

Введение в метод координат

Выбор системы координат

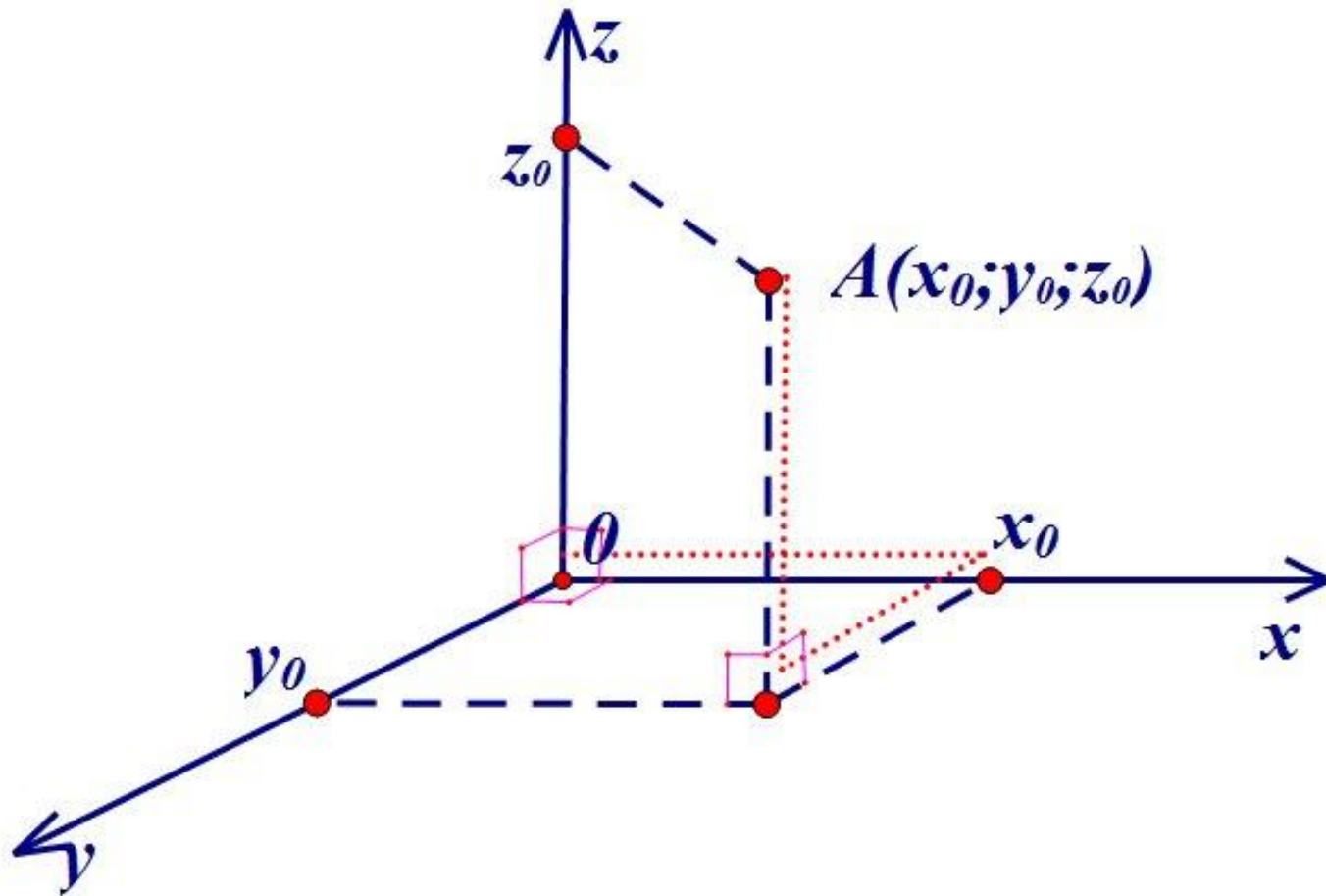
Координаты точки

Уравнение плоскости по трем точкам

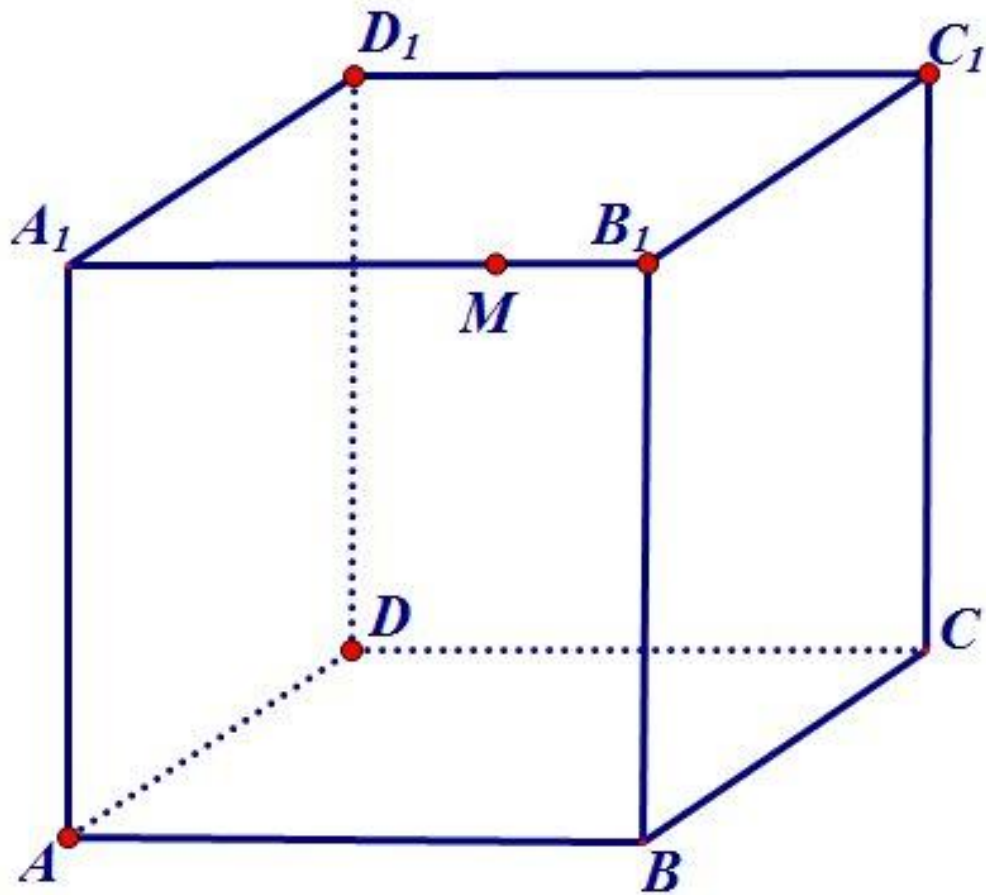
Вектор нормали к плоскости

Направляющий вектор прямой

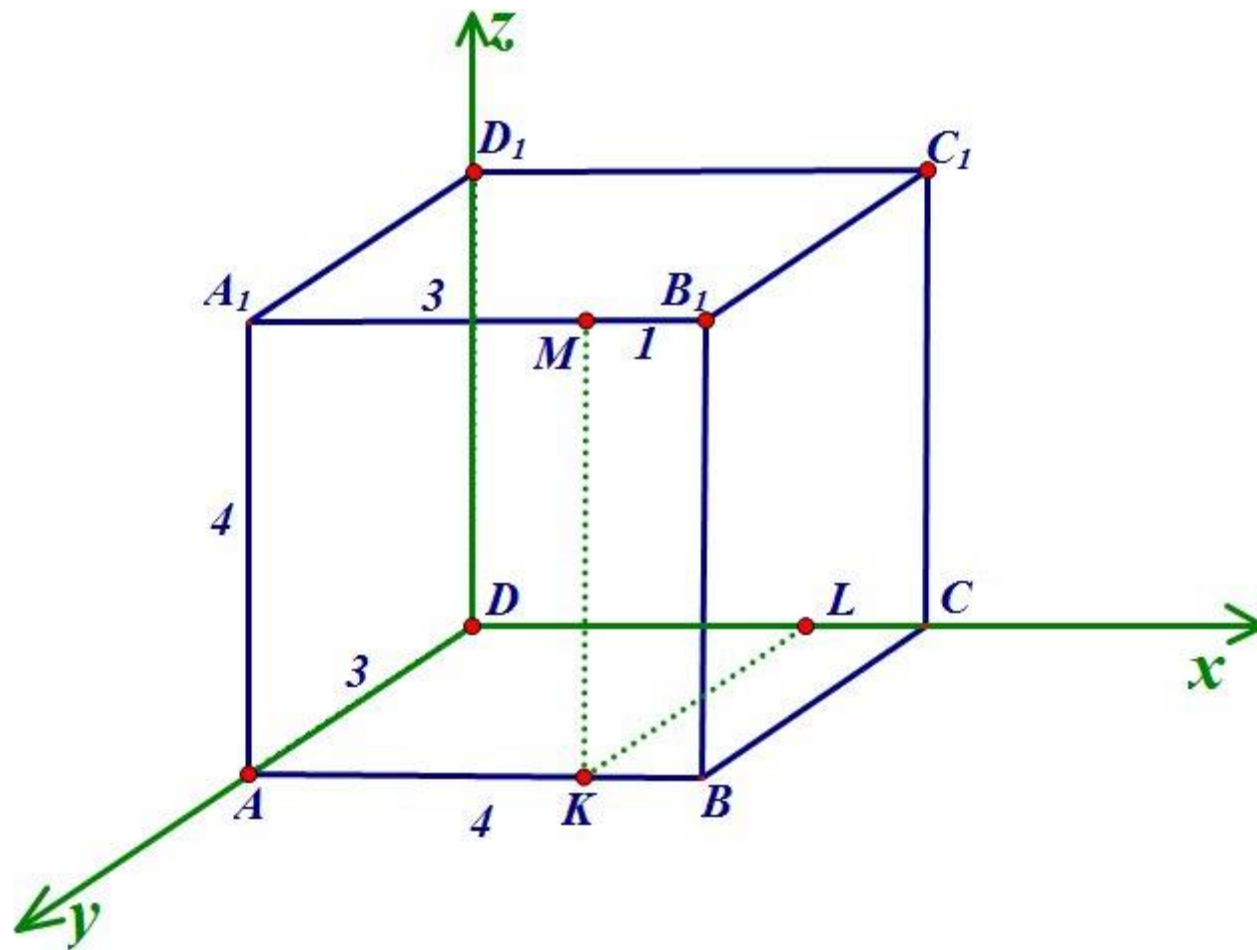
Координаты точки в прямоугольной системе координат



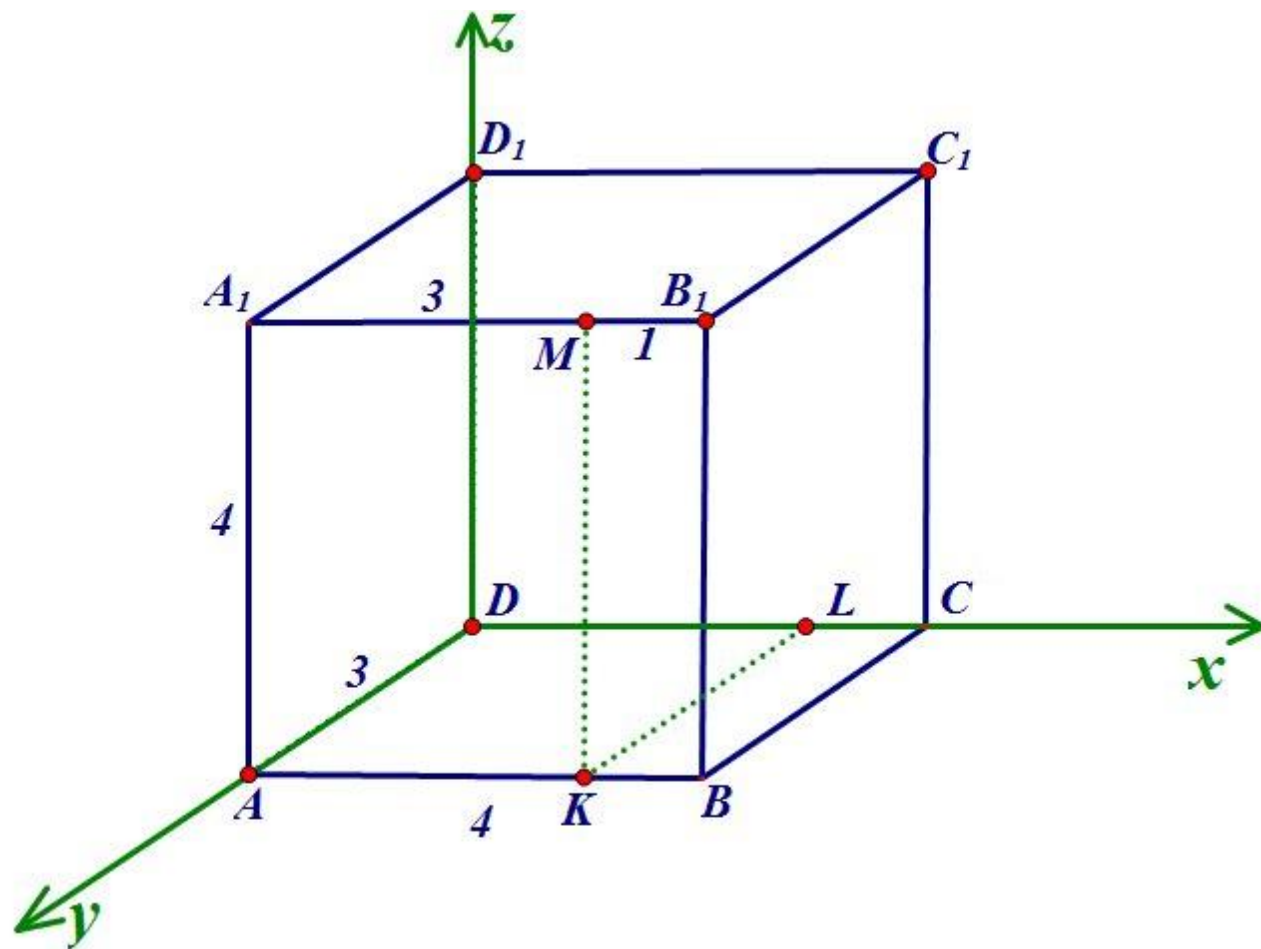
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $3:1$, считая от точки A_1 . Найдите координаты точек A ; D ; M ; B_1 ; C_1 ; D_1 , если точка D – начало координат.



В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Найдите координаты точек A ; D ; M ; B_1 ; C_1 ; D_1 , если точка D – начало координат.



