

Связанные волны в нелинейной среде

Система связанных уравнений для трехволнового процесса примет вид:

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_1 \right] \mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) = \frac{4\pi\omega_1^2}{c^2} \mathbf{P}^{(2)}(\omega_1) = \frac{4\pi\omega_1^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega) : \mathbf{E}_2^*(\mathbf{k}_2, \omega_2) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \right] \mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, \omega_2) = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2} \mathbf{P}^{(2)}(\omega_2) = \frac{4\pi\omega_2^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega_2 = \omega - \omega_1) : \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}_1^*(\mathbf{k}_1, \omega_1),$$

$$\left[\nabla \times (\nabla \times) - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right] \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \mathbf{P}^{(2)}(\omega) = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \chi^{(2)}(\omega = \omega_1 + \omega_2) : \mathbf{E}_1(\mathbf{k}_1, \omega_1) \mathbf{E}_2(\mathbf{k}_2, \omega_2),$$

Перестановочная симметрия восприимчивости

Для действительности электромагнитного поля нужно ввести отрицательные частоты

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})^* e^{i\omega t}$$

тогда вектор электрической индукции

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + \varepsilon^*(\omega)\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})^* e^{i\omega t}$$

для диэлектрической проницаемости верно соотношение

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$$

для линейной восприимчивости

$$\chi_{ij}^{(1)}(\omega) = \chi_{ij}^{(1)*}(-\omega)$$

что трактуется как частный случай принципа обратимости Онзагера

! NB Поговорить

- про соотношения Крамерса-Кронига
- про комплексность линейной восприимчивости
- про комплексность нелинейной восприимчивости

Перестановочная симметрия восприимчивости

Для нелинейной (например, квадратичной) восприимчивости перестановочные соотношения аналогичны:

$$\chi_{ijk}^{(2)*}(\omega_1 = \omega_2 + \omega_3) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_2 = -\omega_3 + \omega_1) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 - \omega_2)$$

(обратить внимание на вращение декартовых индексов)

В полосе прозрачности, где дисперсией можно пренебречь, перестановочная симметрия становится частотно независимой (соотношения Клейнмана) – можно вращать индексы не вращая частоты

! NB Поговорить

- 27 □ 10

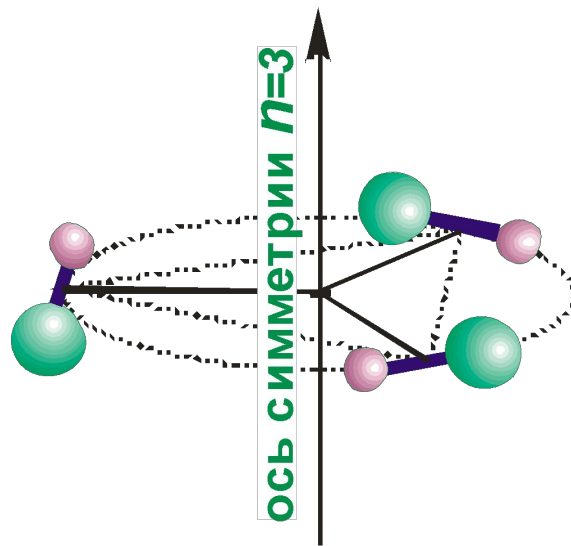
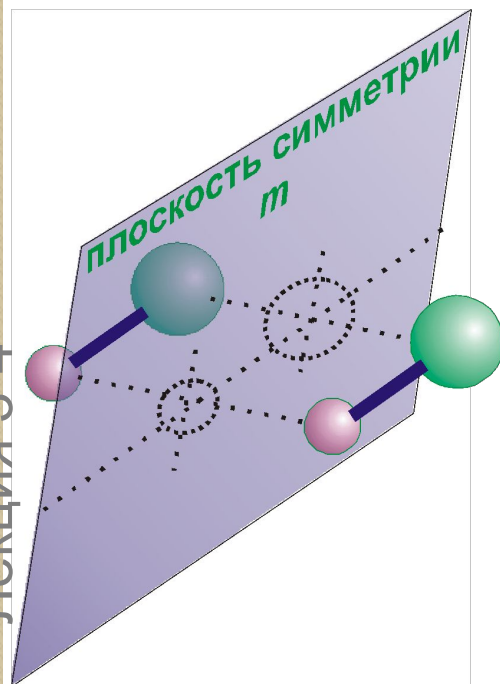
- 27 □ 18 - SHG

