ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формула трапеций и Симпсона

Формула трапеций

При n=1 , $f(x) \approx \mathrm{P}_1(x)$

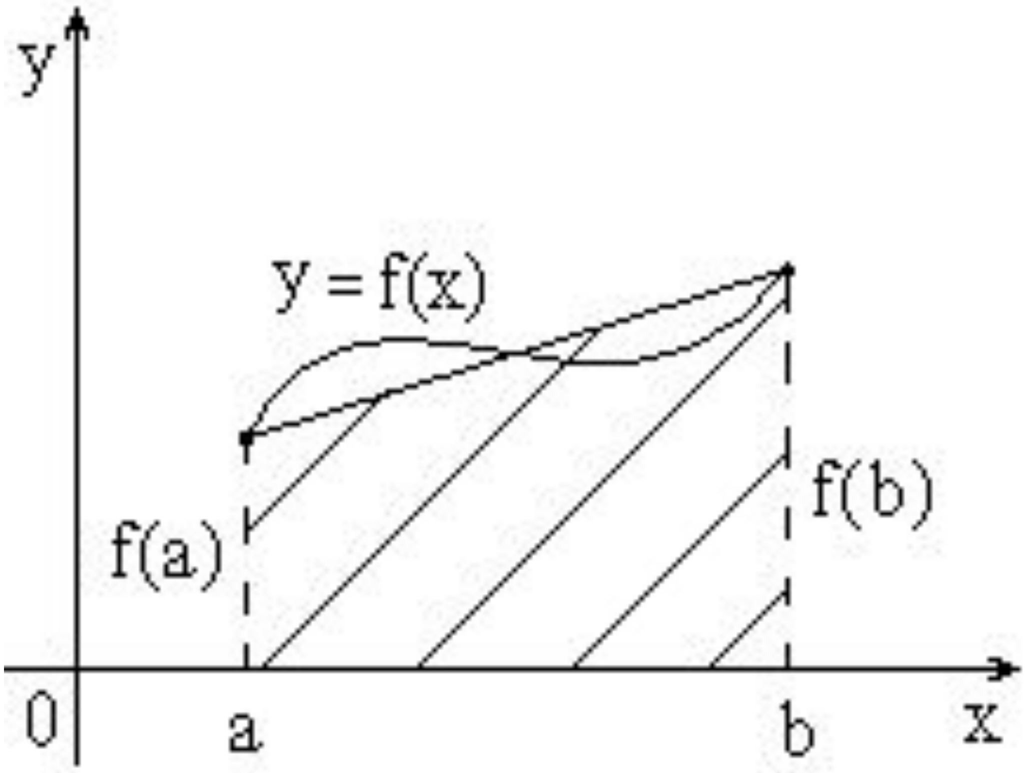
Для построения $P_1(x)$ требуется две точки

x	y
X_0=a	Y_0=f(a)
X_1=b	Y_1=f(b)

$$\mathrm{P}_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Подставив значения x_0,x_1,y_0 и y_1 получим окончательно формулу трапеций

Формула трапеций



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathrm{P}_1(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(f(b)(x-a) - f(a)(x-b)\big)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Формула Симпсона