В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Найдите координаты точек A ; D ; M ; B_1 ; C_1 ; D_1 , если точка D – начало координат.



$$A(0; 3; 0)$$

$$D(0; 0; 0)$$

$$M(3; 3; 4)$$

$$B_1(4; 3; 4)$$

$$C_1(4; 0; 4)$$

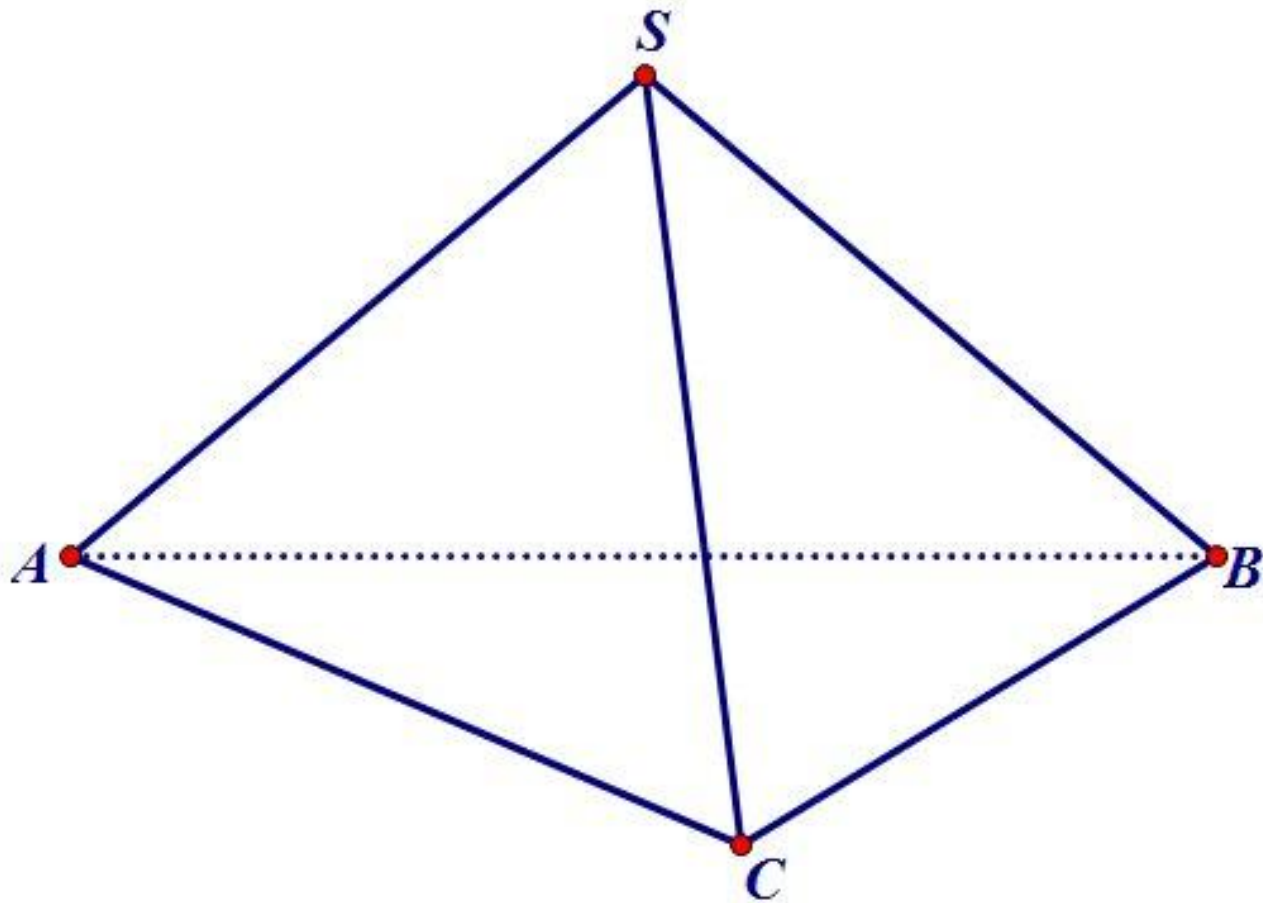
$$D_1(0; 0; 4)$$

Координаты точки

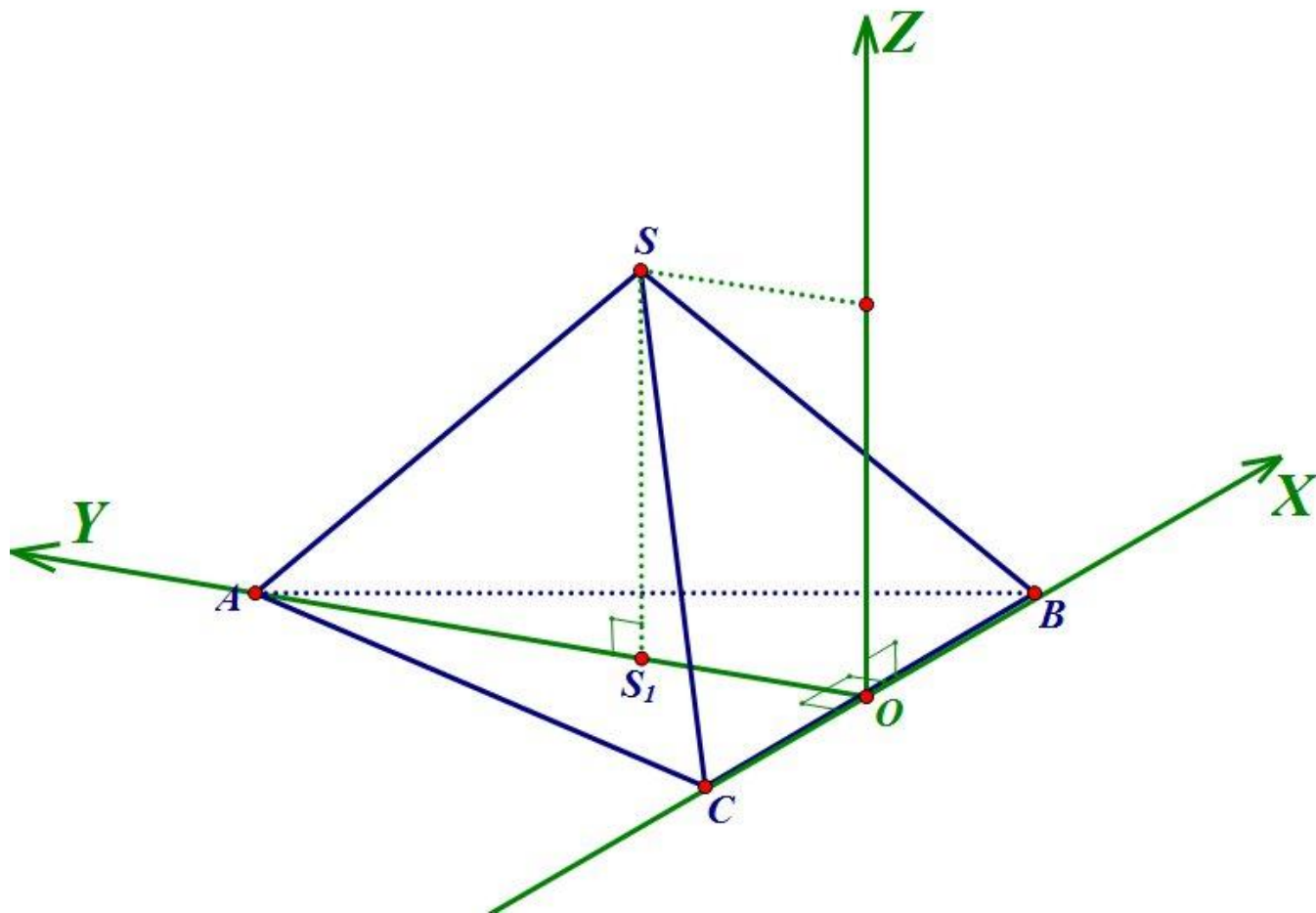
Чтобы найти координаты точки нужно:

1. Найти проекцию этой точки на плоскость OXY .
2. Найти координаты проекции в плоскости OXY .
3. Найти проекцию точки на ось OZ
4. Записать третью координату.

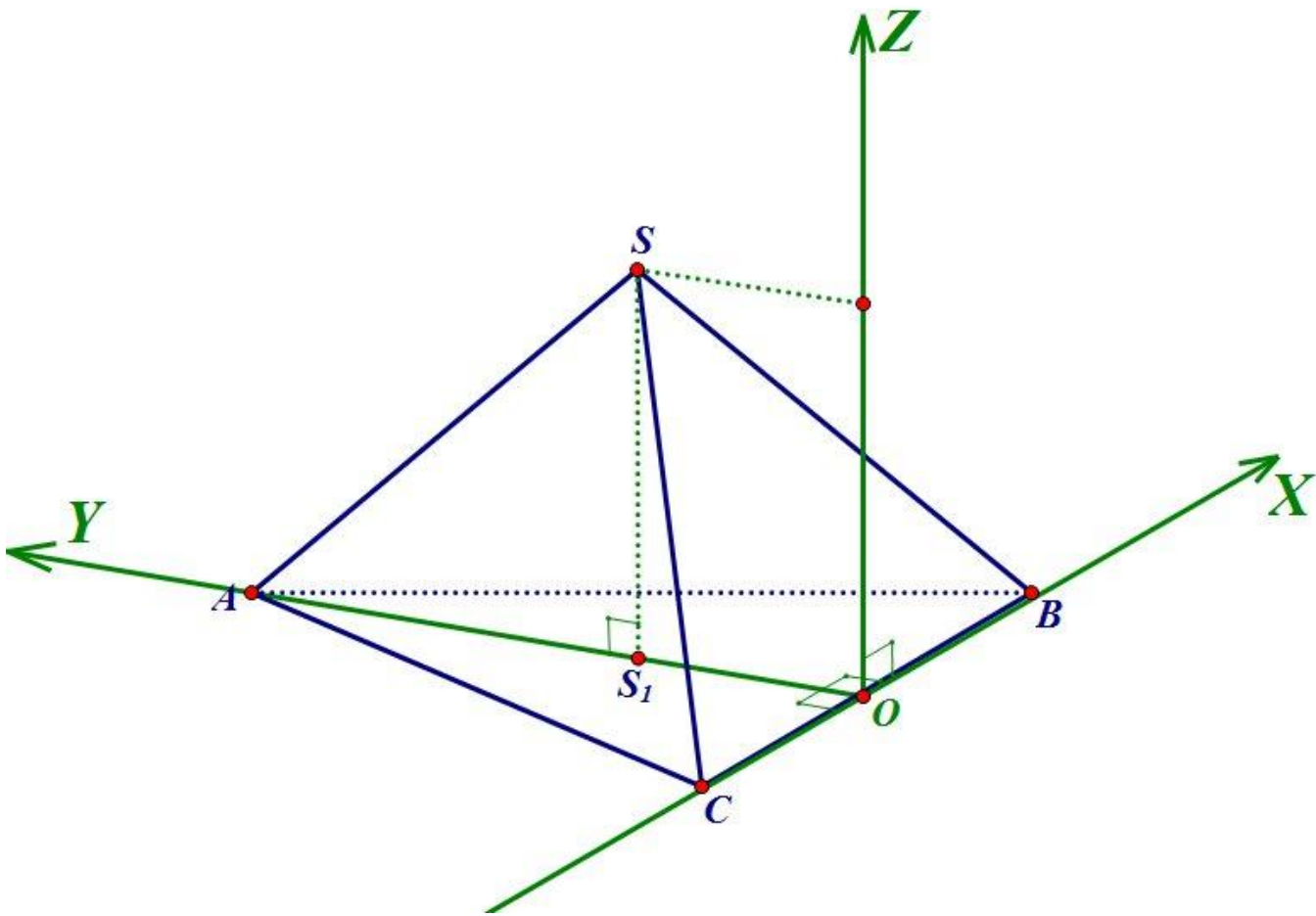
Правильная пирамида



Правильная пирамида

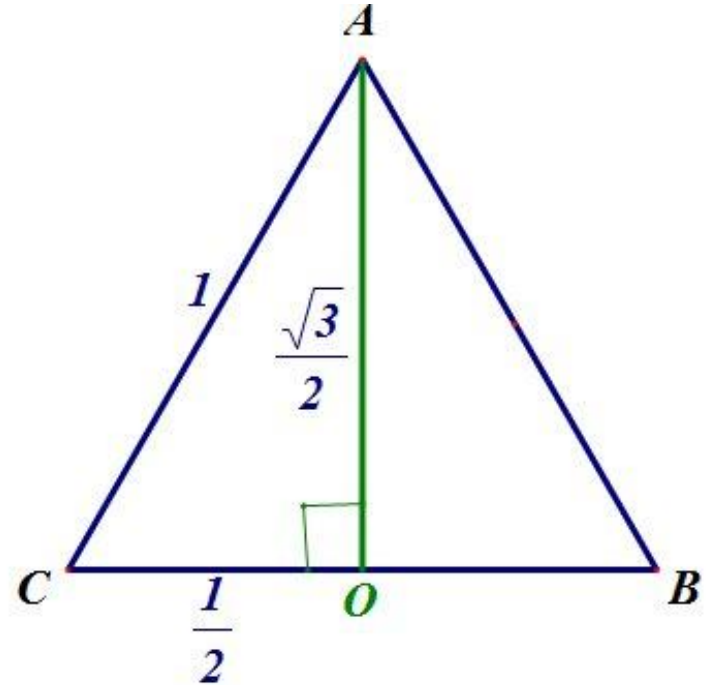
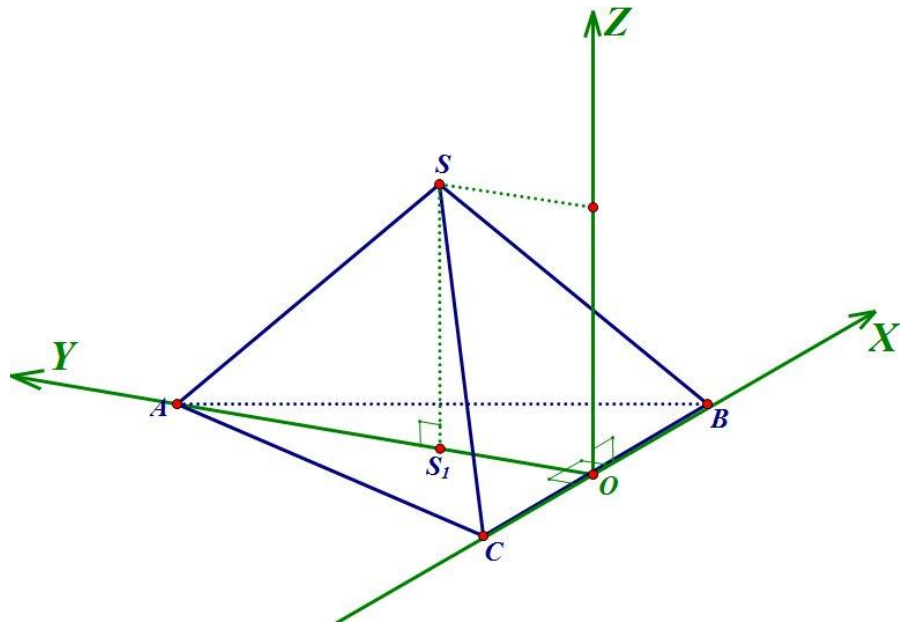


