Формирование базовых компетенций студентов технического университета

**М.А.Вигура, О.А.Кеда, А.Ф.Рыбалко,
Н.М.Рыбалко, А.Б.Соболев**

Математика

Поточная практика 7.1
Аналитическая геометрия
Прямая на плоскости

УГТУ-УПИ
2007г.

Цель занятия:

1. Овладеть соответствующим математическим аппаратом для дальнейшего изучения курса математики, демонстрировать и использовать математические методы в ходе изучения специальных дисциплин для будущей профессиональной деятельности.

2. Уметь решать разнообразные задачи о расположении прямых на плоскости.

Формируемые компетенции по ФГОС:

ОНК1: способность и готовность использовать фундаментальные математические законы в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и теоретического исследования.

ИК1: способность использовать современные средства вычислительной техники, коммуникаций и связи.

ИК4: готовность работать с информацией из различных источников (сбор, обработка, анализ, систематизация, представление).

СЛК3: способность самостоятельно приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

Прямая на плоскости.

Прямая на плоскости.

1.Теоретическая часть
2.Задачи
3.Решения задач

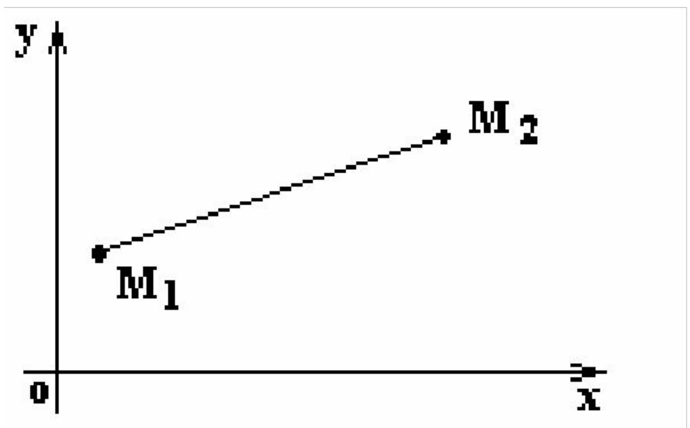
Прямая на плоскости.

Прямая на плоскости.

Оглавление:

1.ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТИ

Расстояние между двумя точками



$$M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2)$$

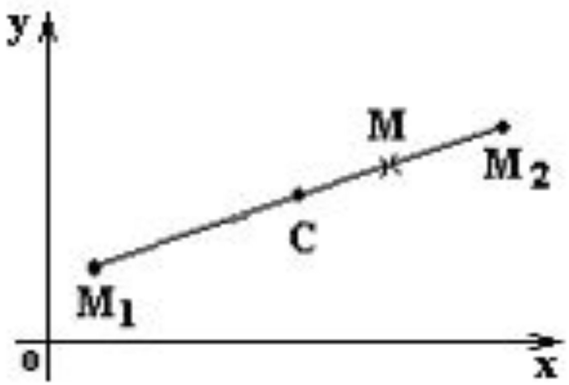
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$$

$$d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Деление отрезка в данном отношении



Точка $M(x,y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ :

$$\frac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|}=\lambda, \quad \left|\overrightarrow{M_1M}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|, \quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda,$$

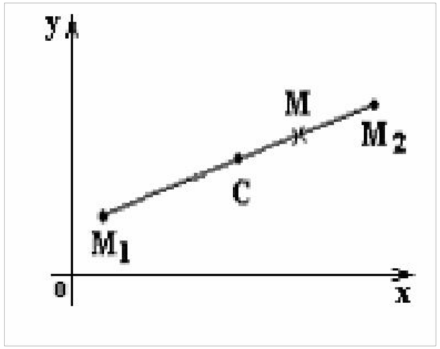
координаты точки M находятся по формулам:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda\, x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda\, y_2}{1+\lambda} \end{cases}.$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Координаты середины отрезка



$M_1C=CM_2$, $\lambda=1$:

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}, y_c=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

2.ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Общее уравнение прямой

Общее уравнение прямой на плоскости XOY получается из общего уравнения плоскости в пространстве при $z = 0$.

$$L\colon Ax+By+C=0.$$

$$A = 0 \ (B = 0) \Longrightarrow L \parallel OX \ (\parallel OY); \qquad C=0 \Longrightarrow (0,0) \in L.$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A,B\}$, принимает вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Канонические и параметрические уравнения прямой

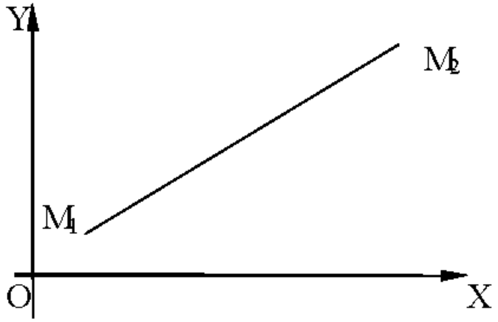
Уравнения прямой, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a} = \{l, m\}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} t \in (-\infty, \infty).$$

Прямая на плоскости.