Можно ввести эмпирические коэффициенты Миллера:

$$\Delta_{ijk} = \frac{\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1 = \omega_2 + \omega_3)}{\chi_{ii}^{(1)}(\omega_1)\chi_{jj}^{(1)}(\omega_2)\chi_{kk}^{(1)}(\omega_3)}$$

которые являются константами в широком спектральном диапазоне

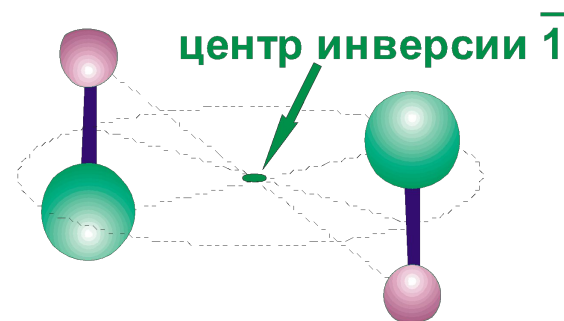
ТОЧЕЧНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА



$$\phi = 2\pi/n$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 6$$

ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ



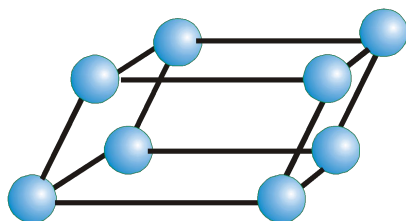
$$\bar{1} = \begin{cases} 2/m \\ 4/m \\ 6/m \end{cases}$$

ТОЧЕЧНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА

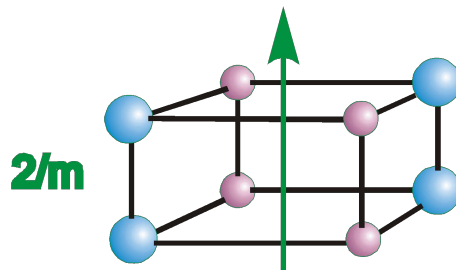
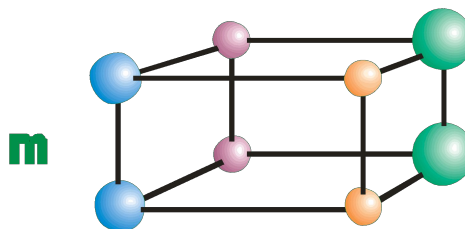
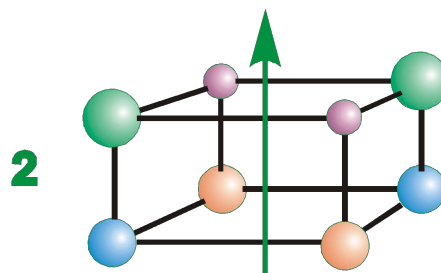
СИНГОНИИ

32 группы симметрии $\longrightarrow$ 6 сингоний

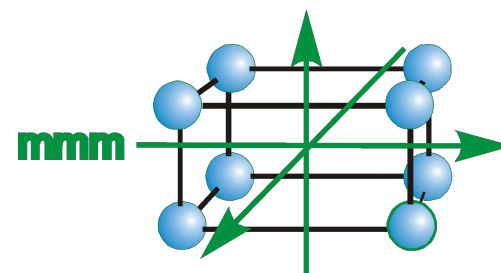
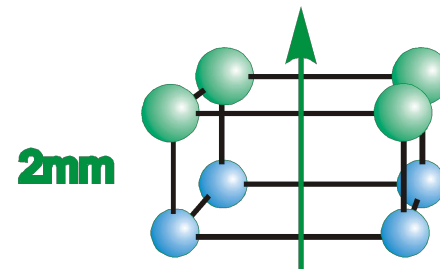
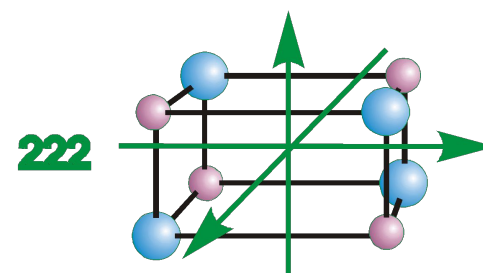
триклинная