Правильная пирамида, все ребра
которой равны 1



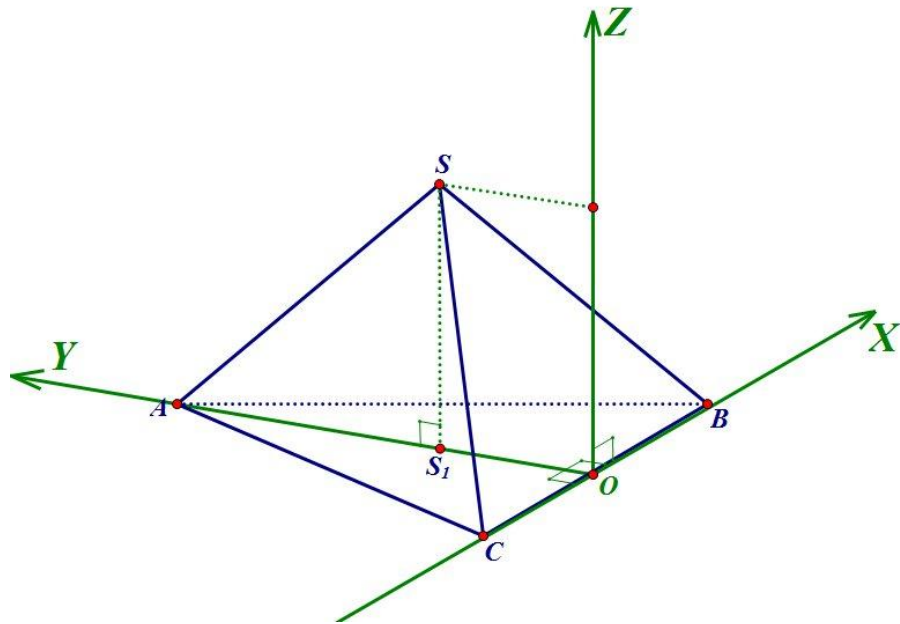
$$B\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$$
$$C\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$$

Правильная пирамида, все ребра которой равны 1

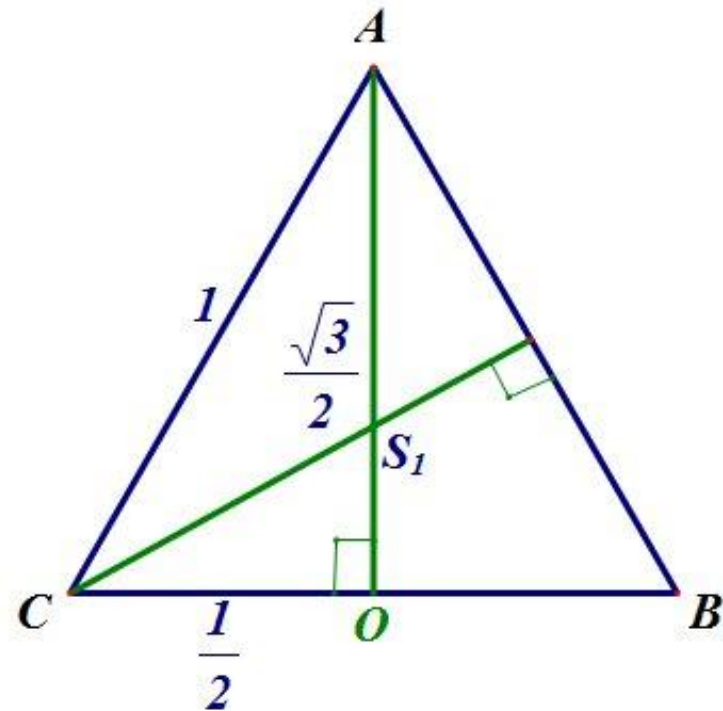


$$\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \mathbf{A} ; \left(0; 0; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathbf{C} ; \left(0; 0; \frac{1}{2}\right) \mathbf{B}$$

Правильная пирамида, все ребра которой равны 1



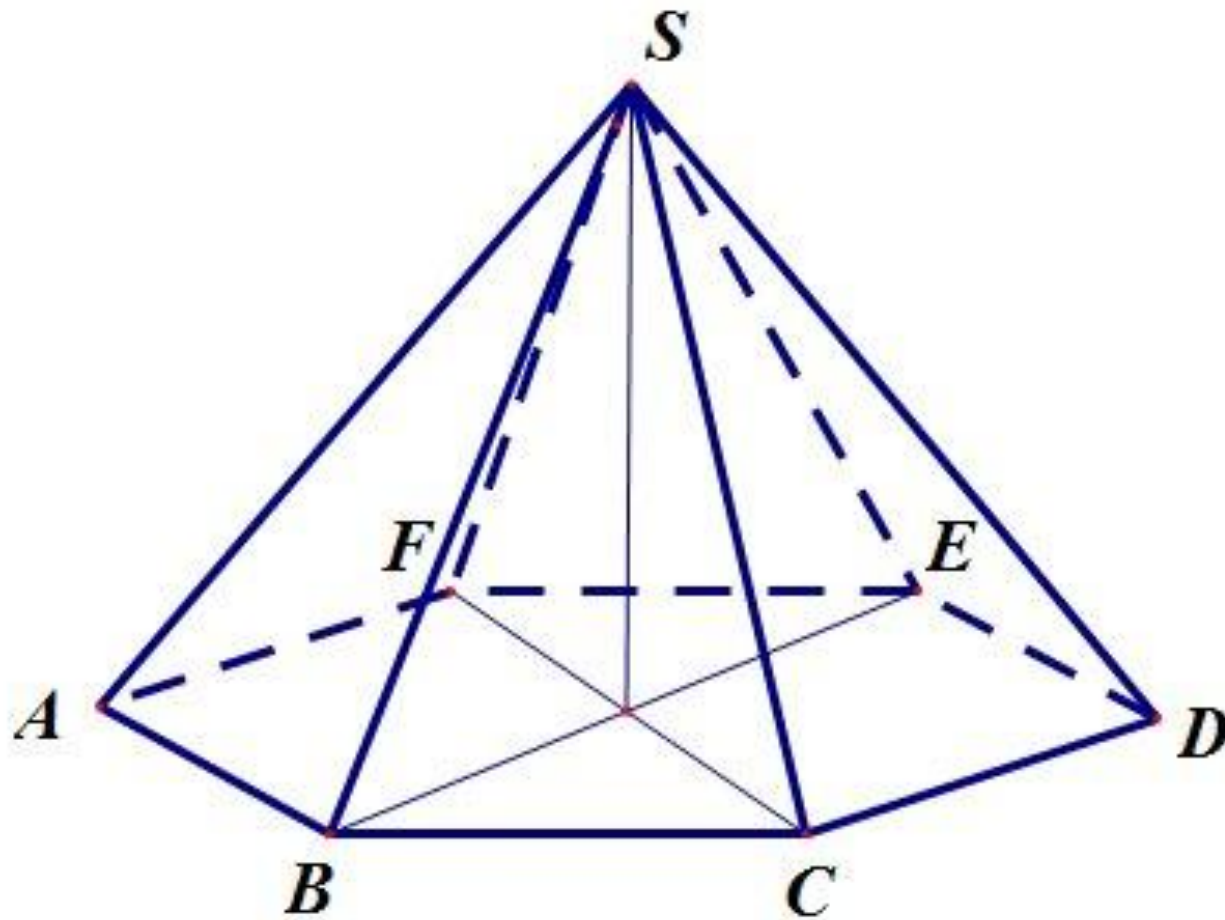
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{C} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{B} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{A}$$



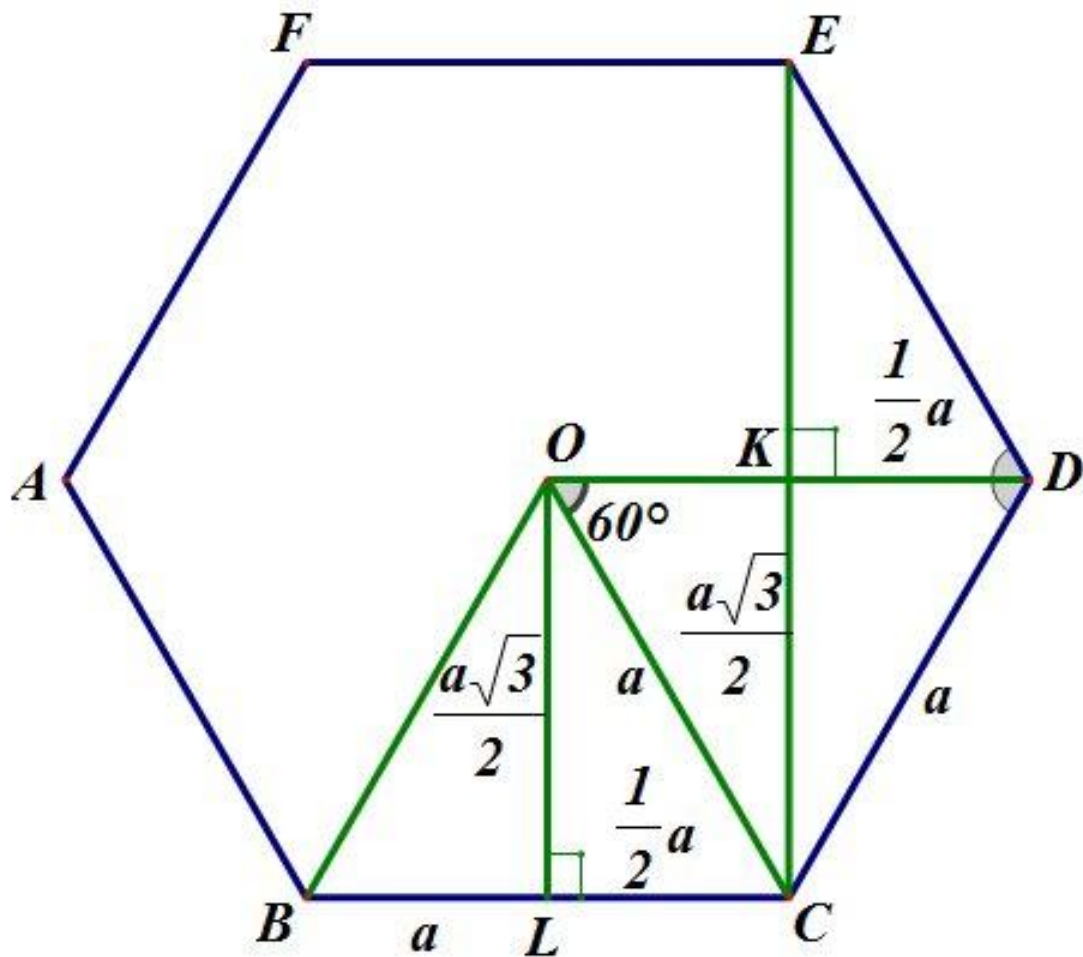
$$OS_1 = \frac{1}{3}AO = \frac{\sqrt{3}}{6}; AS_1 = \frac{2}{3}AO = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{из } \triangle ASS_1: SS_1 = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Правильная шестиугольная пирамида



Соотношение элементов в правильном шестиугольнике.



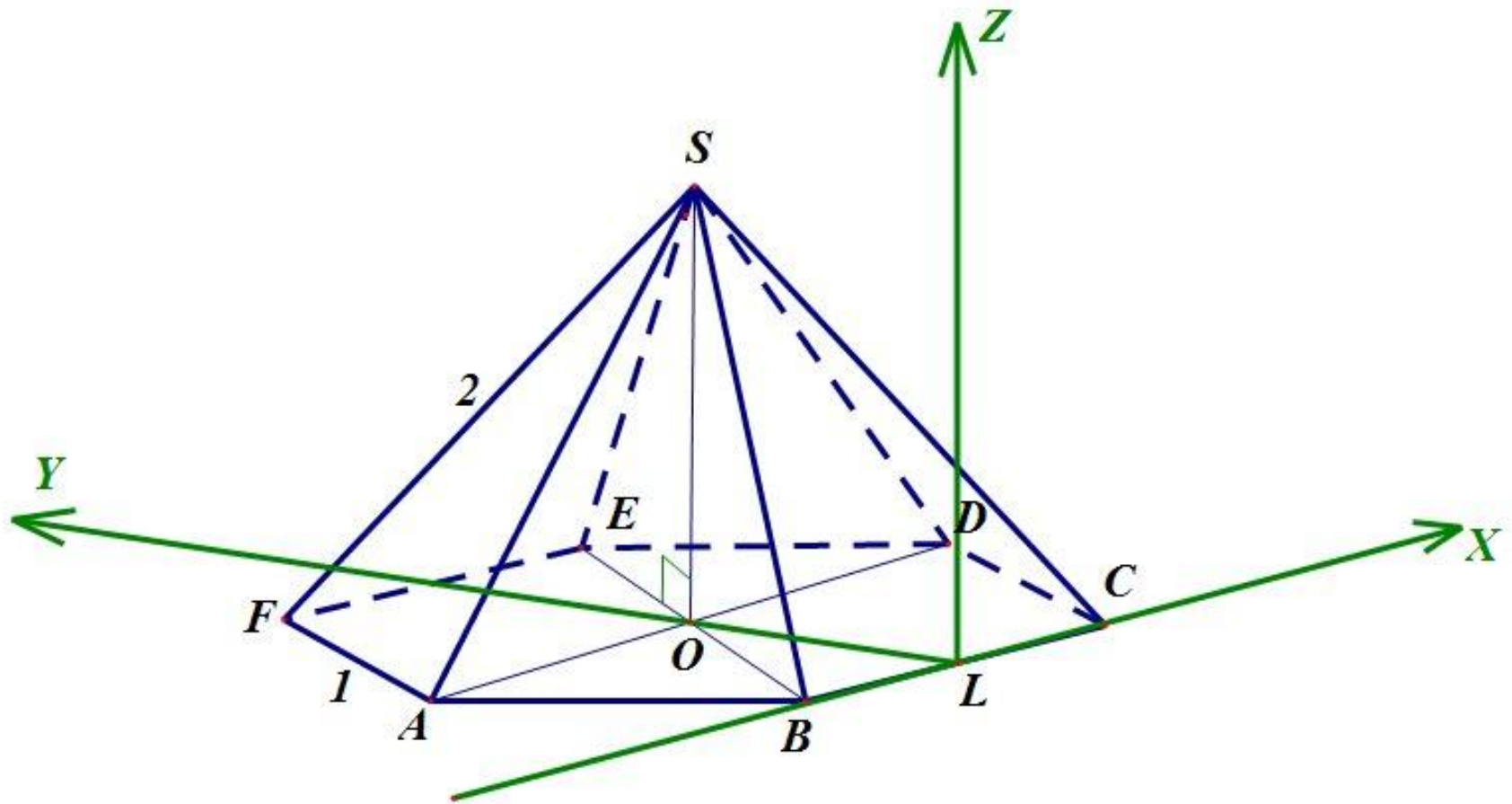
$$OL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BL = LC = \frac{a}{2}$$

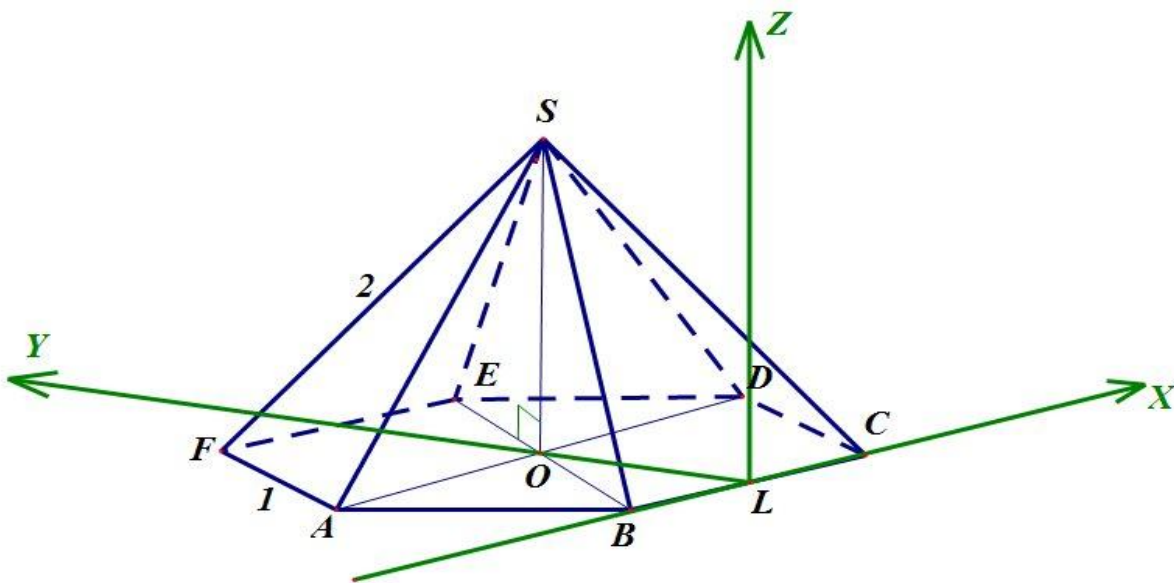
$$EC = a\sqrt{3}$$

OD перпенд. EC

В основании пирамиды правильный шестиугольник со стороной 1. Боковое ребро равно 2.

