Информатика

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

8 класс

Издательство БИНОМ

Домашнее задание

- Решить все примеры в конце презентации!
- Добавочно: с конца презентации

выполняем задания с рабочей тетради! Можно распечатать и скрепить с классной тетрадью степлером, либо переписать задание в тетрадь.

Ключевые слова

- система счисления
- цифра
- алфавит
- позиционная система счисления
- основание
- развёрнутая форма записи числа
- свёрнутая форма записи числа
- двоичная система счисления
- восьмеричная система счисления
- шестнадцатеричная система счисления

Общие сведения

Система счисления - это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

Цифры - знаки, при помощи которых записываются числа.

Алфавит системы счисления - совокупность цифр.

Вав… …сления

Ег… …ления

Древнеславянская система счисления

Узловые и алгоритмические числа

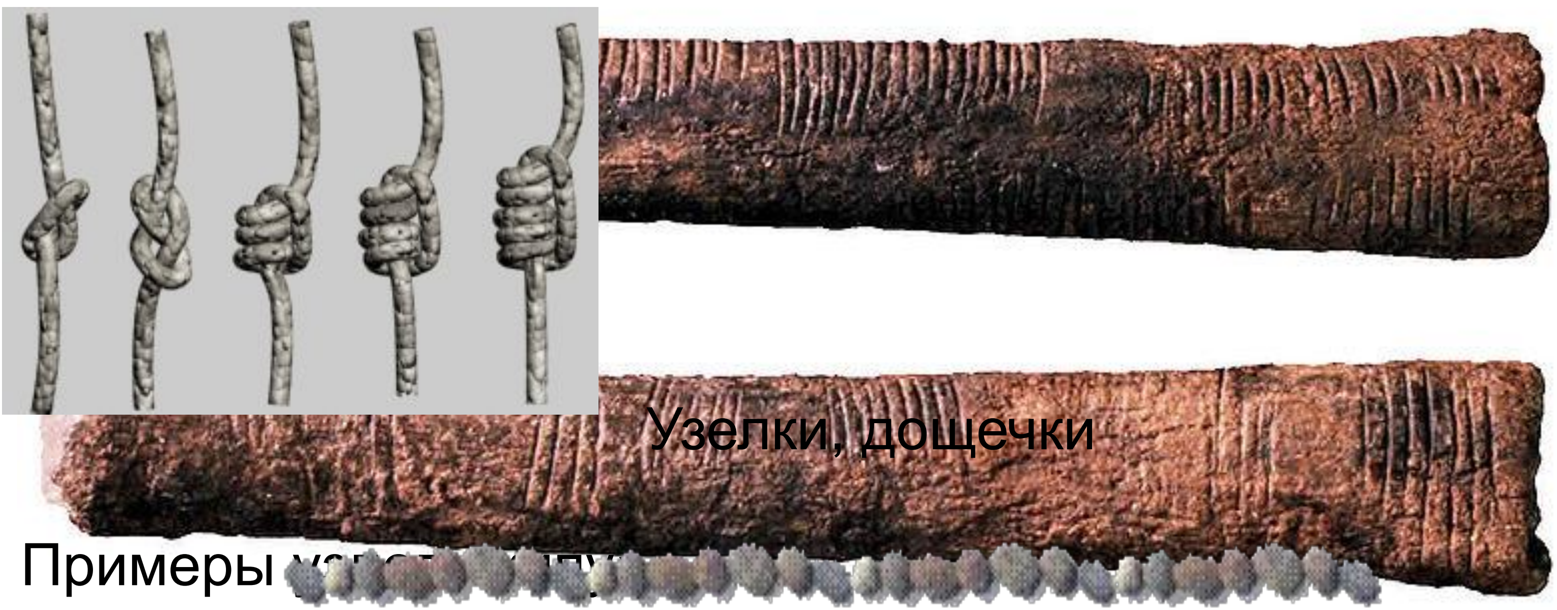
Узловые числа обозначаются цифрами.

Алгоритмические числа получаются в результате каких-либо операций из узловых чисел.

$$5 \times 100 + 4 \times 10 + 8 = 548$$

Унарная система счисления

Простейшая и самая древняя система - **унарная** система счисления. В ней для записи любых чисел используется всего один символ - палочка, узелок, зарубка, камушек.