моноклинная



ромбическая

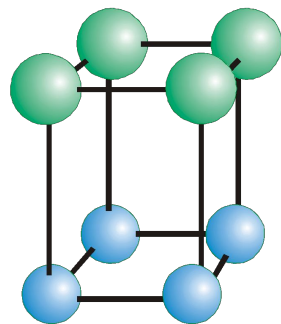


ТОЧЕЧНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА

СИНГОНИИ

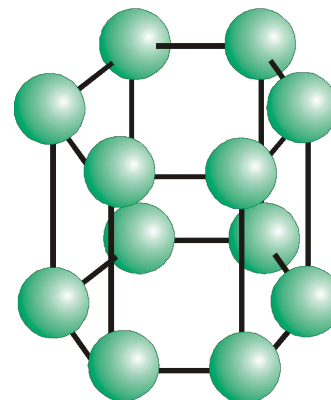
тетрагональная

$4mm$

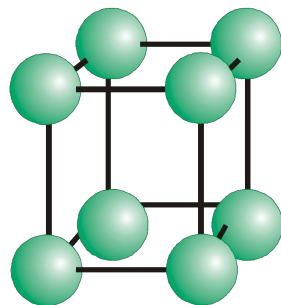


гексагональная

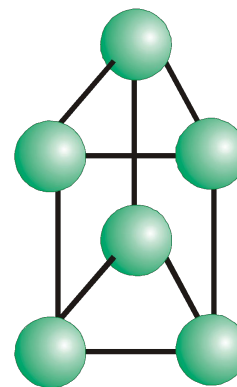
$6mm$



$4/mmm$



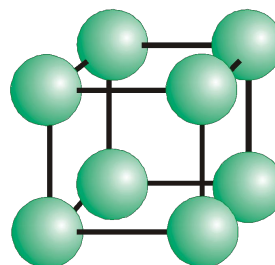
$3m$



ТОЧЕЧНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА

СИНГОНИИ

кубическая

 $m\bar{3}m$ 

первый символ определяет координатные элементы симметрии,
последний - диагональные,
символ "3" указывает на четыре диагональные оси симметрии порядка 3

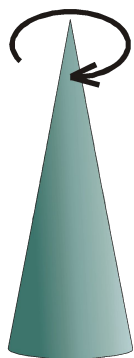
$m\bar{3}m$ - четыре оси 3 по биссектрисам координатных
углов, три координатные и три диагональные плоскости симметрии

ТОЧЕЧНАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛА

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ГРУППЫ КЮРИ

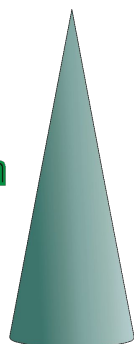
ось симметрии порядка ∞

∞



∞m

электростатическое поле

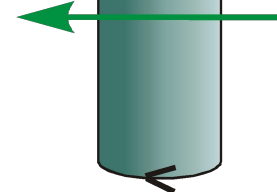


∞/m

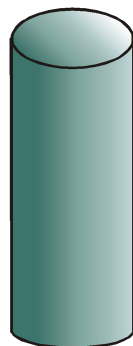
магнитное поле



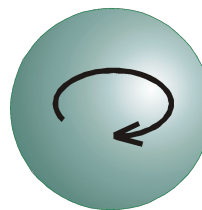
$\infty 2$



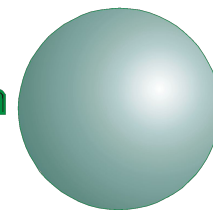
∞/mm



$\infty \infty$



$\infty \infty m$



КВАДРАТИЧНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ И СИММЕТРИЯ КРИСТАЛЛА

$\chi^{(n)}$ - тензор нелинейной восприимчивости порядка n

x_i - координаты в кристаллографической системе координат
(для кристаллов кубической сингонии - ортонормированные
декартовы координаты)

T_{ij} - тензор преобразования координат операции симметрии кристалла

закон преобразования координат операции симметрии кристалла:

$$x'_i = T_{ij} x_j$$

закон преобразования компонент $\chi^{(n)}$ при действии операции симметрии кристалла:

$$\chi'_{ijk}{}^{(2)} = T_{il} T_{jm} T_{kn} \chi_{lmn}{}^{(2)}$$

потребуем инвариантности нелинейной восприимчивости по отношению ко всем операциям симметрии точечной группы кристалла:

$$\chi'_{ijk}{}^{(2)} = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} \chi_{lmn}{}^{(2)}$$