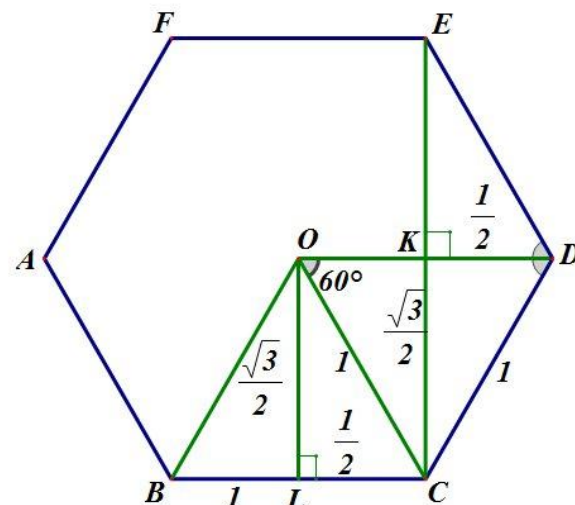


В основании пирамиды правильный шестиугольник со стороной 1. Боковое ребро равно 2.



$$C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right); B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right); D\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$E\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}; 0\right); S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$$



$$OL = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

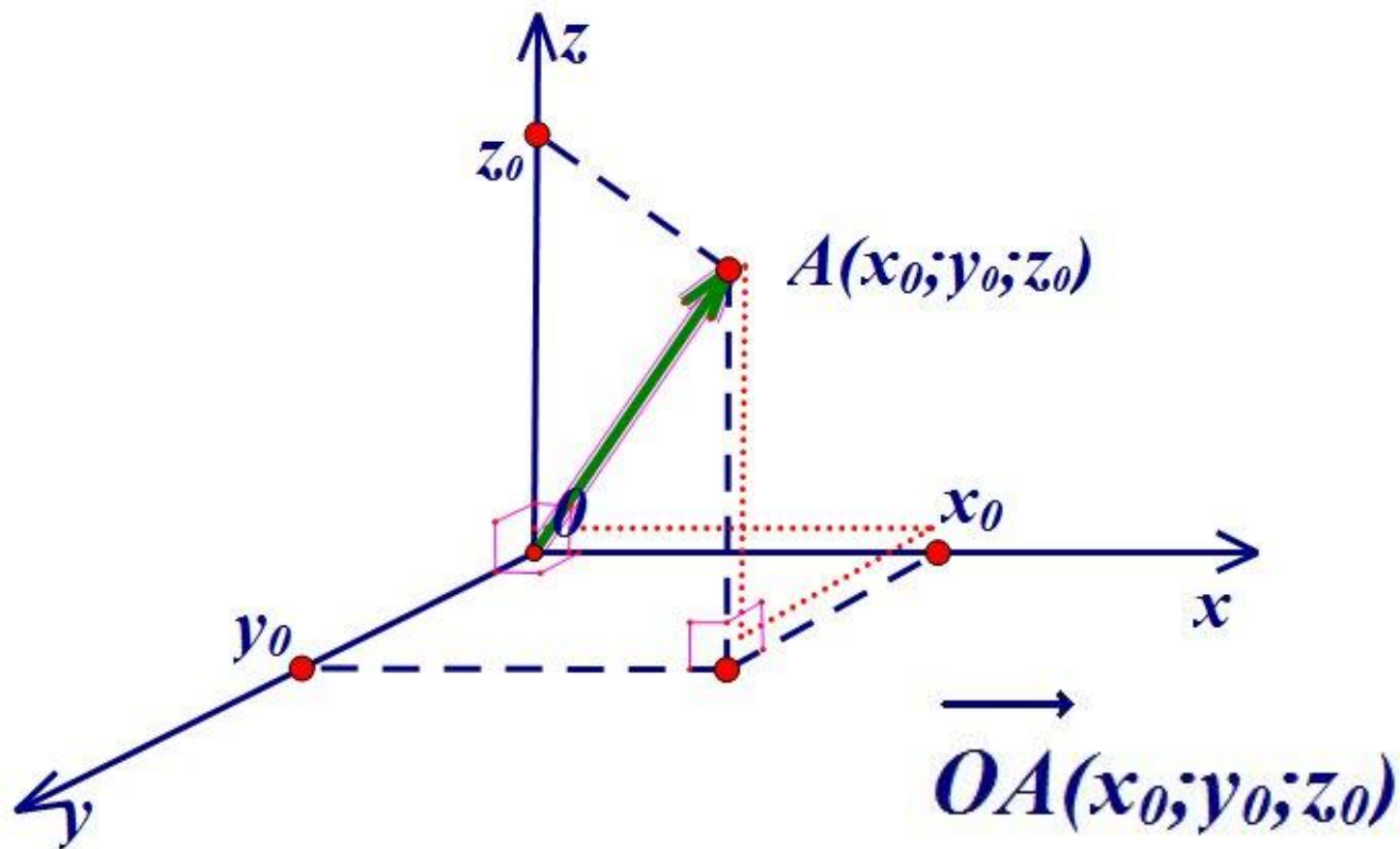
$$BL = LC = \frac{1}{2}$$

$$EC = \sqrt{3}$$

$$OD \text{ перпенд. } EC$$

$$\text{из } \triangle OBS: OS = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$$

Координаты вектора, начало которого совпадает с
началом координат

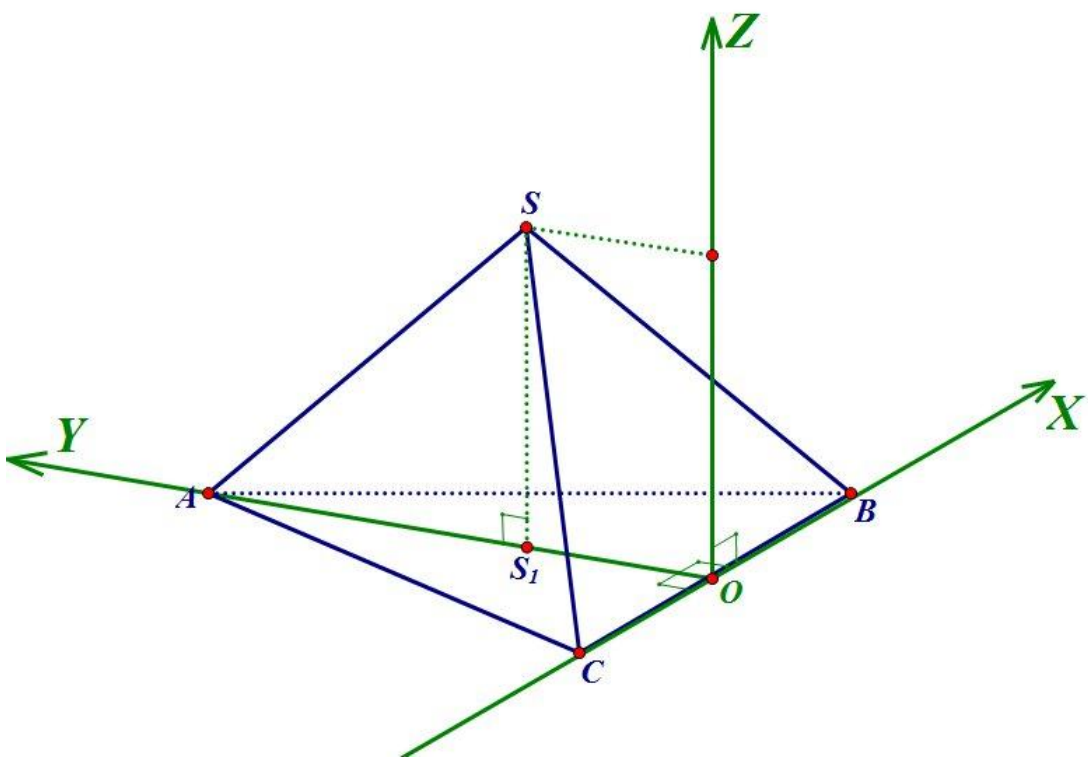


Координаты вектора, заданного координатами его концов

Если точка $A(x_1; y_1; z_1)$ является началом вектора $\overrightarrow{AB}$, а точка $B(x_2; y_2; z_2)$, то чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

Координаты вектора



$$B\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right); C\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right);$$

$$A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right); S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{CS}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\overrightarrow{AC}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\overrightarrow{BS}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка M делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A . Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.



$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка M делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A . Найдите координаты вектора AM .

1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{AB}(3 - 1; 2 - 2; -1 - (-4))$

$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка М делит отрезок АВ в отношении 2:1, считая от точки А. Найдите координаты вектора АМ.

1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$
 $\overrightarrow{AB}(3 - 1; 2 - 2; -1 - (-4))$
 $\overrightarrow{AB}(2; 0; 3)$

$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка M делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A . Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(3 - 1; 2 - 2; -1 - (-4))$$
$$\overrightarrow{AB}(2; 0; 3)$$

2. Точка M делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A . Вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и его длина равна $\frac{2}{3}$ длины вектора $\overrightarrow{AB}$

$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка M делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A . Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(3 - 1; 2 - 2; -1 - (-4))$$

$$\overrightarrow{AB}(2; 0; 3)$$

2. Точка M делит отрезок AB в отношении $2:1$, считая от точки A . Вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и его длина равна $\frac{2}{3}$ длины вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка М делит отрезок АВ в отношении 2:1, считая от точки А. Найдите координаты вектора АМ.

1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(3 - 1; 2 - 2; -1 - (-4))$$

$$\overrightarrow{AB}(2; 0; 3)$$

2. Точка М делит отрезок АВ в отношении 2:1, считая от точки А. Вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и его длина равна $\frac{2}{3}$ длины вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} \left(\frac{2}{3} \times 2; 0; \frac{2}{3} \times 3 \right)$$

$A(1; 2; -4); B(3; 2; -1)$. Точка М делит отрезок АВ в отношении 2:1, считая от точки А. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AM}$.

1. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}(3 - 1; 2 - 2; -1 - (-4))$$

$$\overrightarrow{AB}(2; 0; 3)$$

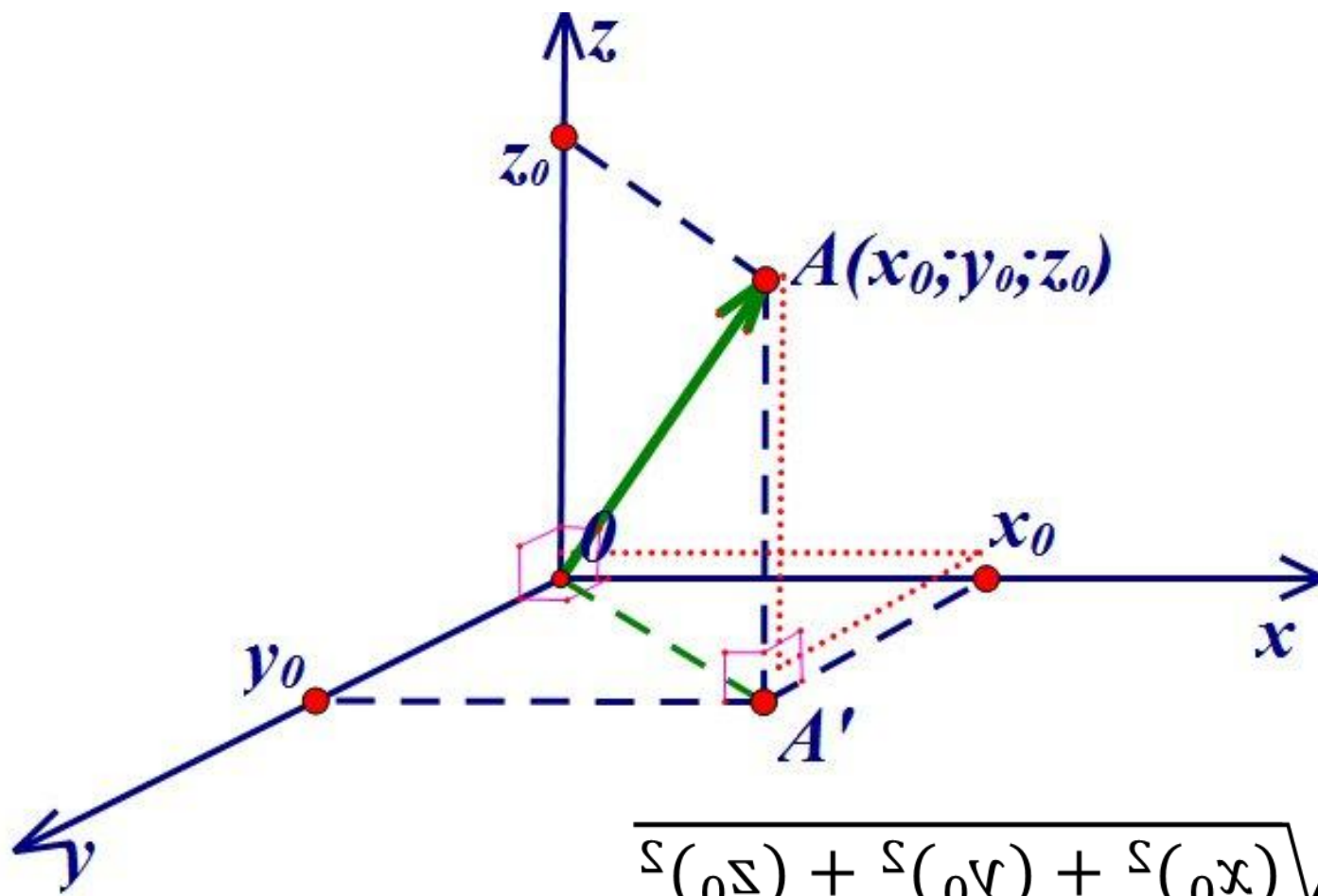
2. Точка М делит отрезок АВ в отношении 2:1, считая от точки А. Вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и его длина равна $\frac{2}{3}$ длины вектора $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} \left(\frac{2}{3} \times 2; 0; \frac{2}{3} \times 3 \right)$$

$$\overrightarrow{AM} \left(\frac{4}{3}; 0; 2 \right)$$

Длина вектора

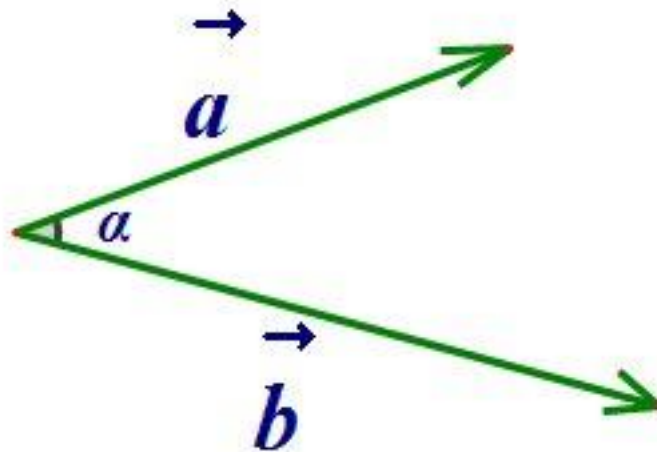


$$\sqrt{s_{(0z)}^2 + s_{(0y)}^2 + s_{(0x)}^2} = |\vec{OA}|$$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$



Скалярное произведение векторов

Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$$
$$\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$$

то скалярное произведение этих векторов можно вычислить по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат.

