

http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg

и шаблон с сайта <http://aida.ucoz.ru>