Уравнение прямой, проходящей через две точки



$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2)$$

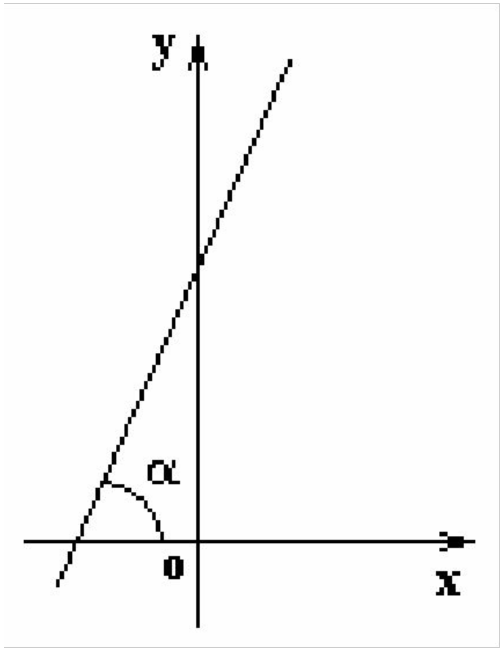
$$z = z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении



Прямая составляет угол α с осью OX.

Угловым коэффициентом прямой называется число $k = \mathrm{tg}\alpha$.

Из общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$, $B \neq 0 \Rightarrow$

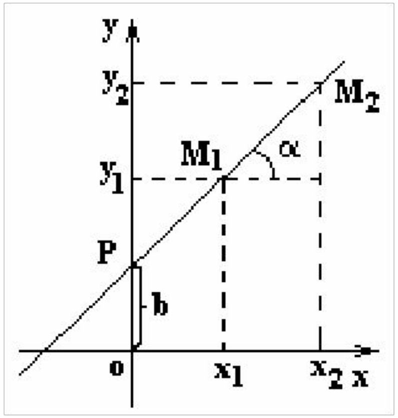
$$y = k\,x + b,\quad k = -\frac{A}{B},\quad b = -\frac{C}{B}.$$

Прямая пересекает ось OY в точке $(0,b)$.

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении



Прямая задана двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$.

Из уравнения прямой, проходящей через две точки, имеем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha = k.$$

$$y = y_1 + k(x - x_1).$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Уравнение прямой в отрезках

Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ может быть преобразовано к виду уравнения прямой «в отрезках»: $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Прямая в отрезках пересекает ось OX в точке $A(a,0)$ и ось OY в точке $B(0,b)$.

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Нормальное уравнение прямой

Из нормального уравнения плоскости в пространстве, полагая z = 0 и учитывая, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

получаем нормальное уравнение прямой на плоскости в виде:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

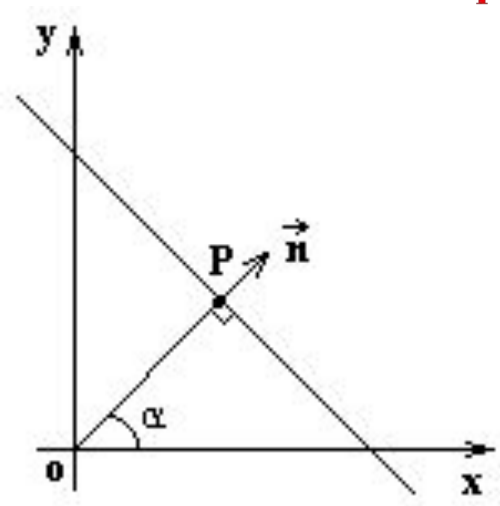
Здесь $|\overrightarrow{OP}| = p$ - расстояние от прямой до начала координат,

α - угол между перпендикуляром к прямой и осью OX.

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Нормальное уравнение прямой



Умножим $Ax+By+C=0$
на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Знак числа μ должен быть противоположен знаку C.
Косинусы углов, образуемых прямой с осями координат, называются **направляющими косинусами прямой**.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1.$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Расстояние от точки до прямой

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой L: $Ax+By+C=0$, $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$:

$$\rho(M_o, L) = d = |\delta| = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| =$$

$$= \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

$\delta > 0$ - точка M_0 и начало координат лежат по разные стороны от прямой, в противном случае $\delta < 0$.