Косинус угла между векторами

- $$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$
$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

Условие перпендикулярности векторов

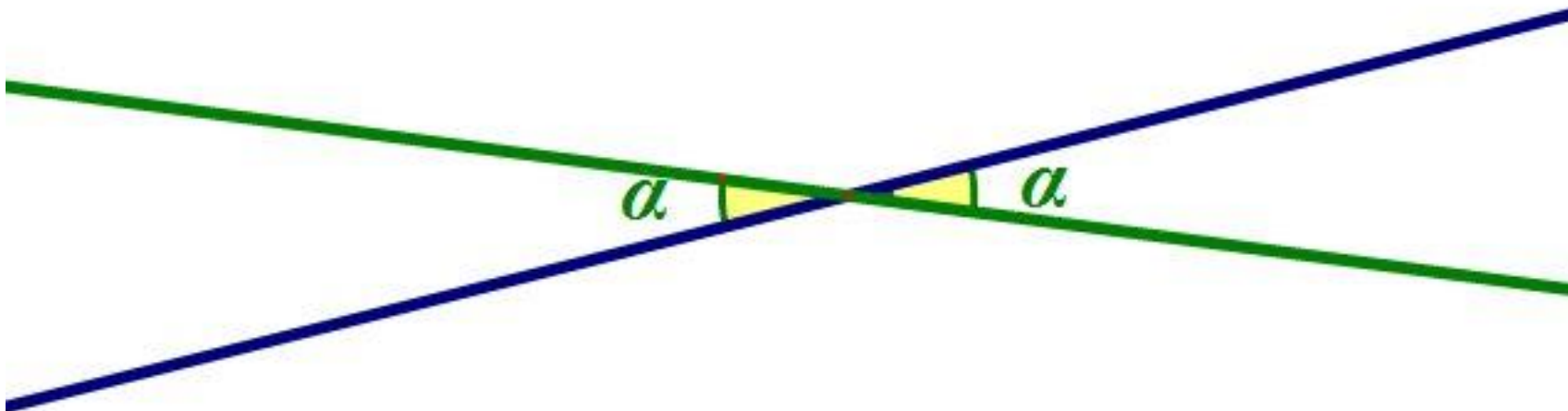
Два вектора : $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$
 $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$

перпендикулярны, если их скалярное
произведение равно нулю, то есть если
выполняется равенство

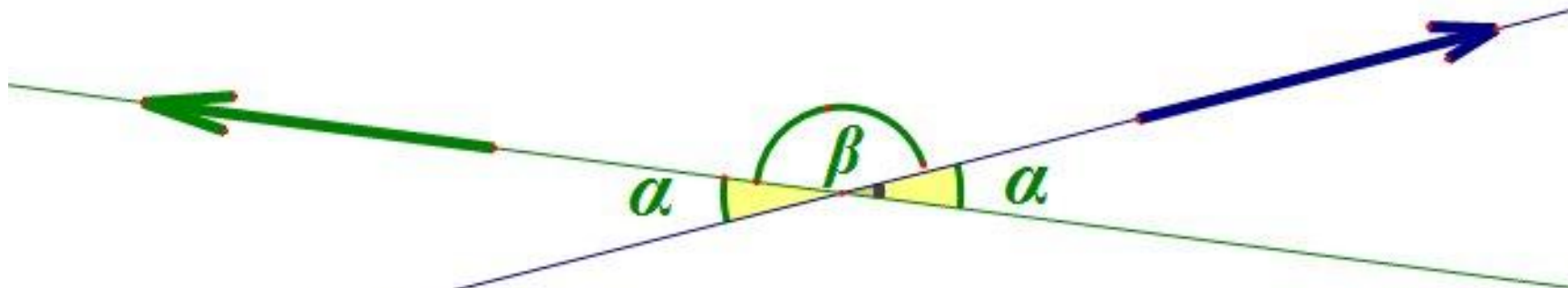
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$$

Угол между пересекающимися прямыми

Углом между двумя пересекающимися прямыми называется **меньший** из двух углов, образованных этими прямыми:



Угол между пересекающимися прямыми

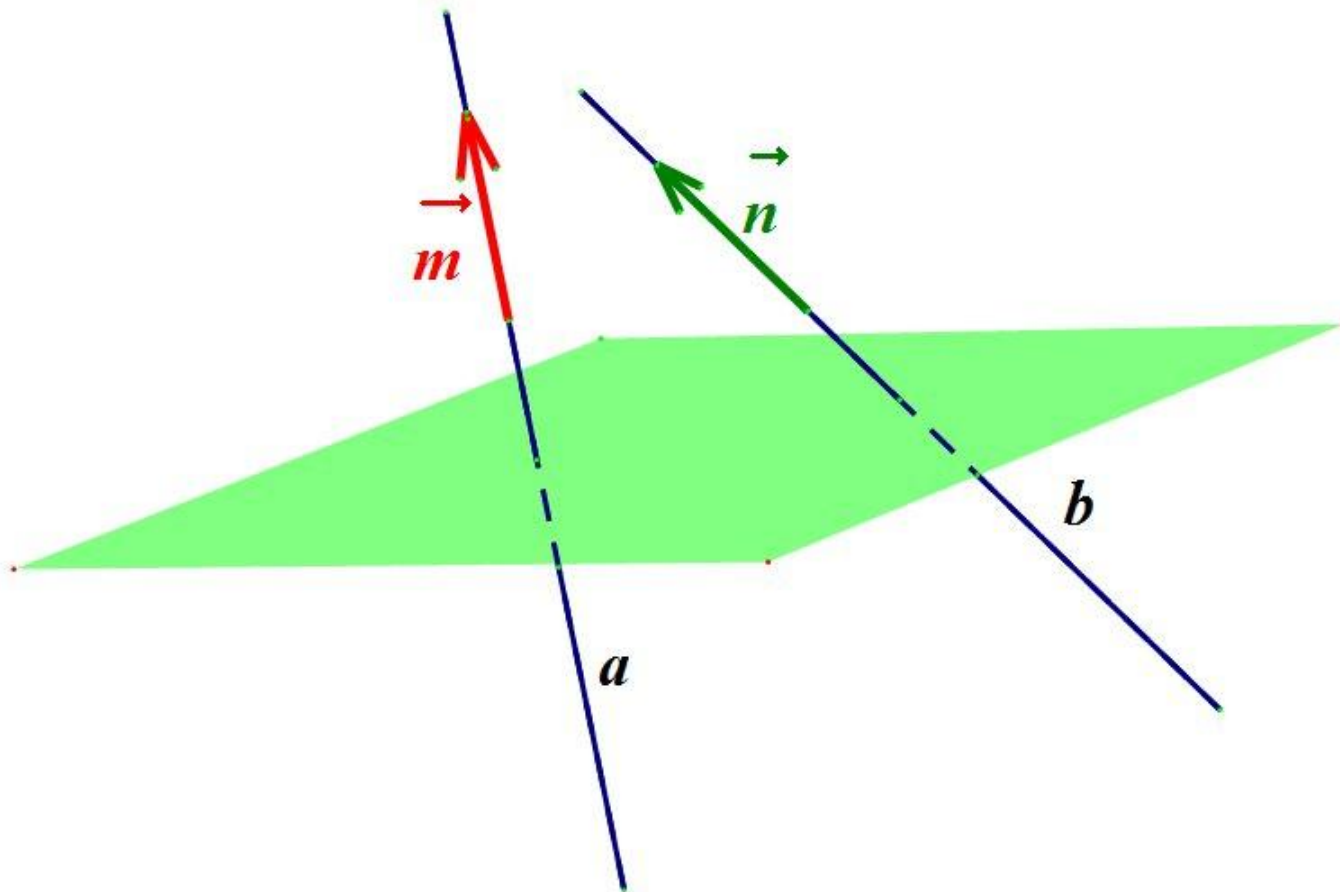


$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\cos \alpha = |\cos \beta|$$

Косинус угла между прямыми равен модулю косинуса угла между направляющими векторами этих прямых.

Угол между скрещивающимися прямыми

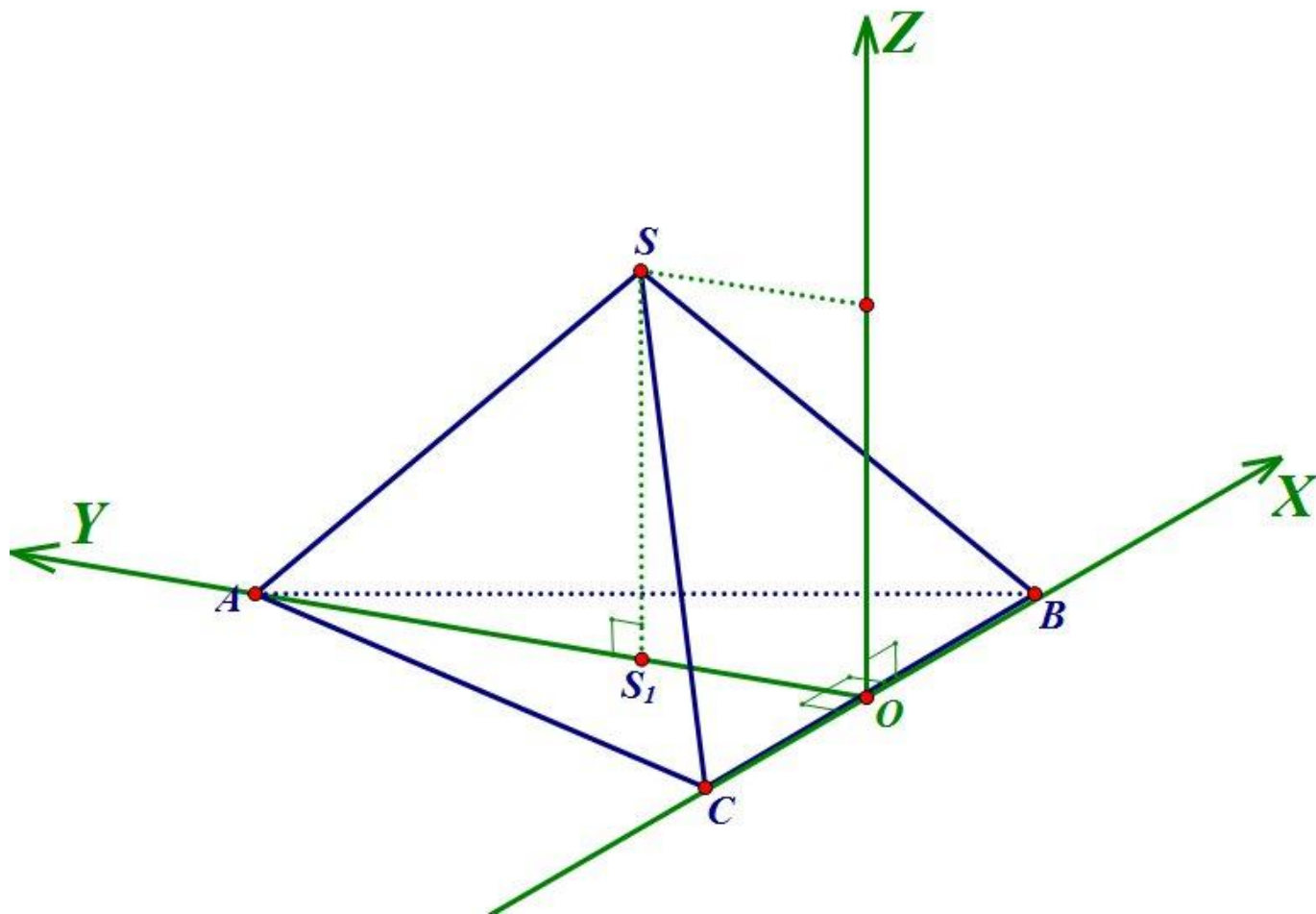


Угол между скрещивающимися прямыми

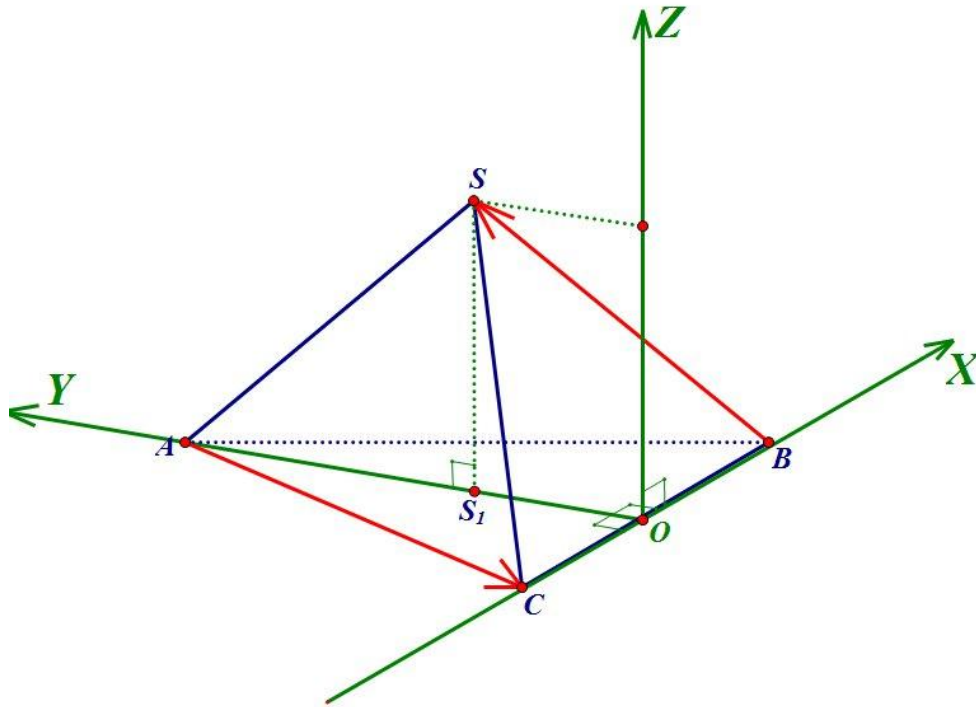
- Чтобы найти косинус угла между скрещивающимися прямыми, нужно найти **модуль** косинуса угла между направляющими векторами этих прямых:
 $\vec{m}(x_1; y_1; z_1); \vec{n}(x_2; y_2; z_2)$

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

В правильной треугольной пирамиде $ABCS$,
все ребра которой равны 1, найти косинус
угла между прямыми AC и BS .