Узелки, дощечки

Примеры

Зарубки

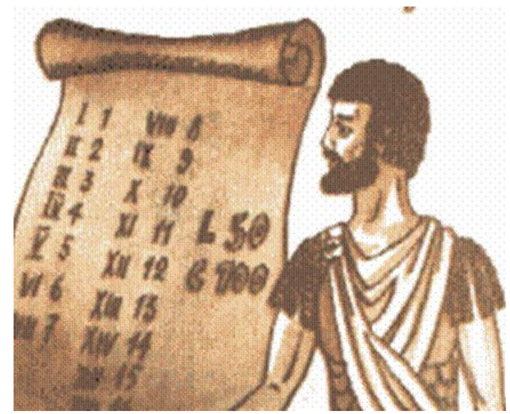
Камушки

Непозиционная система счисления

Система счисления называется ***непозиционной***, если количественный эквивалент (количественное значение) цифры в числе не зависит от её положения в записи числа.

Римская система счисления

1	**I**	100	**C**
5	**V**	500	**D**
10	**X**	1000	**M**
50	**L**		



Здесь ***алгоритмические*** числа получаются путём сложения и вычитания ***узловых*** чисел с учётом следующего правила: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.

Позиционная система счисления

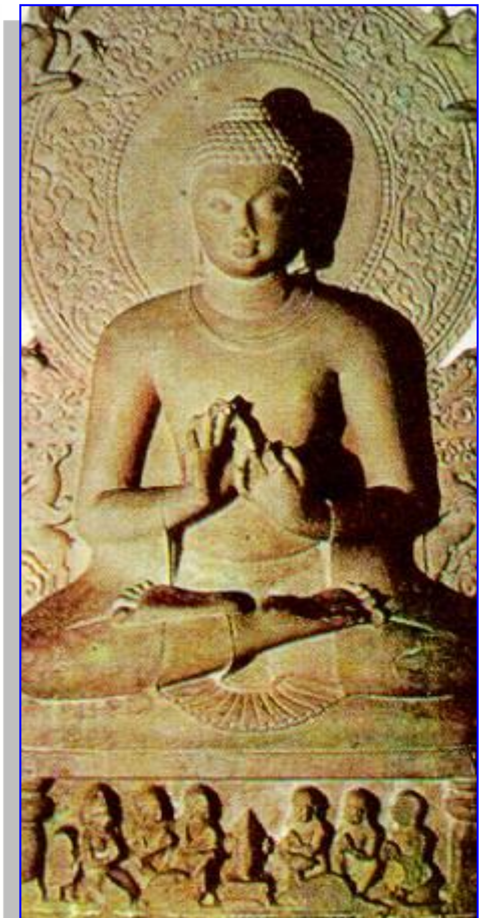
Система счисления называется ***позиционной***, если количественный эквивалент цифры в числе зависит от её положения в записи числа.

Основание позиционной системы счисления равно количеству цифр, составляющих её алфавит.

Алфавит десятичной системы составляют цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Десятичная система счисления

Цифры **1234567890** сложились в Индии около **400** г. н. э.



Арабы стали пользоваться подобной нумерацией около **800** г. н. э.

Примерно в **1200** г. н. э. эту нумерацию начали применять в Европе.

Вспомним! Запишем!

Десятичная система счисления – это Цифры **0123456789**

До **десятков** (10) все состоит из **единиц**, далее все начинает строится из этих символов - единиц. Если число превышает **9**, то добавляется разряд и число становится двухзначным. Берется **1** следующая по списку после **0**. К ней добавляется **0.**

Пример:

11, **12**, **13**, **14**, **15**, **16**, **17**, **18**, **19**

Далее **1** и **1**, далее **1** и **2,** далее **1** и **3,** и так до **19**

После **19** берем следующую цифру **2** и затем **0**

20, **21**, **22….** **29**

Затем идут **СОТНИ, ТЫСЯЧИ,** так далее…

Вспомним! Запишем!