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Координаты точки пересечения двух прямых

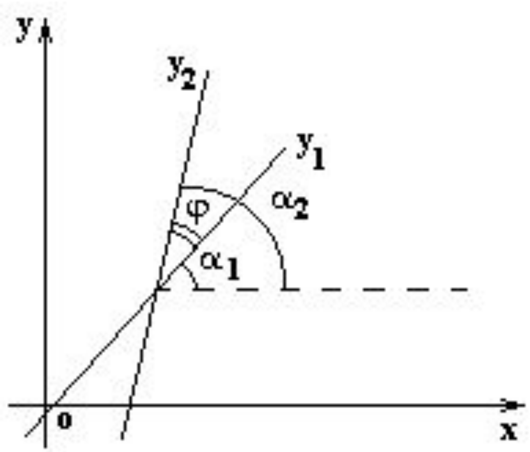
$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0),$$

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ \grave{A}_2 & B_2 \end{vmatrix}},\ y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$ по формулам Крамера, если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Угол между двумя прямыми



$$L_1: \quad y_1 = k_1 x + b_1,$$

$$L_2: \quad y_2 = k_2 x + b_2.$$

Острый угол φ пересечения этих прямых (отсчитываемый против часовой стрелки) находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \left| \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} \right|$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|.$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$L_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,\quad L_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{A_1}{B_1},\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

угол φ между прямыми определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|.$$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

$$L_1: \; y_1 = k_1 x + b_1, \quad L_2: \; y_2 = k_2 x + b_2.$$

$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow k_1 = k_2$ $\quad \left(\varphi = 0, \; \operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right| = 0\right)$

$L_1 \perp L_2 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$ $\quad \left(\varphi = \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{tg}\varphi = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right| \to \infty\right)$ $\quad \boxed{k_1 = -\dfrac{1}{k_2}}$

.

$$L_1: A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad L_2: A_2 x + B_2 y + C_2 = 0:$$

$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow A_1B_1 - A_2B_1 = 0, \; \dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2},$

$L_1 \perp L_2 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Уравнение пучка прямых

Совокупность всех прямых плоскости, проходящих через некоторую точку $M_o(x_0,y_0)$, называется **пучком** прямых с центром M_o.

Если $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке M_o; то уравнение $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ определяет все прямые пучка, кроме второй из прямых.

Прямая на плоскости.

[Оглавление:]

3.ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

-расстояние между точками $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$;

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda\, x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda\, y_2}{1+\lambda}, \end{cases}$$
$$\lambda\neq -1$$

-координаты точки $C(x,y)$, которая делит отрезок, соединяющий точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, в отношении $\lambda=\dfrac{AC}{CB}$;

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

-координаты середины отрезка AB;

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

-условие принадлежности трёх точек (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) одной прямой;

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\|$$

- площадь треугольника с вершинами (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3).

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

- общее уравнение прямой;

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$$

- уравнение прямой, проходящей через точку (x_0,y_0) перпендикулярно нормальному вектору $\{A,B\}$;

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}}$$

- каноническое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0,y_0) параллельно вектору $\{l,m\}$;

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases}$$
$$t \in (-\infty, \infty)$$

- параметрические уравнения прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) параллельно вектору $\{l, m\}$;

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

- уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2);

$$y = kx + b,$$
$$k = tg\alpha$$

- уравнение прямой с угловым коэффициентом k, где $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ - угол наклона прямой к оси ox;

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$
$$a\neq 0,\ b\neq 0$$

- уравнение прямой в отрезках, где $(a,0)$ и $(0,b)$ - координаты точек пересечения прямой с осями ох и oy;

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

- нормальное уравнение прямой, где p - расстояние от начала координат до прямой, α-угол между осью ox и перпендикуляром к прямой, проходящем через начало координат;

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

- нормальный вид общего уравнения прямой; знак нормирующего множителя противоположен знаку C;

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- расстояние от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax+By+C=0$;

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \\[2ex] y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \end{cases}$$

- координаты точек пересечения двух прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$;

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}, \\[2ex] y_0 = \dfrac{b_2k_1 - b_1k_2}{k_1 - k_2} \end{cases}$$

- координаты точек пересечения прямых $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$;

Прямая на плоскости.

[Оглавление:](#)

$$\boxed{\begin{aligned} &A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \\ &k_1 = k_2 \end{aligned}}$$

- условия параллельности прямых, заданных в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и в виде $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$;

$$\boxed{\begin{aligned} &A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \\ &k_1k_2 = -1 \end{aligned}}$$

- условие перпендикулярности прямых, заданных в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и в виде $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$;

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$tg\alpha = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|,$$

$$tg\alpha = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|,$$

$$k_1k_2 \neq -1,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ если } k_1k_2 = -1.$$

- угол α между двумя прямыми, заданными в общем виде $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и в виде $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$;

$$A_1x+B_1y+C_1+ \\ +\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

- уравнение пучка прямых через точку M, если $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ - уравнения двух прямых, пересекающихся в точке M.

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Задача №:

1
2
3
4
5
6

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Решение задачи №:

1а	2
1б	3
1в	4
1г	5
1д	6
1ж	
1з	
1и	
1к	
1л	

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Треугольник задан уравнениями трех его сторон:

$$AC:\quad x - 2y + 5 = 0,$$
$$AB:\quad x + 2y - 3 = 0,$$
$$BC:\quad 2x + y - 15 = 0.$$

Определите следующие элементы треугольника:

а) координаты вершин,
б) уравнения высот,
в) уравнения медиан,
г) длины сторон,
д) уравнения биссектрис,
ж) центр и радиус вписанной окружности,
з) центр и радиус описанной окружности,
и) центр тяжести треугольника,
к) внутренние углы треугольника,
л) площадь треугольника.