В правильной треугольной пирамиде $ABCS$, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AC и BS .



$$\overrightarrow{AC} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$\overrightarrow{BS} \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

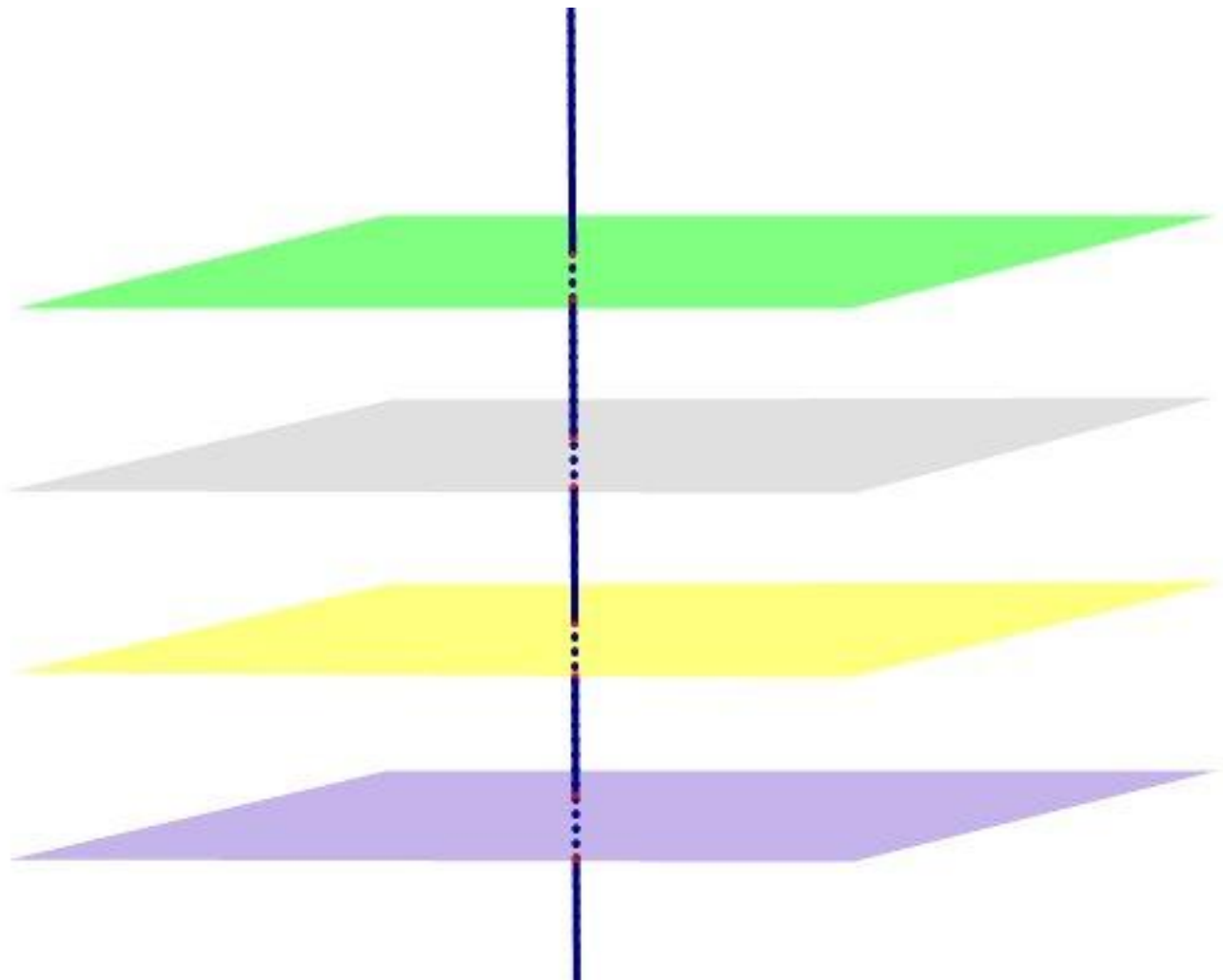
В правильной треугольной пирамиде ABCS, все ребра которой равны 1, найти косинус угла между прямыми AC и BS.

- $$\cos \alpha = \frac{|(-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) + (-\frac{\sqrt{3}}{2}) \times \frac{\sqrt{3}}{6} + 0|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6})^2 + (\sqrt{\frac{2}{3}})^2}}$$

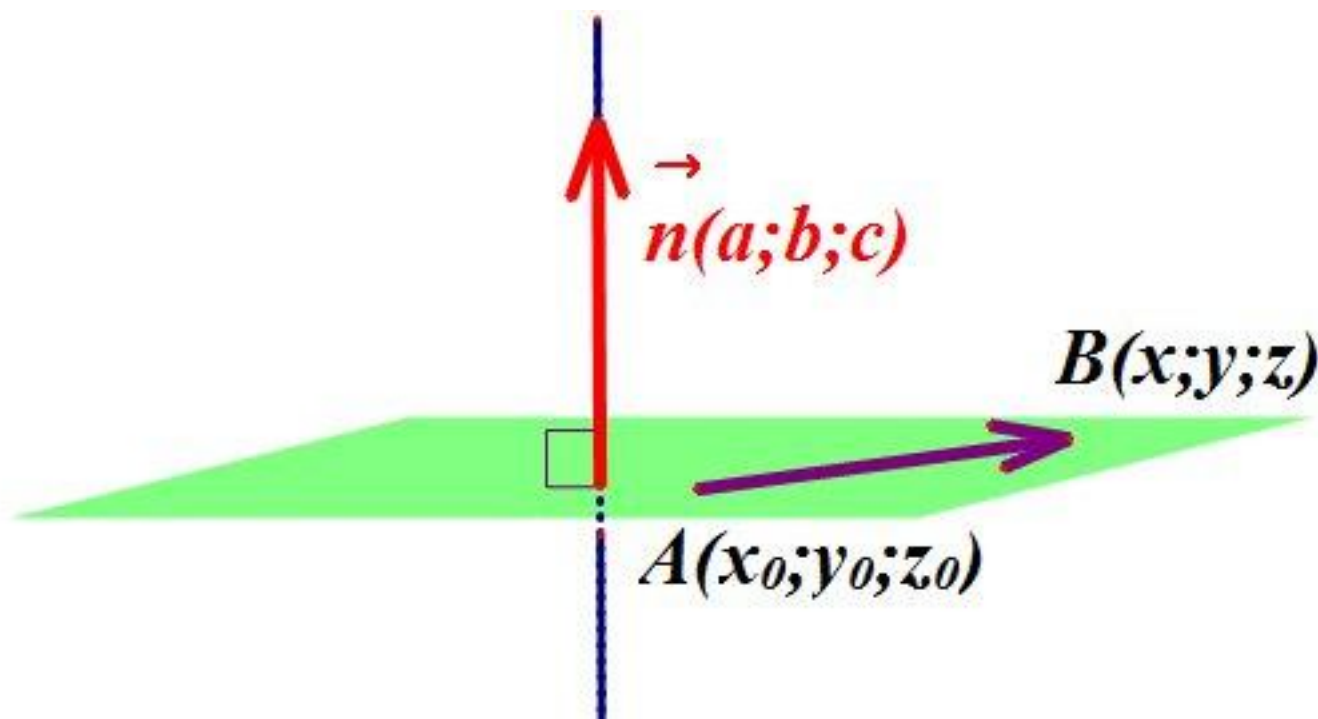
$$= \frac{|\frac{1}{4} - \frac{3}{12}|}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6})^2 + (\sqrt{\frac{2}{3}})^2}} = 0$$

$\alpha = 90^\circ$

Уравнение плоскости

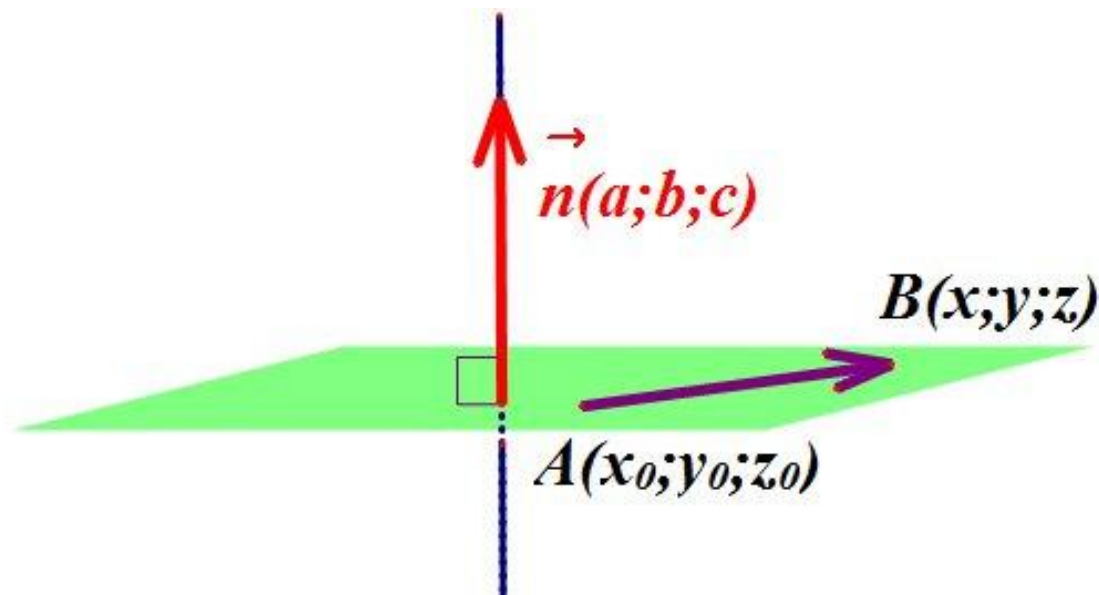


Уравнение плоскости



$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Уравнение плоскости



$$\overrightarrow{AB}(x - x_0; y - y_0; z - z_0);$$
$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

Уравнение плоскости

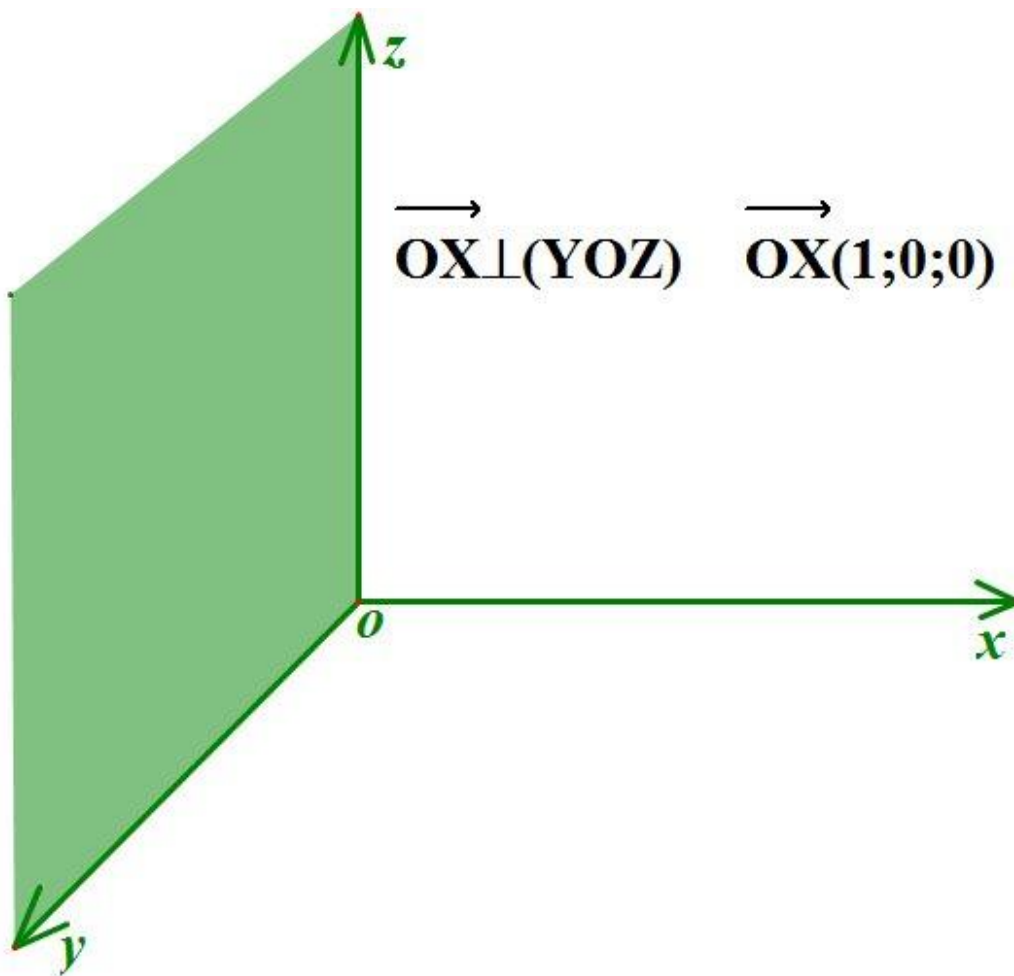
Уравнение плоскости имеет вид:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