Разряд числа – (позиция) **это** структурный элемент **числа** в позиционных системах счисления. **Разряд** является «рабочим местом» цифры

Пример:

ТАБЛИЦА РАЗРЯДОВ

III класс			II класс			I класс		
класс миллионов			*класс тысяч*			*класс единиц*		
9 разряд	**8 разряд**	**7 разряд**	**6 разряд**	**5 разряд**	**4 разряд**	**3 разряд**	**2 разряд**	**1 разряд**
сотни млн	десятки млн	милли-оны	сотни тыс.	десятки тыс.	тысячи	сотни	десятки	единицы

В каждом классе содержится по 3 разряда.
При отсутствии единиц какого-либо разряда пишется 0.

Основная формула

В позиционной системе счисления с основанием *q* любое число может быть представлено в виде:

$$\mathbf{A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m})}$$

Здесь:

А — число;

q — основание системы счисления (***количество различных знаков или символов (цифр), используемых для отображения чисел в данной системе*** *– например двоичная - 2, четверичная – 4, десятичная - 10*);

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа *(например 256 – 2 третий разряд числа, 5 второй разряд числа, 6 первый);*

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» *i*-го разряда (*основание системы счисления в степени равной* ***номеру разряда – "n"***).

Такая запись числа называется **развёрнутой формой записи.**

Развёрнутая форма

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m})$$

А — число;

q — основание системы счисления (*количество цифр необходимых для записи числа – например двоичная -2, четверичная - 4*);

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа *(например 256 – 2 третий разряд числа, 5 второй разряд числа, 6 первый);*

m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» i-го разряда (*основание системы счисления в степени равной* ***номеру разряда – "n"***).

Примеры записи чисел в развёрнутой форме:

$$2019 = 2\times10^3 + 0\times10^2 + 1\times10^1 + 9\times10^0$$

$$0{,}125 = 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2} + 5\times10^{-3}$$

$$14351{,}12 = 1\times10^4 + 4\times10^3 + 3\times10^2 + 5\times10^1 + 1\times10^0 + 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$$

Позиционные системы счисления

Основание системы счисления (N) - количество цифр (знаков), используемых для представления чисел

Основание	Алфавит	Пример
Двоичная система счисления		
N=2	0, 1	$\mathbf{1001011_2}$
Четверичная система счисления		
N=4	0, 1, 2, 3	$\mathbf{2301_4}$

Позиционные системы счисления

Основание | **Алфавит** | **Пример**

Восьмеричная система счисления

Основание	Алфавит	Пример
N=8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	527_8

Шестнадцатеричная система счисления

Основание	Алфавит	Пример
N=16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A (10), B (11), C (12), D (13), E (14), F (15)	$2F5_{16}$

Двоичная система счисления

Двоичной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием ***2***.

Двоичный алфавит: 0 и 1.

Для целых двоичных чисел можно записать:

$$\mathbf{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0 = a_{n-1}\times 2^{n-1} + a_{n-2}\times 2^{n-2} + \ldots + a_0\times 2^0}$$

Например:

$10011_2 = 1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0 = 2^4 + 2^1 + 2^0 = 19_{10}$

Правило перевода двоичных чисел в десятичную систему счисления:

Вычислить сумму степеней двойки, соответствующих единицам в свёрнутой форме записи двоичного числа

Вспомним! Запишем!

Двоичная система счисления – это Цифры **01**

Алфавит состоит из двух цифр и начинает строится из этих символов - единиц. Если число превышает **1**, то добавляется разряд и число становится двузначным. Берется **1** следующая по списку после **0**. К ней добавляется **0.**

Пример:

11,

Далее **1** и **1**

На этом знаки алфавита закончились… Что делаем? Прибавляем еще один и получаем значение **100.**