Задача 1

Ответ:

Решение:

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Найдите проекцию точки P (4, 9) на прямую, проходящую через точки A (3, 1) и B (5, 2).

Задача 2

Ответ: $(7,3)$

Решение:

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Постройте прямую $3x - 5y + 15 = 0$.

Задача 3

Ответ:

Решение:

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Даны две прямые $L_1 : 2x + 3y - 5 = 0$, $L_2 : 7x + 15y + 1 = 0$, пересекающиеся в точке M. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку M перпендикулярно к прямой

$L_3 : 12x - 5y - 1 = 0$.

Задача 4

Ответ: $5x + 12y + 6 = 0.$

Решение:

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Напишите уравнение прямой L, проходящей через точку $M\,(2,\ 1)$ под углом 45° к прямой L_1: $2x + 3y + 4 = 0$.

Задача 5

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x - 5y + 3 = 0, \\ 5x + y - 11 = 0 \end{array}\right.$

Решение:

Прямая на плоскости.

Составьте уравнение прямой L, параллельной прямым

L_1: $x + 2y - 1 = 0$ и L_2: $x + 2y + 2 = 0$

и проходящей посередине между ними.

Задача 6

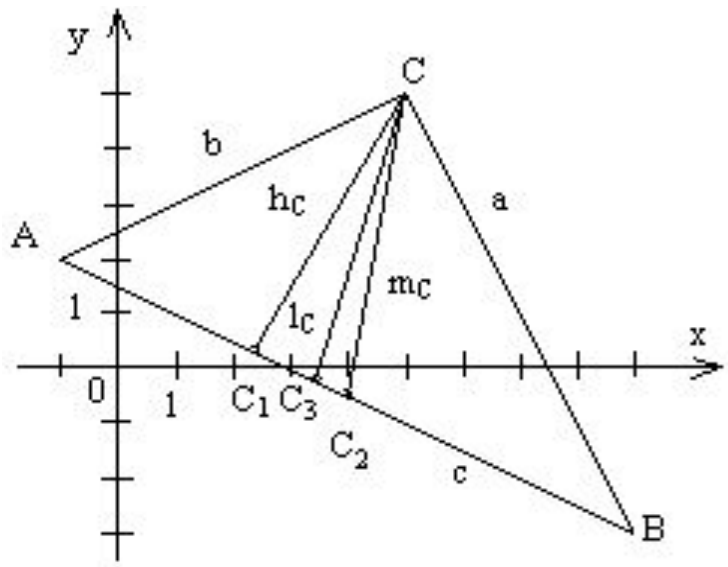
Ответ: $x+2y+1/2=0$

Решение:

Прямая на плоскости.

Оглавление:

а) Координаты вершин треугольника находятся как точки пересечения соответствующих сторон:



$$\begin{cases} AC:\ x-2y+5=0, \\ AB:\ x+2y-3=0, \end{cases} \qquad A\ (-1,\ 2).$$

Аналогично B (9, -3) и C (5, 5).

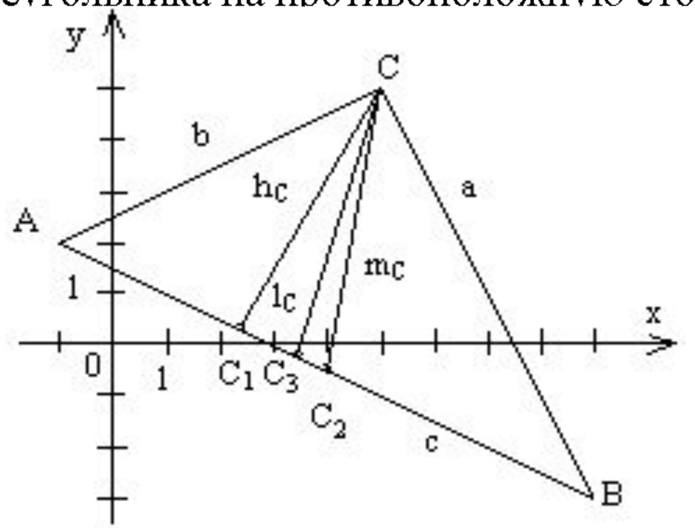
Решение задачи 1

Ответ: а) A (-1, 2), B (9, -3), C (5, 5)

Прямая на плоскости.

Оглавление:

б) Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону.