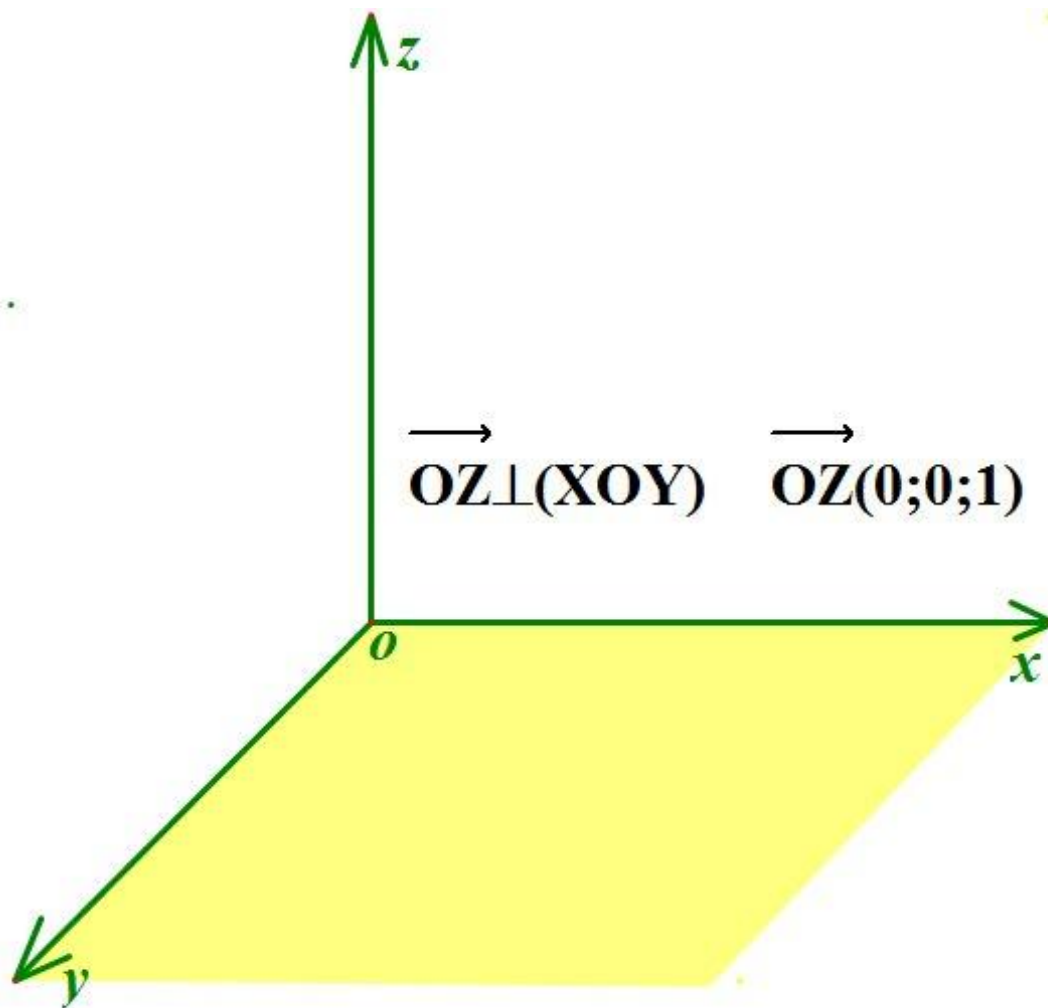
где $(a; b; c)$ - координаты вектора нормали.

Вектор нормали – это произвольный вектор, перпендикулярный плоскости.

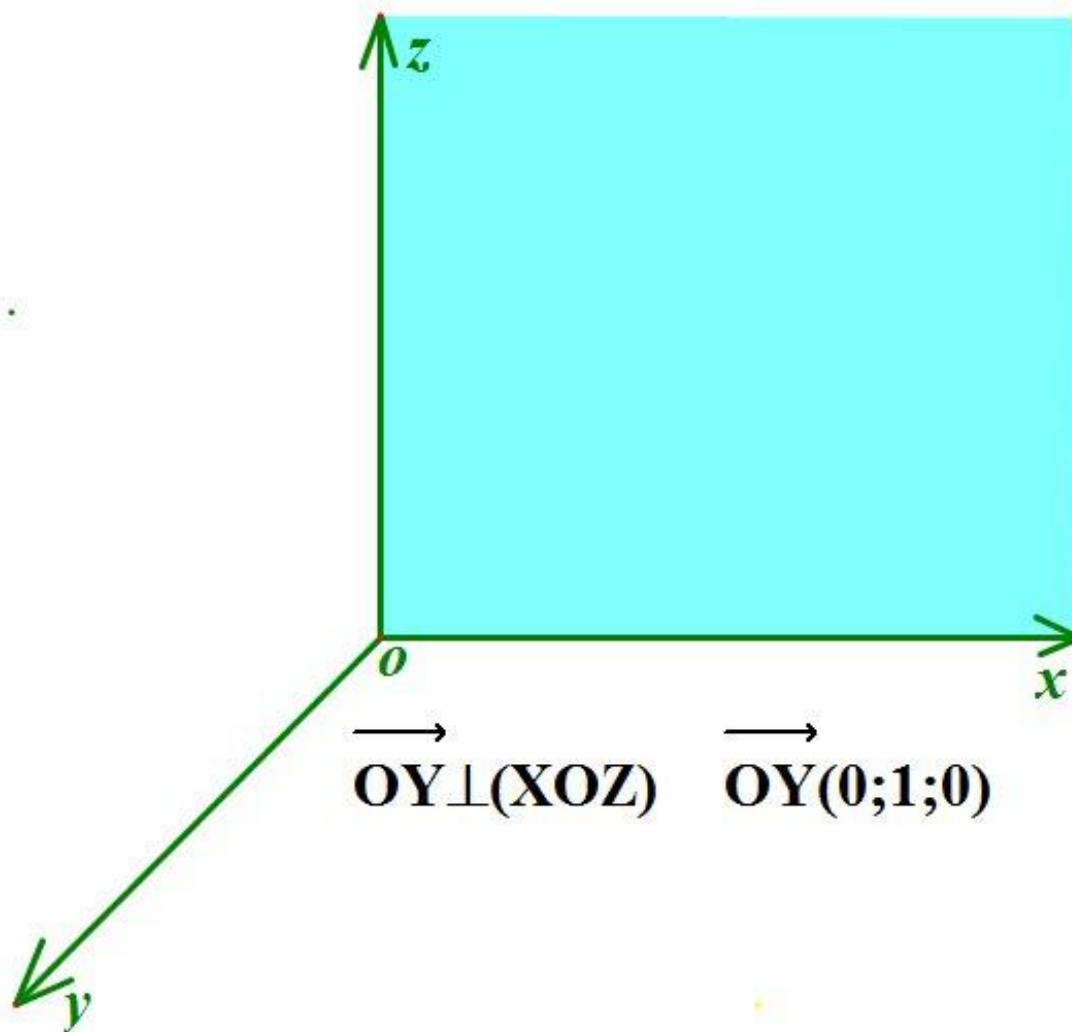
Вектор нормали к плоскости YOZ



Вектор нормали к плоскости XOZ



Вектор нормали к плоскости XOZ

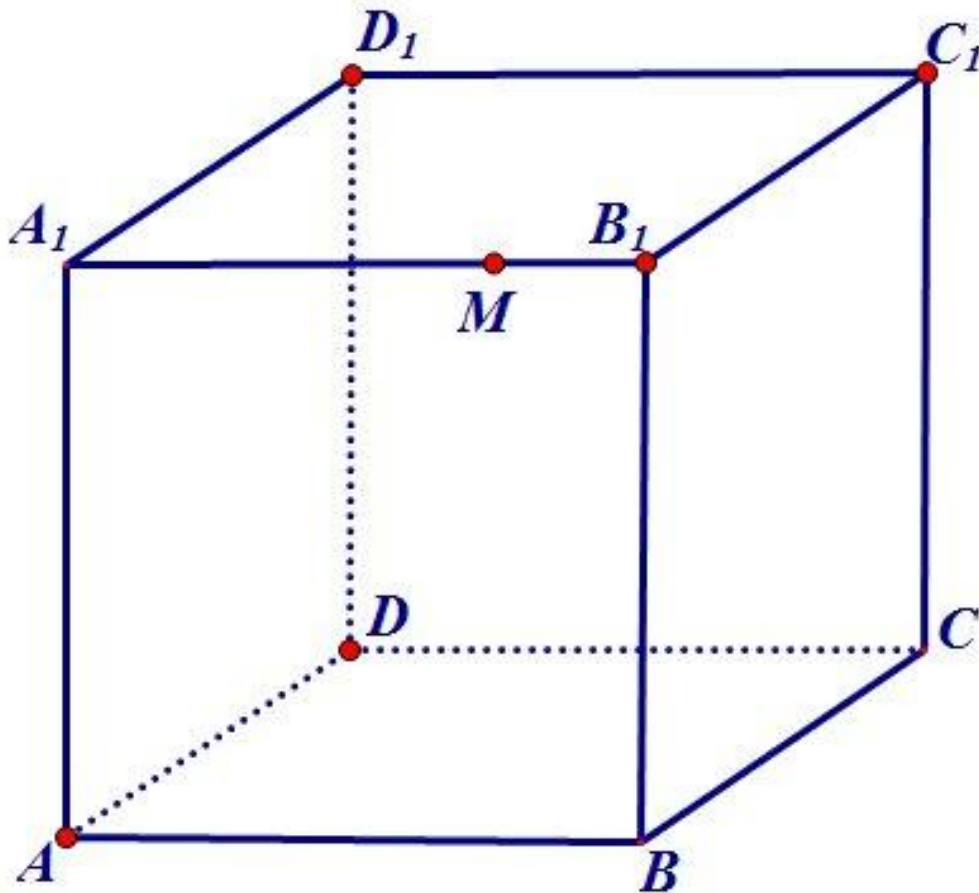


Уравнение плоскости

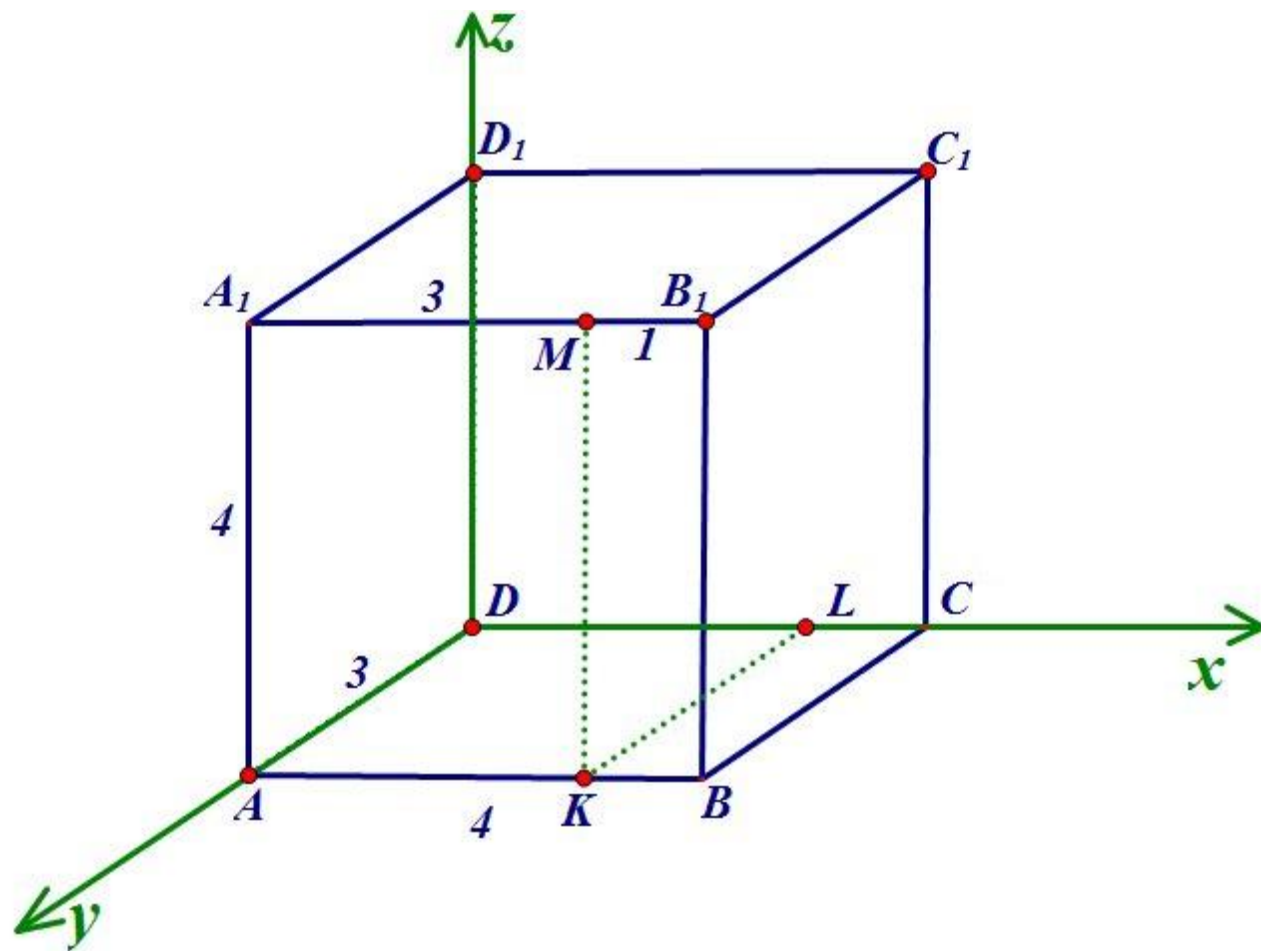
Если один из коэффициентов в уравнении плоскости равен нулю, уравнение называется **неполным**.

- При $d = 0$ плоскость проходит через начало координат,
- при $a = 0$ (или $b = 0, c = 0$) плоскость параллельна оси OX (соответственно OY или OZ).
- При $a = b = 0$ ($a = c = 0$, или $b = c = 0$) плоскость параллельна плоскости XOY (соответственно XOZ или YOZ).

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $3:1$, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .



В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .



$$\begin{aligned} A(0; 3; 0) \\ M(3; 3; 4) \\ C_1(4; 0; 4) \end{aligned}$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .

Подставим координаты точек

$$A(0; 3; 0)$$

$$M(3; 3; 4)$$

$$C_1(4; 0; 4)$$

в уравнение плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$

Так как плоскость не проходит через начало координат, примем $d = 1$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $3:1$, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \times 0 + b \times 3 + c \times 0 + 1 = 0 \\ a \times 3 + b \times 3 + c \times 4 + 1 = 0 \\ a \times 4 + b \times 0 + c \times 4 + 1 = 0 \end{cases}$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \times 0 + b \times 3 + c \times 0 + 1 = 0 \\ a \times 3 + b \times 3 + c \times 4 + 1 = 0 \\ a \times 4 + b \times 0 + c \times 4 + 1 = 0 \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} 3b + 1 = 0 \\ 3a + 3b + 4c + 1 = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \end{cases}$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении $3:1$, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .

● Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \times 0 + b \times 3 + c \times 0 + 1 = 0 \\ a \times 3 + b \times 3 + c \times 4 + 1 = 0 \\ a \times 4 + b \times 0 + c \times 4 + 1 = 0 \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} 3b + 1 = 0 \\ 3a + 3b + 4c + 1 = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ 3a - 1 + 4c + 1 = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \end{cases}$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка M делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки A , M , C_1 .

● Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a \times 0 + b \times 3 + c \times 0 + 1 = 0 \\ a \times 3 + b \times 3 + c \times 4 + 1 = 0 \\ a \times 4 + b \times 0 + c \times 4 + 1 = 0 \end{cases}$$

Упростим:

$$\begin{cases} 3b + 1 = 0 \\ 3a + 3b + 4c + 1 = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ 3a - 1 + 4c + 1 = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{1}{3} \\ 3a + 4c = 0 \\ 4a + 4c + 1 = 0 \end{cases}$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка М делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки А, М, C_1 .