101, **110**, **111**, **1000**, **1001**, **1010**, **1011**,

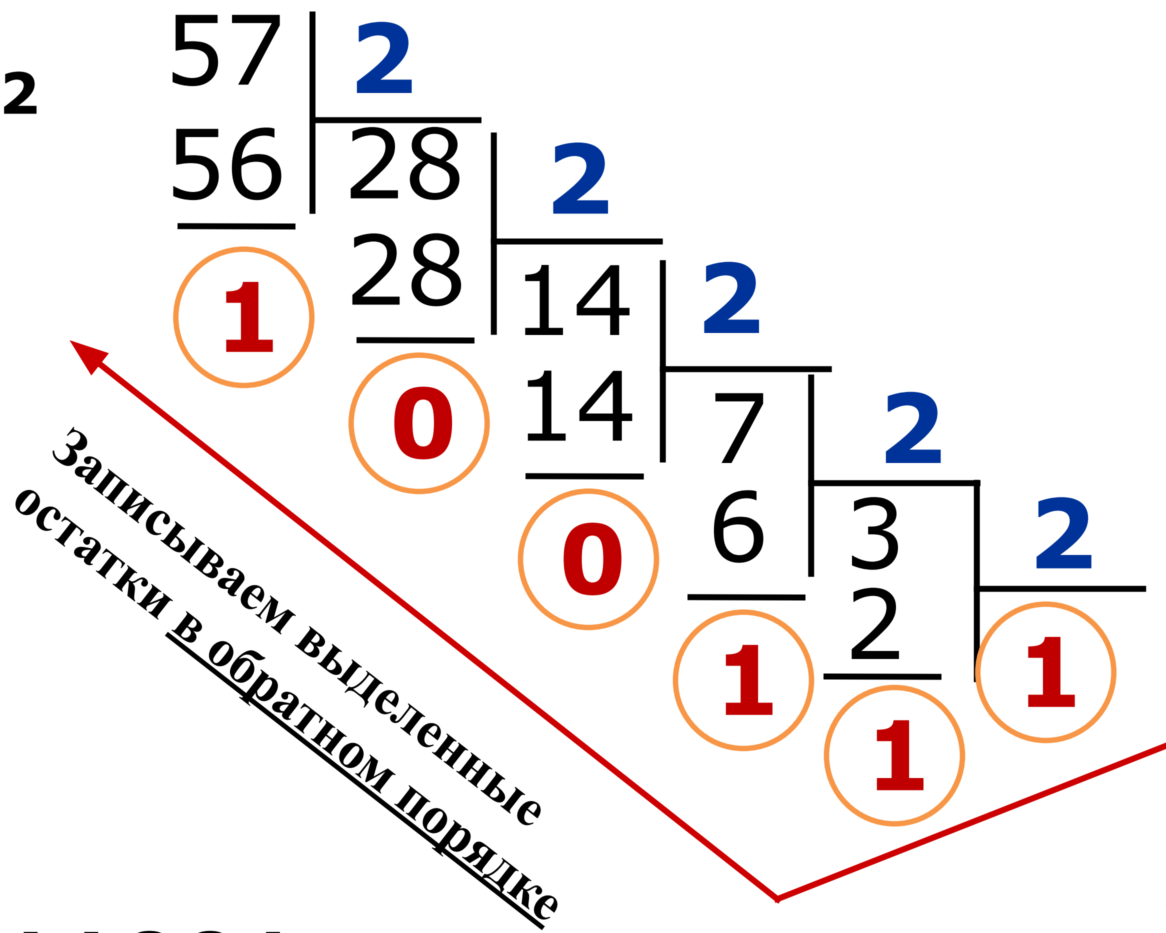
Перевод чисел из 10-й СС в 2-ю СС

Правила перевода

- ✔ Разделить десятичное число на 2. Получится частное и остаток.
- ✔ Частное опять разделить на 2. Выполнять деление до тех пор, пока последнее частное не станет меньшим 2.
- ✔ Записать последнее частное и все остатки в обратном порядке. Полученное число и будет двоичной записью исходного десятичного числа.

Перевод чисел из 10-й СС в 2-ю СС

$57_{10} \rightarrow X_2$



Ответ:

$57_{10} = 111001_2$

Перевод чисел из 10-й СС в 8-ю СС

$100_{10} \rightarrow X_8$

$$
\begin{array}{r|l}
100 & \mathbf{8} \\
\underline{96} & 12 \; | \; \mathbf{8} \\
4 & \underline{\;8} \quad 1 \\
 & 4
\end{array}
$$

Записываем выделенные остатки в обратном порядке

Ответ:

$100_{10} = 144_8$

Перевод чисел из 10-й СС в 16-ю СС

Основание (количество цифр): **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

$$335_{10} \rightarrow X_{16}$$

335 | 16
320 | 20 | 16
15 | 16 | 1
4

F ← 15

Записываем выделенные остатки в обратном порядке

Ответ:

$$335_{10} = 14F_{16}$$

Правило перевода целых десятичных чисел в двоичную систему счисления

$$\frac{a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\ldots a_1\times 2^1+a_0}{2} = a_{n-1}\times 2^{n-2}+\ldots+a_1 \text{ (остаток } a_0\text{)}$$

$$\frac{a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\ldots a_1}{2} = a_{n-1}\times 2^{n-3}+\ldots+a_2 \text{ (остаток } a_1\text{)}$$

$$\frac{a_{n-1}\times 2^{n-1}+a_{n-2}\times 2^{n-2}+\ldots a_2}{2} = a_{n-1}\times 2^{n-4}+\ldots+a_3 \text{ (остаток } a_2\text{)}$$

...

На *n*-м шаге получим набор цифр: $\mathbf{a_0a_1a_2\ldots a_{n-1}}$

Компактное оформление

363	181	90	45	22	11	5	2	1
1	1	0	1	0	1	1	0	1

$$363_{10} = 101101011_2$$

314	157	78	39	19	9	4	2	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1

$$314_{10} = 100111010_2$$

Восьмеричная система счисления

Восьмеричной системой счисления называется позиционная система счисления с основанием 8.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

$$a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1 a_0 = a_{n-1}\times 8^{n-1}+a_{n-2}\times 8^{n-2}+\ldots+a_0\times 8^0$$

Пример: $1063_8 = 1\times 8^3 + 0\times 8^2 + 6\times 8^1 + 3\times 8^0 = 563_{10}$.

Для перевода целого восьмеричного числа в десятичную систему счисления следует перейти к его развёрнутой записи и вычислить значение получившегося выражения.

Для перевода целого десятичного числа в восьмеричную систему счисления следует последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на 8 до тех пор, пока не получим частное, равное нулю.

Компактное оформление перевода

из 10 СС в 8 СС

12363	1545	193	24	3
3	1	1	0	

$$12363_{10} = 30113_8$$

$30113_8 = 3\times8^4 + 0\times8^3 + 1\times8^2 + 1\times8^1 + 3\times8^0 = 12288+0+64+8+3 = 12363_{10}$.

314	39	4
2	7	

$$314_{10} = 472_8$$

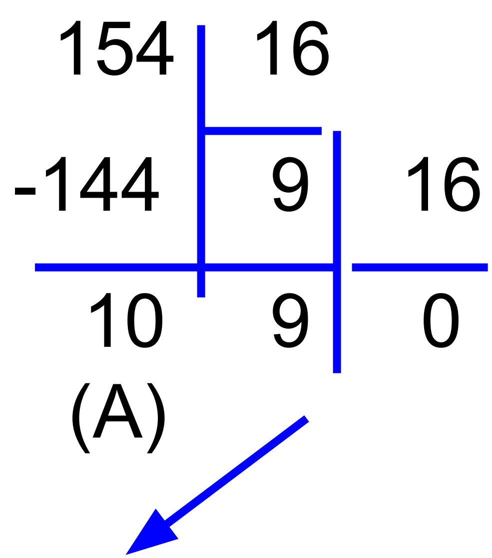
Шестнадцатеричная система счисления

Основание: q = 16.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

$3AF_{16} = 3\times16^2+10\times16^1+15\times16^0 = 768+160+15 = 943_{10}$.

Переведём десятичное число 154 в шестнадцатеричную систему счисления:



$154_{10} = 9A_{16}$

Компактное оформление перевода

из 10 СС в 16 СС

12363	772	48	3
B	4	0	

$$12363_{10} = 304B_{16}$$

$304B_{16} = 3\times16^3 + 0\times16^2 + 4\times16^1 + 11\times16^0 = 12288 + 0 + 64 + 11 =$

$= 12363_{10}.$

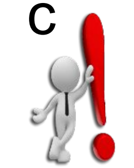
314	16	1
A	3	

$$314_{10} = 13A_{16}$$

Правило перевода целых десятичных чисел в систему счисления с основанием *q*

1) последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, равное нулю;

2) полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления;



3) составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего полученного остатка.