$h_c = CC_1 \perp AB,\ \ CC_1 : y = k_1x + b,$

$$AB:\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \quad k_2 = -\frac{1}{2}.$$

$k_1\,k_2 = -1 \rightarrow k_1 = 2.$

$C\,(5,\,5) \in CC_1,\ h_c:\ \ y - 5 = 2\cdot(x - 5),\ \ y = 2x - 5.$

$$AC:\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2},\ \ BC:\ y = -2x + 5 \Rightarrow AC \perp BC,$$

треугольник является прямоугольным,

$$h_A:\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2};\ \ h_B:\ y = -2x + 15.$$

Решение **задачи 1**

Ответ: б) $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

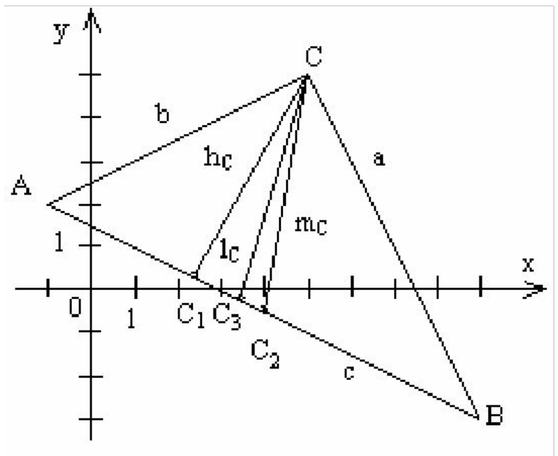
$y = -2x + 15$

$y = 2x - 5$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

в) **Медианой** называется отрезок прямой, соединяющей вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



Координаты середин сторон:

$C_2\,(4, -1/2)$, $B_2\,(2, 7/2)$, $A_2\,(7, 1)$.

$m_C = CC_2,\ C \in m_C,\ C_2 \in m_C$:

$$m_C:\ \frac{y-5}{-1/2-5} = \frac{x-5}{4-5}$$

$$11x - 2y - 45 = 0.$$

Аналогично m_B: $13x + 14y - 75 = 0$,

m_A: $x + 8y - 15 = 0$.

г) *Длины сторон*:

$|AB| = c = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$, $|BC| = a = 4\sqrt{5}$,

$|AC| = b = 3\sqrt{5}$.

Решение задачи 1

Ответ:

в) $x + 8y - 15 = 0$,

$13x + 14y - 75 = 0$, $11x - 2y - 45 = 0$

г) $5\sqrt{5}$, $4\sqrt{5}$, $3\sqrt{5}$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

д) Биссектрисой треугольника называется лежащий в треугольнике отрезок прямой, которая делит его внутренний угол пополам.

1-ый способ. Биссектриса делит противолежащую сторону в отношении, пропорциональном прилежащим сторонам.

Если C_3 – точка пересечения биссектрисы $l_C = CC_3$ со стороной AC, то

$$\frac{AC_3}{C_3B} = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}.$$

Координаты точки C_3 находим по формулам деления отрезка в отношении $\lambda = 3/4$: $C_3\,(23/7, -1/7)$.

Уравнение биссектрисы $l_C = CC_3$ получается как уравнение прямой, проходящей через точки C_3 и $C\,(5, 5)$:

$$\frac{y-5}{-1/7-5} = \frac{x-5}{23/7-5} \quad \text{или} \quad 3x - y - 10 = 0.$$

Решение задачи 1

Ответ: д) $y = 2$, $x+y-6=0$, $3x-y-10=0$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

2-ой способ. Уравнение биссектрисы $l_C = CC_3$ может быть найдено из условия того, что точки биссектрисы CC_3 равноудалены от сторон AC и CB.

Вычислим отклонения точки (x,y), лежащей на биссектрисе, от сторон AC и CB :

$$\delta_{AC} = \frac{x-2y+5}{-\sqrt{5}}, \qquad \delta_{CB} = \frac{2x+y-15}{\sqrt{5}}.$$

Оба отклонения отрицательны, так как начало координат и точки биссектрисы треугольника лежат по одну сторону от каждой из сторон AC и CB.

$$d_{AC} = d_{CB} \Rightarrow |\delta_{AC}| = |\delta_{CB}|: \quad \frac{x-2y+5}{\sqrt{5}} = -\frac{2x+y-15}{\sqrt{5}} \Rightarrow l_C:\ 3x-y-10=0.$$

Решение задачи 1

Ответ: д) $y = 2$, $x+y-6=0$, $3x-y-10=0$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

l_A :

$\delta_{AC} = -\dfrac{x-2y+5}{\sqrt{5}} < 0$, так как начало координат и биссектриса l_A лежат по одну сторону от стороны AC;

$\delta_{AB} = \dfrac{x+2y-3}{\sqrt{5}} > 0$, так как начало координат и биссектриса l_A лежат по разные стороны от стороны AB.

$-\delta_{AC} = \delta_{AB}$, $\dfrac{x-2y+5}{\sqrt{5}} = \dfrac{x+2y-3}{\sqrt{5}}$, $x - 2y + 5 = x + 2y - 3$,

$4y = 8$, l_A: $y = 2$.

l_B: $x+y-6 = 0$.