- $$a = -1; b = -\frac{1}{3}; c = \frac{3}{4}$$

Подставим значения коэффициентов в уравнение плоскости:

$$-x - \frac{1}{3}y + \frac{3}{4}z + 1 = 0$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$, точка М делит ребро $A_1 B_1$ в отношении 3:1, считая от точки A_1 . Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки А, М, C_1 .

- $$a = -1; b = -\frac{1}{3}; c = \frac{3}{4}$$

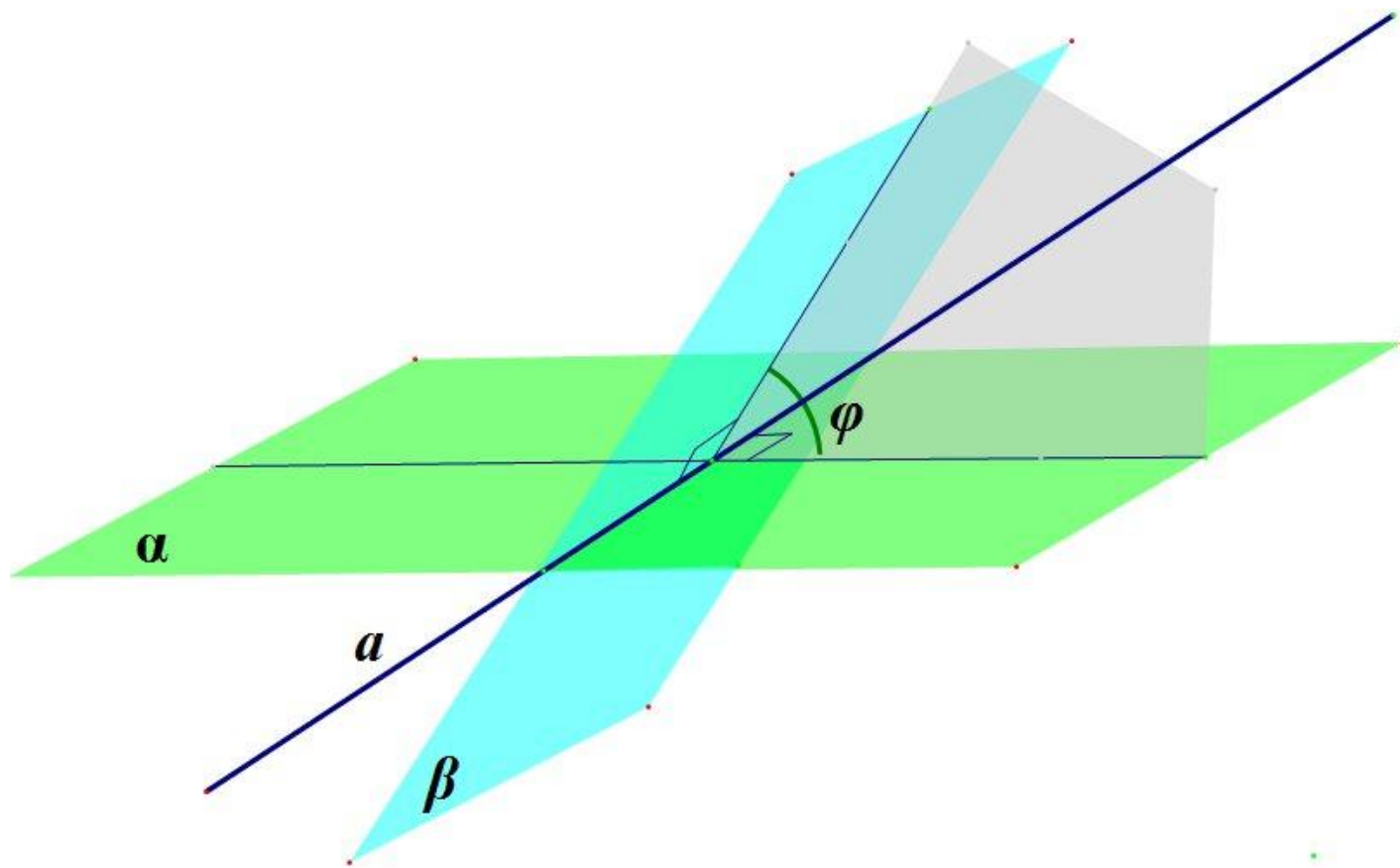
Подставим значения коэффициентов в уравнение плоскости:

$$-x - \frac{1}{3}y + \frac{3}{4}z + 1 = 0$$

Умножим на -12:

$$\mathbf{12x + 4y - 9z - 12 = 0}$$

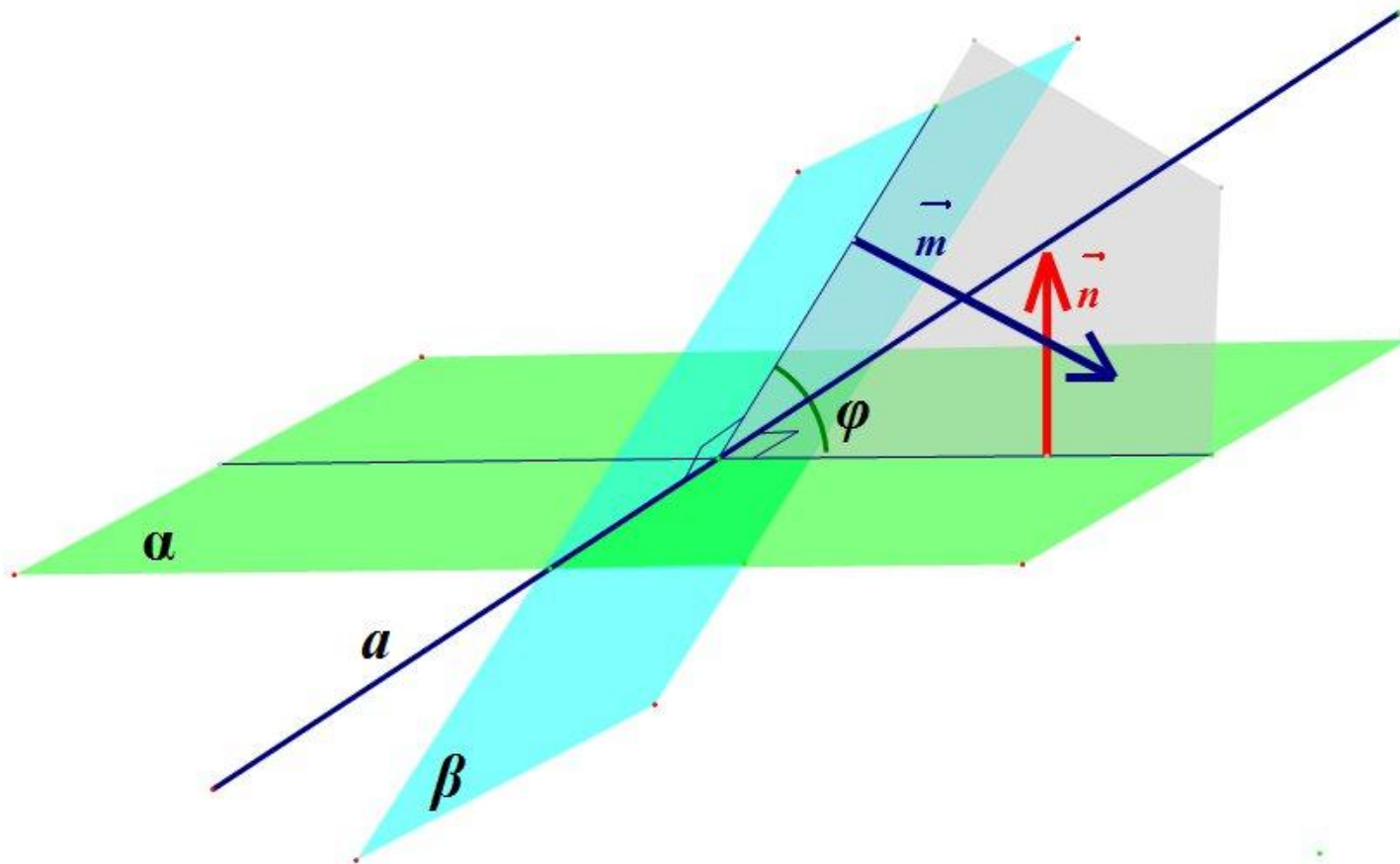
Угол между плоскостями



Угол между плоскостями

1. Угол между двумя плоскостями – это **меньший** из двух углов, образованных этими плоскостями.
2. Угол между двумя плоскостями равен **меньшему** из двух двугранных углов, образованных этими плоскостями. **Линейный угол двугранного угла** – это угол между двумя перпендикулярами, лежащими в этих плоскостях, проведенными к линии пересечения плоскостей. Двугранный угол измеряется величиной линейного угла.

Угол между плоскостями



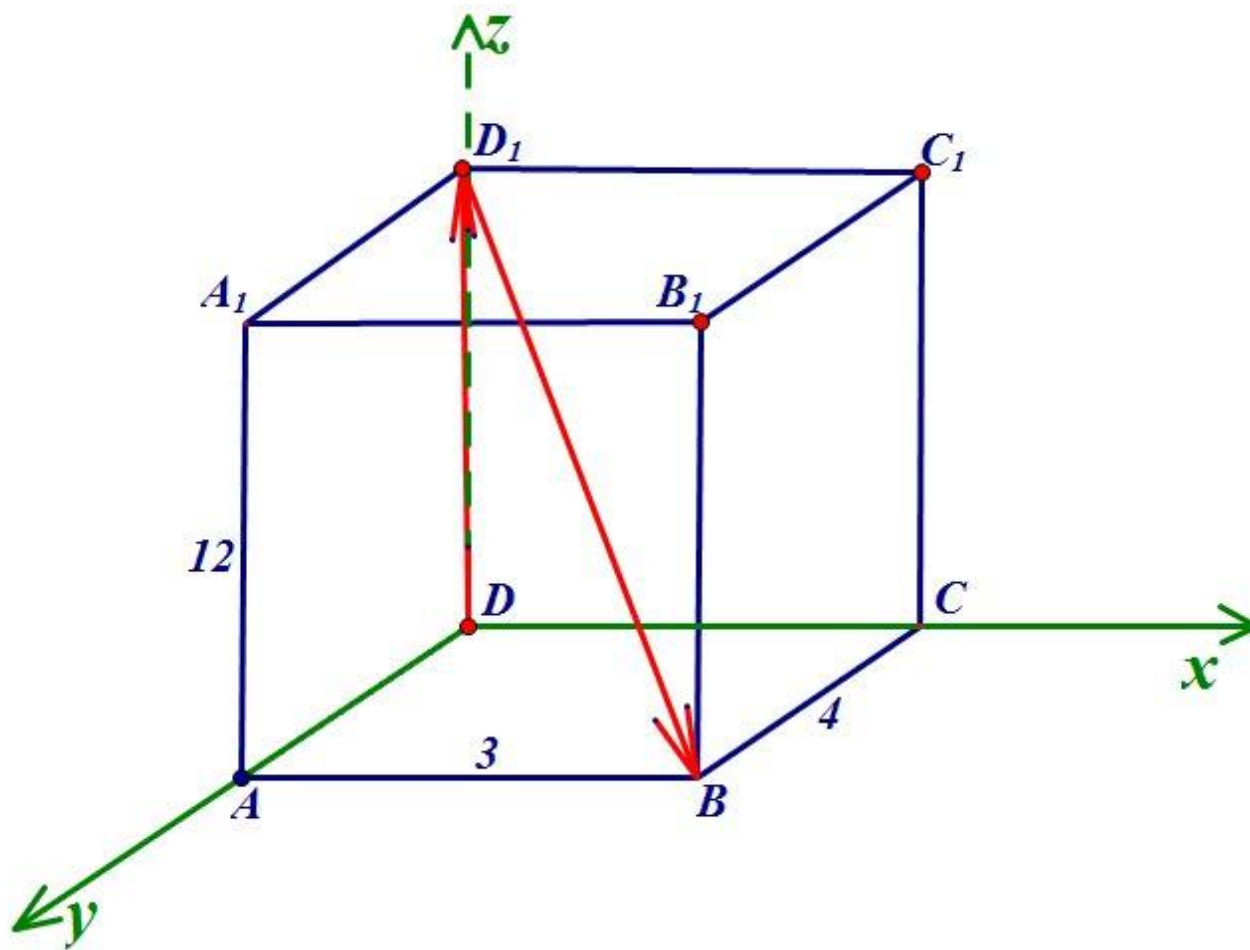
Угол между плоскостями

Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между векторами нормалей к этим плоскостям:

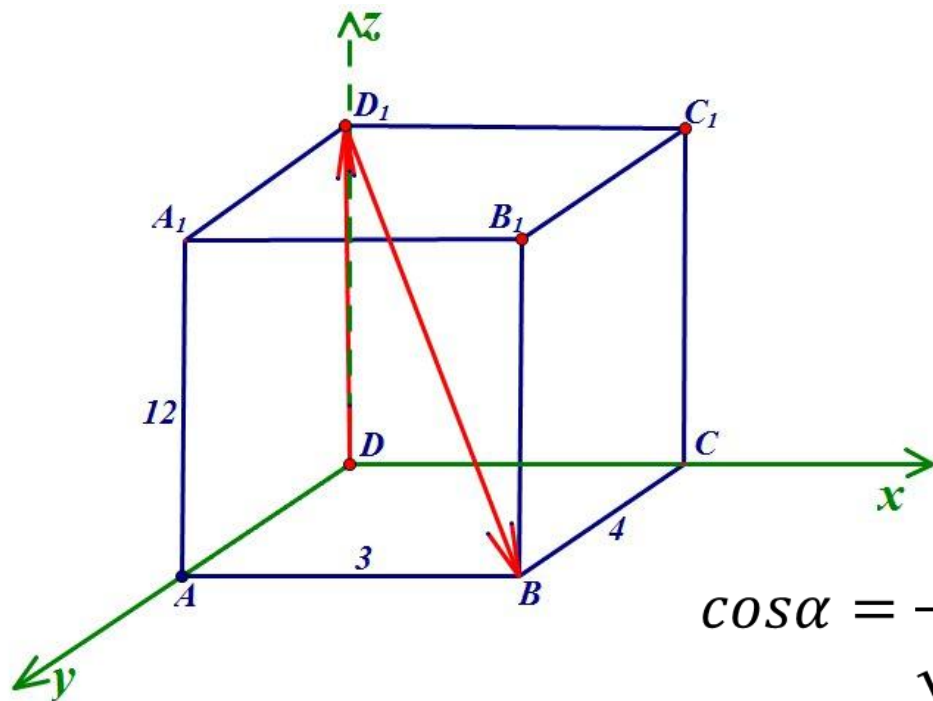
$$\vec{m}(x_1; y_1; z_1); \vec{n}(x_2; y_2; z_2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 3$; $BC = 4$; $AA_1 = 12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол, образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.



В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 3$; $BC = 4$; $AA_1 = 12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол, образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.



$$D_1(0; 0; 12)$$

$$B(3; 4; 0)$$

$$\overrightarrow{D_1 B}(3; 4; -12)$$

$$\overrightarrow{DD_1}(0; 0; 12)$$

$$\cos \alpha = \frac{|-144|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} \times 12}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\alpha = \arccos \frac{12}{13}$$