При n=2 , $f(x) \approx \mathrm{P}_2(x)$

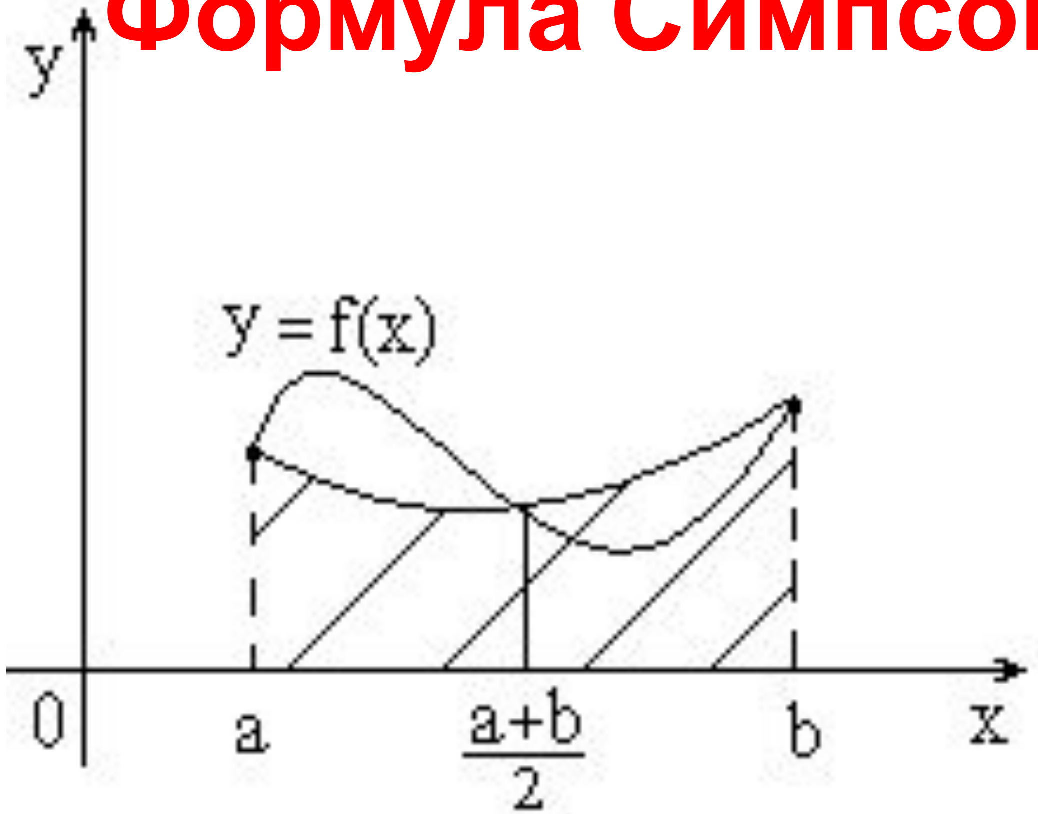
Для построения $P_2(x)$ требуется три точки

x	y
X_0=a	Y_0=f(a)
$x_1 = \frac{a+b}{2}$	$y_1 = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
X_2=b	Y_2=f(b)

$$\mathrm{P}_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Подставив значения x_0,x_1,x_2,y_0 ,y_1и y_2 получим окончательно формулу Симпсона

Формула Симпсона:



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \mathrm{P}_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

Обобщенная формула трапеции

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

Обобщенная формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[\begin{array}{l} y_0 + y_{2m} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right) + \\ + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\right) \end{array}\right]$$

$$\text{где} \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$$

Вычислить приближенно по формуле трапеций интеграл , полагая n=10

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx$$

При n=10 разобьем отрезок интегрирования на 10 частей с шагом

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{10}=0{,}1$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции в точках деления отрезка:

i	x_i	x_i^2	$y_i = e^{-x^2}$
0	0	0	1.0000
1	0.1	0.01	0.9900
2	0.2	0.04	0.9608
3	0.3	0.09	0.9139
4	0.4	0.16	0.8521
5	0.5	0.25	0.7788
6	0.6	0.36	0.6977
7	0.7	0.49	0.6126
8	0.8	0.64	0.5273
9	0.9	0.81	0.4449
10	1.0	1.00	0.3679

Произведем вычисления:

$$\frac{1}{2}(y_0 + y_{10}) + \sum_{i=1}^{9} y_i = 7.4620$$

По формуле трапеций получим значение интеграла

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.1 * 7.4620 = 0.7462$$

Вычислить приближенно интеграл по формуле Симпсона при n=10

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции, в точках деления отрезка, записывая ординаты с четными и нечетными номерами в разные столбцы:

i	X_i	x_i^2	$y_i = e^{x_i^2}$		
			При i=0, i=10	При четном i	При нечетном i
0	0.0	0,00	1,0000		
1	0.1	0,01			1,0101
2	0.2	0,04		1,0408	
3	0.3	0,09			1,0942
4	0.4	0,16		1,1735	
5	0.5	0,25			1,2840
6	0.6	0,36		1,4333	
7	0.7	0,49			1,6323
8	0.8	0,64		1,8965	
9	0.9	0,81			2,2479
10	1.0	1,00	2,7188		
суммы			3,7188	5,4441	7,2685

Затем по формуле Симпсона находим

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{0.1}{3}(3.7183 + 4*7.2685 + 2*5.5441) = 1.46268$$