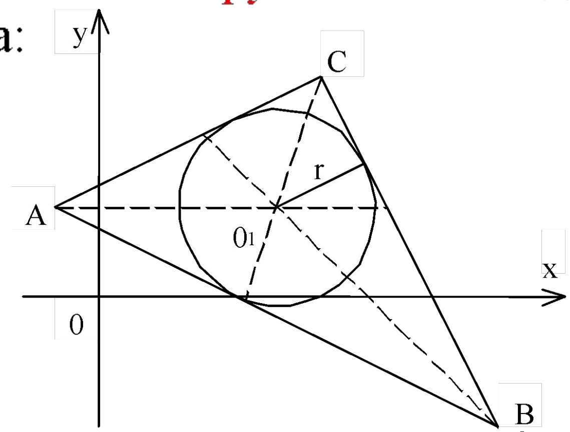
Решение задачи 1

Ответ: д) $y = 2$, $x+y-6=0$, $3x-y-10=0$

Прямая на плоскости.

[Оглавление:]

ж) Центр вписанной окружности находится в точке пересечения биссектрис треугольника:



$$\begin{cases} l_C: 3x - y - 10 = 0, \\ l_A: y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = 4,\ y = 2,\ O_1\ (4,\ 2).$$

$$AC:\ x - 2y + 5 = 0$$

$$r = \rho(O_1, AC) = -\frac{x_0 - 2y_0 + 5}{\sqrt{5}}\Big|_{(4,2)} =$$

$$= \left| -\frac{4 - 4 + 5}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{5}.$$

Решение [задачи 1]

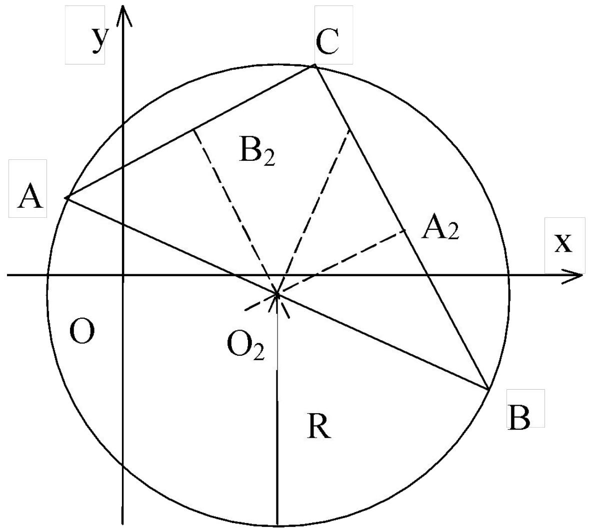
Ответ: ж) $O_1(4,2)$, $r = \sqrt{5}$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

3) Центр описанной окружности находится в точке пересечения серединных перпендикуляров.

Координаты середин сторон AC и AB: C_2 (4, -1/2), B_2 (2, 7/2).



Решение задачи 1

Ответ: з) $O_2(4,-1/2), R=\frac{5\sqrt{5}}{2}$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Угловые коэффициенты h_{C_2} и h_{B_2} равны 2 и -2 соответственно, и эти прямые проходят через точки C_2 и B_2. Система уравнений, составленная из уравнений серединных перпендикуляров:

$$\begin{cases} h_{C_2}: y+\dfrac{1}{2}=2(x-4),\ 4x-2y-17=0, \\ h_{B_2}: y-\dfrac{7}{2}=-2(x-4),\ 4x+2y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \quad x=4,\ y=-1/2,$$

центр описанной окружности находится в точке O_2 (4, -1/2).

Центр описанной окружности прямоугольного треугольника - середина гипотенузы AB: $R=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$.

Решение задачи 1

Ответ: з) $O_2(4,-1/2), R=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

и) Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения медиан:

$$\begin{cases} m_C: 11x - 2y - 45 = 0, \\ m_B: \ -13x - 14y + 75 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = 4{,}33,\ y = 1{,}3,$ $\quad$ O_3 (4,33; 1,3).

Решение задачи 1

Ответ: и) $x_{O_3} = 4{,}33;$
$y_{O_3} = 1{,}33,$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Другой способ. Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$\lambda = \frac{CO_3}{C_3C_2} = \frac{2}{1}$$

$$x_{O_3} = \frac{x_C + 2x_{C_2}}{3} = \frac{5 + 2 \cdot 4}{3} = 4,33;$$

$$y_{O_3} = \frac{y_C + 2y_{C_2}}{3} = \frac{5 + 2 \cdot (-1/2)}{3} = 1,33.$$

Решение задачи 1

Ответ: и) $x_{O_3} = 4,33;$ $y_{O_3} = 1,33,$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

к) Внутренние углы треугольника могут быть найдены через угловые коэффициенты прилежащих сторон:

$$tg\ A = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} \cdot k_{AB}} = \frac{1/2 - (-1/2)}{1 + 1/2 \cdot (-1/2)} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A = arc\,tg\frac{4}{3}$$

Решение задачи 1

Ответ: $\angle A = arc\,tg\frac{4}{3}$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

л) Площадь треугольника:

1) $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ (кв. ед.).