Цифровые весы

Ôàéë "SWF"

Таблица соответствия 10-х, 2-х, 8-х и 16-х чисел от 1 до 16

Десятичная система	Двоичная система	Восьмеричная система	Шестнадцатеричная система
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12

Двоичная арифметика

Умножение и деление двоичных чисел

Рассмотрим пример на **деление** чисел в двоичной системе счисления:

$$1001_2 : 11_2 = ?$$

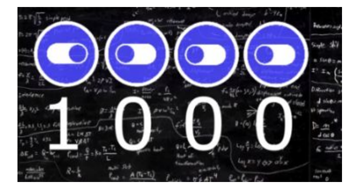
ДЕМО

$$
\begin{array}{r|l}
-\,1001 & 11 \\
\underline{11} & \overline{11} \\
-\,11 & \\
\underline{11} & \\
0 &
\end{array}
$$

«Компьютерные» системы счисления

Двоичная система используется в компьютерной технике, так как:

- *двоичные числа представляются в компьютере с помощью простых технических элементов с двумя устойчивыми состояниями* (память компьютера строится на триггерах – микроскопическое устройство способное стабильно находится в одном из двух состояний, поэтому 0 и 1);



- *представление информации посредством только двух состояний надёжно и помехоустойчиво*;

- *двоичная арифметика наиболее проста*;
- *существует математический аппарат, обеспечивающий логические преобразования двоичных данных*.
- *Каждый триггер это 1 бит памяти. 8 триггеров это 1 байт*

Двоичный код удобен для компьютера.

Человеку неудобно пользоваться длинными и однородными кодами. Специалисты заменяют двоичные коды на величины в восьмеричной или шестнадцатеричной системах счисления.

Самое главное

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

Система счисления называется ***позиционной***, если количественный эквивалент цифры в числе зависит от её положения в записи числа.

В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m})$$

Здесь:

A — число;

q — основание системы счисления;

a_i — цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления;

n — количество целых разрядов числа;

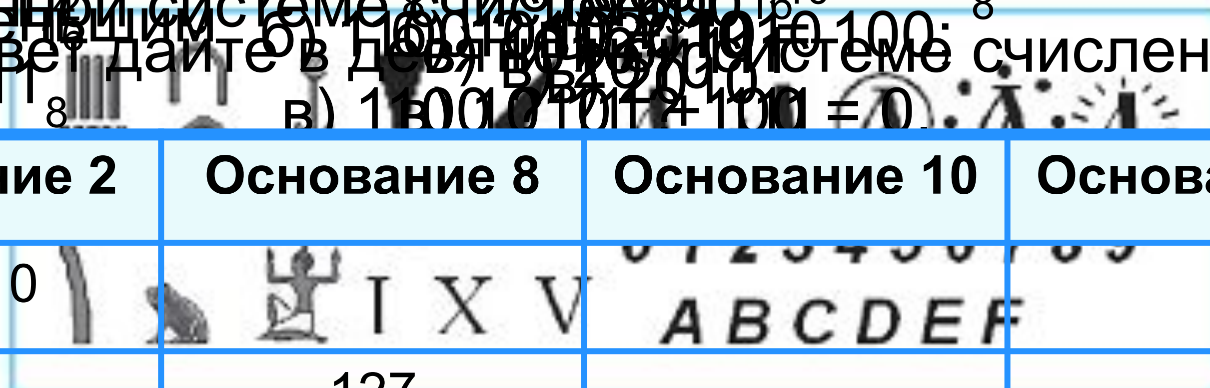
m — количество дробных разрядов числа;

q^i — «вес» *i*-го разряда.

Вопросы и задания

Д/З - Записать в тетради! Делаем полную развернутую запись решений!

[illegible]



Основание 2	Основание 8	Основание 10	Основание 16
101010			
	127		
		321	
			2A

Задачник «Системы счисления»

Опорный конспект

Система счисления — это знаковая система, в которой приняты определённые правила записи чисел.

Цифры - знаки, при помощи которых записываются числа.

Алфавит - совокупность цифр системы счисления.

В позиционной системе счисления с основанием q любое число может быть представлено в виде:

$$A_q = \pm(a_{n-1} \times q^{n-1} + a_{n-2} \times q^{n-2} + \ldots + a_0 \times q^0 + a_{-1} \times q^{-1} + \ldots + a_{-m} \times q^{-m}).$$