получим систему линейных уравнений для компонент тензора нелинейной восприимчивости:

$$(T_{il} T_{jm} T_{kn} - \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}) \chi_{lmn}{}^{(2)} = 0$$

КВАДРАТИЧНАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ ОБЪЕМА И ПОВЕРХНОСТИ ЦЕНТРОСИММЕТРИЧНЫХ СРЕД

в кристаллах с инверсной симметрией $T_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$

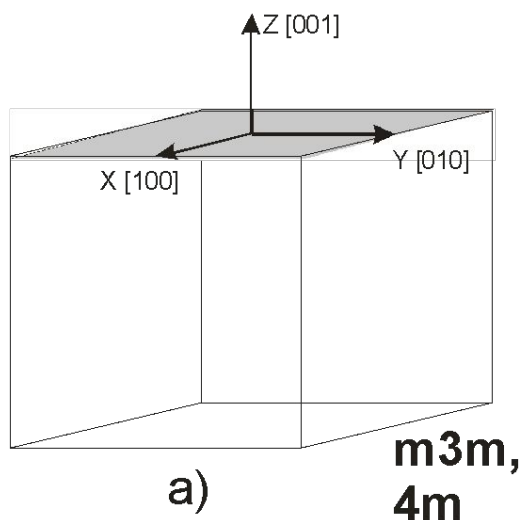
тогда уравнение $(T_{il}T_{jm}T_{kn} - \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn})\chi_{lmn}^{(2)} = 0$ преобразуется в

таким образом $\chi_{ijk}^{(2)} \equiv 0$ $\chi_{ijk}^{(2)} = -\chi_{ijk}^{(2)}$

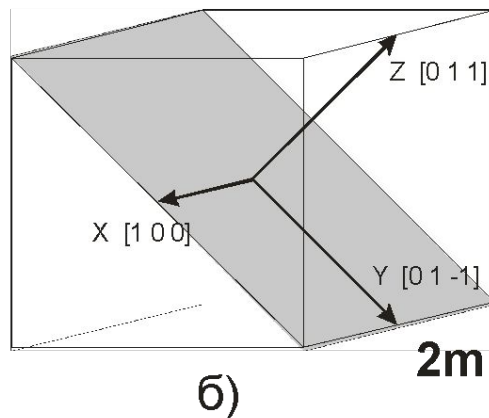
- симметричный запрет на четные нелинейно-оптические эффекты в кристаллах с инверсной симметрией в дипольном приближении

нарушение инверсной симметрии на поверхности $\longrightarrow \chi_{ijk}^{(2)Surface} \neq 0$

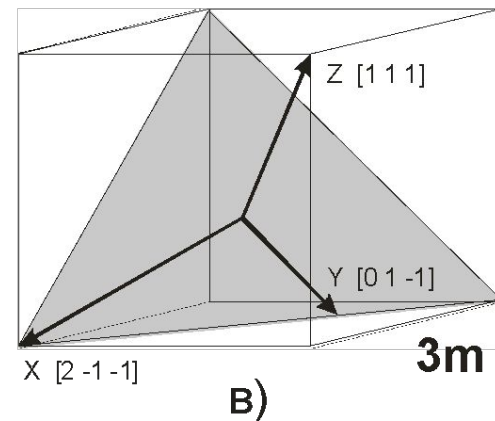
поверхность (001)
симметрия **4m**



поверхность (011)
симметрия **2mm**



поверхность (111)
симметрия **3m**



Энергия поля в нелинейной среде

Из уравнений Максвелла можно получить, что

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

скорость истечения энергии из единицы объема равна скорости убыли плотности запасенной в нем электромагнитной энергии

Записав полную поляризацию среды в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

можно ввести мгновенную плотность энергии электромагнитной волны в нелинейной среде:

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) + \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \frac{2}{3} \mathbf{E} \cdot \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \dots$$

Энергия поля в нелинейной среде

Тогда соотношение

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

можно записать в виде

$$\frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} U(\mathbf{r}, t)$$

Усредненное по времени выражение будет выражать закон сохранения энергии в нелинейной среде:

$$\left\langle \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right\rangle = -\frac{\partial}{\partial t} \langle U \rangle$$