2) $S_\Delta = p \cdot r,$

p – полупериметр треугольника; r – радиус вписанной окружности,

$$p = \frac{3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}, \quad r = \sqrt{5} \Rightarrow S_\Delta = 30$$ (кв. ед.).

Решение задачи 1

Ответ: л) 30

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$A\ (3,\ 1)$ и $B\ (5,\ 2) \in AB,$

$$AB:\quad \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1} \quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.$$

Уравнение перпендикуляра PM из точки $P(4,\ 9)$ на прямую AB:

$$y-9=k\,(x-4);\qquad k\cdot\frac{1}{2}=-1\ \rightarrow\ k=-2.$$

$$\begin{cases} AB:\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}, \\ PM:\ y=-2x+17, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=7, \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$M(x,y):(7,3)$ - проекция P на AB.

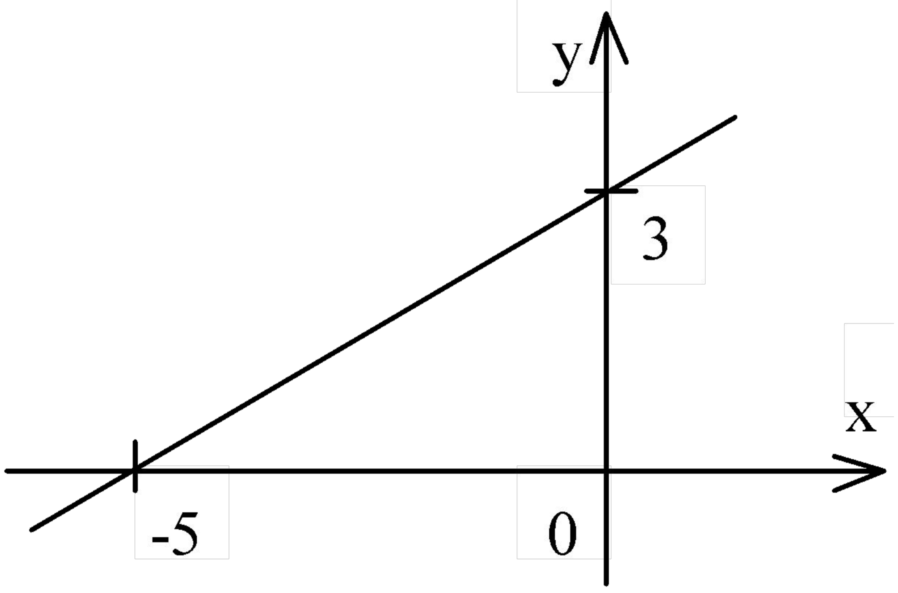
Решение задачи 2

Ответ: $(7,3)$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Уравнение прямой в отрезках имеет вид: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1,$ прямая отсекает на осях отрезки (-5) и 3.



Решение задачи 3

Ответ:

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Прямые $L_1: \; 2x + 3y - 5 = 0, \; k_1 = \frac{2}{7}$,

$L_2: \; 7x + 15y + 1 = 0, \; k_2 = \frac{3}{15}$

пересекаются, так как они имеют разные угловые коэффициенты. Составим уравнение пучка прямых, проходящих через точку их пересечения *M*:

$2x + 3y - 5 + \lambda \cdot (7x + 15y + 1) = 0,$

$(2 + 7\lambda) \cdot x + (3 + 15\lambda) \cdot y + (-5 + \lambda) = 0$

Выделим в этом пучке искомую прямую

$$L : y = kx + b$$

Решение задачи 4

Ответ: $5x + 12y + 6 = 0.$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

По условию искомая прямая перпендикулярна прямой

L_3 : 12x – 5y – 1 = 0, для которой $k_3 = \frac{12}{5}$

$k = -\frac{1}{k_3}$, $-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda} = -\frac{5}{12} \Rightarrow$

λ = -1 и уравнение искомой прямой:

$$5x + 12y + 6 = 0.$$

Решение задачи 4

Ответ: $5x + 12y + 6 = 0.$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

$$L_1:\ 2x+3y+4=0,\ y_1=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ k_1=-\frac{2}{3}.$$

$$L:\ \ y=k'x+b,\ \ k'=tg\alpha$$

$$\alpha=45^0,\ tg\alpha=\left|\frac{k'-k_1}{1-k'\cdot k_1}\right|=\left|\frac{k'+2/3}{1-(2/3)\cdot k'}\right|=1\ \Rightarrow k'_{1,2}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{5},\\ -5.\end{array}\right.$$

$$M(2,1)\in L,\qquad L:\left[\begin{array}{l}y=k'_1x+b_1,\\ y=k'_2x+b_2\end{array}\right.\Rightarrow b_{1,2}=\left[\begin{array}{l}\frac{3}{5},\\ 11.\end{array}\right.$$

$$L:\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{5}x+\frac{3}{5},\\ y=-5x+11\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-5y+3=0,\\ 5x+y-11=0.\end{array}\right.$$

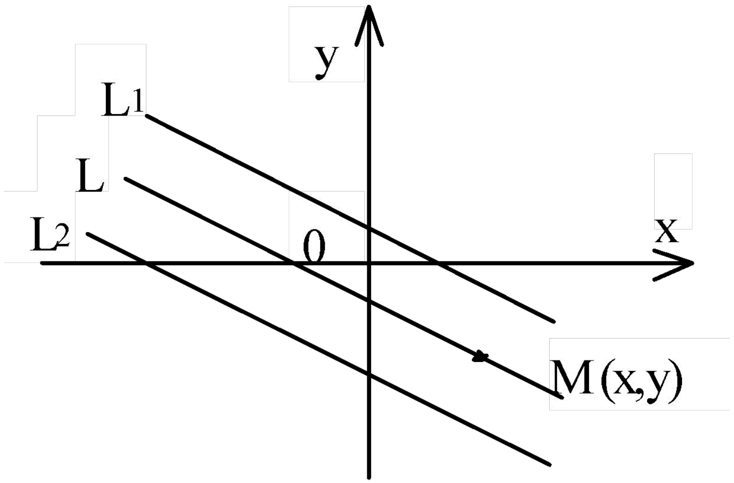
Решение **задачи 5**

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x-5y+3=0,\\ 5x+y-11=0\end{array}\right.$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

1-ый способ.



Уравнение прямой L будем искать в виде $A(x - x_0) + B(y + y_0) = 0$.

В качестве нормального вектора $\vec{n} = \{A, B\}$ можно выбрать нормальный вектор прямых L_1: $x + 2y - 1 = 0$ и L_1: $x + 2y - 1 = 0$, равный $\{1, 2\}$.

Найдем какую-нибудь точку M_0 $(x_0, y_0) \in L$. Точка M_0 будет делить пополам отрезок, соединяющий две любые точки, лежащие на L_1 и L_2.

Например, (подбором!) M_1 $(1, 0) \in L_1$ и M_2 $(-2, 0) \in L_2$, тогда точка M_0 имеет координаты середины M_1M_2 $(-1/2, 0)$, и уравнение прямой L принимает вид: $x + 2y + 1/2 = 0$.

Решение задачи 6

Ответ: $x+2y+1/2=0$

Прямая на плоскости.

2 –ой способ.

Произвольная точка $M(x, y) \in L$, если

$$|\delta(M, L_1)| = |\delta(M, L_2)|.$$

Для снятия модуля определим знаки отклонений точки $M(x, y)$ от прямых L_1 и L_2. Для этого нужно выяснить взаимное расположение начала координат, точки $M(x, y)$ и прямых L_1 и L_2.

Приведем уравнения прямых к нормальному виду:

$$L_1: \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \quad \vec{n}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\},$$

$$L_2: -\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0, \quad \vec{n}_2 = \left\{\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right\},$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ - единичные векторы нормалей к прямым L_1 и L_2, проведенным из начала координат.

Решение задачи 6

Ответ: $x+2y+1/2=0$

Прямая на плоскости.

Оглавление:

Видим, что $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ противоположны по направлению, значит, начало координат лежит в полосе между прямыми L_1 и L_2. Точка M и начало координат лежат по одну сторону как от прямой L_1, так и от прямой L_2, значит, отклонения точки M от прямых L_1 и L_2 имеют один и тот же отрицательный знак.

Из $\left|\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{-x-2y-2}{\sqrt{5}}\right|$ следует, что

$$x + 2y - 1 = -x - 2y - 2 \quad \text{и} \quad x + 2y + 1/2 = 0.$$

Решение задачи 6

Ответ: $x+2y+1/2=0$

В результате студент должен уметь:

1. **Решать задачи аналитической геометрии на плоскости**
с помощью общего, канонических, параметрических, нормального, «в отрезках»
уравнений прямой на плоскости.

2. **Изображать графически содержание задач.**

Перечень источников, список дополнительной литературы по теме.

1. Сборник задач по математике для втузов: В 4 ч. Ч. 1: Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры / А. В. Ефимов, А. Ф. Каракулин, И. Б. Кожухов и др. / Под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит, 2003. - 288 с.: ил.; 21 см. - ISBN 5-940520-34-0.
2. Клетеник, Давид Викторович. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. Н.В. Ефимова. - 15-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1998. - 223с. - ISBN 5-02-015080-0.
3. Данко, Павел Ефимович. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов: В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М.: ОНИКС 21 век : Мир и образование, 2003. - 304с.: ил.; 22 см. - ISBN 5-329-00326-1.
4. Элементы аналитической геометрии и линейной алгебры: Сб. комплектов вариантов задач по курсу "Высшая математика". Ч. 1 / Урал. гос. техн. ин-т; Сост. О. А. Белослудцев, М. А. Вигура, Н. В. Кожевников, А. Ф. Рыбалко и др. ; Науч. ред. С. И. Машаров. - Екатеринбург: УГТУ, 1997. - 110 с. - ISBN 5-230-17046-8.