

Математический анализ

Лекция -3(ю)

Непрерывные функции

Определение Пусть $a \in \mathbf{R}$. Окрестностью $O(a)$ точки a называется любой интервал (b, c) , содержащий точку a .

Проколотой окрестностью $\dot{O}(a)$ точки a называется любая ее окрестность, из которой исключается сама точка a .

Определение Пусть $\varepsilon > 0$, ε -окрестностью $O_\varepsilon(a)$ точки a называется интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Проколотой ε -окрестностью $\dot{O}_\varepsilon(a)$ точки a называется ее ε -окрестность, из которой исключена сама точка a . Окрестность ε и проколотую окрестность ε точки a можно задать в виде

$$O_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

$$\dot{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\} = \underline{(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)}.$$

Определение (Коши). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$), если функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a и

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Здесь принятые обозначения $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Заметим, что в самой точке a функция $f(x)$ может быть не определена

Пример: $f(x) = \sqrt[3]{x} \sin \frac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не определена, но $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

Бесконечно малые, бесконечно большие функции Неопределенности

Теорема 9. Если функция $f(x)$ — бесконечно малая в точке a и в некоторой окрестности этой точки $f(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно большой в этой точке.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 10. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = A \pm B$, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = A \cdot B$, $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{A}{B}$, если в последнем пределе $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$.

Замечание. В некоторых случаях прямое применение теоремы 10 к вычислению пределов невозможно. Например, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, но нельзя утверждать, что $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \frac{0}{0}$, поскольку выражение $\frac{0}{0}$ не имеет смысла. Здесь появляется так называемая неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Аналогично возникают неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, $[0 \cdot \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$. Раскрыть какую-нибудь неопределенность означает вычислить отвечающий ей предел; $[0^\infty] = 0$ не является неопределенностью.

Два замечательных предела

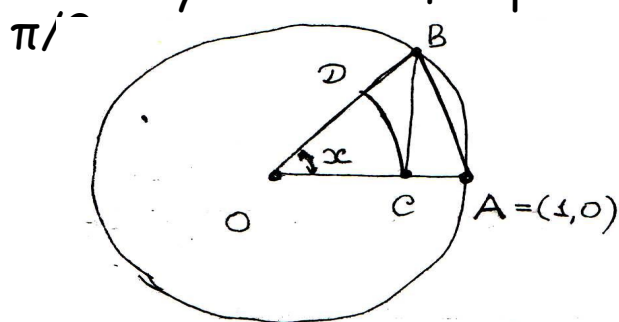
Рассмотренные свойства функций, имеющих предел в точке $a \in \mathbb{R}$ расширенной числовой прямой, дают возможность проанализировать их поведение в окрестности этой точки a . Однако в ряде случаев этих свойств и установленных правил предельного перехода недостаточно. Одним из классических примеров подобного случая является поведение функции $(\sin x) / x$ в окрестности точки $a = 0$.

Пусть x - центральный угол окружности единичного радиуса, причем $0 < x < \pi/2$ (см. следующий слайд).



Первый замечательный предел :

пусть x - центральный угол единичного круга, $0 < x < \pi/2$



$$|OA| = |OB| = 1$$

$$S_{\text{сектор } OCD} < S_{\triangle OAB} < S_{\text{сектор } OAB}$$

$$S_{\text{сектор } OCD} = \frac{\pi |OC|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2} \cos^2 x$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \sin x$$

$$S_{\text{сектор } OAB} = \frac{\pi |OA|^2}{2\pi} \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} \cos^2 x < \frac{1}{2} \sin x < \frac{x}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{т.к. } 0 < x \Rightarrow$$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

т.к. при $x \rightarrow 0$ верно, что $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0}$$

$$\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \left| \frac{\sin x}{x} \right| < 1 \Rightarrow |\sin x| < |x| \quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$|\sin x - 0| = |\sin x| < |x| < \varepsilon \quad \text{при } 0 < |x - 0| = |x| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

первый замечательный предел.

Перейдем к пределу при $x \rightarrow 0$ в нерав. $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1 \Rightarrow 1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Второй замечательный предел.

Теорема. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

• Теорема. Послед. $\{x_n\}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Док-во.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

При этом $x_n < x_{n+1}$, т.е. последовательность $\{x_n\} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и она ограничена:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

следовательно $2 < x_n < 3$, $n \rightarrow \infty$

Теорема. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Док-во. $\forall x > 0 \quad \exists n = n(x) : n \leq x < n+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Следствие 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow a \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y = e. \quad \blacktriangleright$$

Следствие 2. Если $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \alpha(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Док. Положим $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \rightarrow \infty$, $x \rightarrow a$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \alpha(x) \right\}^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta(x)} \right\}^{\beta(x)} = e. \quad \blacktriangleright$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Сравнение функций при



Сравнение функций (при данном стремлении аргум.

Для сравнения двух чисел a, b рассматривают их отношение a/b . Для сравнения двух функций $f(x), g(x)$ при $x \rightarrow a$ рассматривают $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Определение. Пусть $f(x), g(x)$ определены в некоторой $\dot{U}(a)$ если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, то $f(x)$ наз. беск. малой по сравнению с $g(x)$ при $x \rightarrow a$.

Обозначение: $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow a$

или : $f = o(g)$, $x \rightarrow a$

Замечание: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x) - \text{б.м. при } x \rightarrow a$

Определение Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в $\dot{U}(a)$.

Если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными (асимптотически равными) при $x \rightarrow a$. Обозначение: $f \sim g, x \rightarrow a$.

Пример: $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$.

Теорема (критерий эквивалентности функций)

$$f \sim g, x \rightarrow a \iff f = g + o(g), x \rightarrow a$$

Док-во. Пусть $f \sim g, x \rightarrow a \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x), \alpha(x) - \delta.м. при x \rightarrow a \implies$$

$$f(x) = g(x) + \alpha(x) \cdot g(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a.$$

Пусть $f = g + o(g), x \rightarrow a \implies$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ 1 + \frac{o(g)}{g} \right\} = 1 \implies f \sim g, x \rightarrow a.$$

список функций, эквивалентных x при $x \rightarrow 0$:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \\ \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x \quad (x \rightarrow 0).$$

Замечание Заменяя с.м. на эквивалентные им в суммах и разностях, вообще говоря, нельзя.

Пример. $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$

$$\left| \begin{array}{l} \ln(1+x) \sim x \\ \ln(1-x) \sim -x \end{array} \right. \quad x \rightarrow 0$$

Если заметить, то $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-x}{x^2} = 0$, т

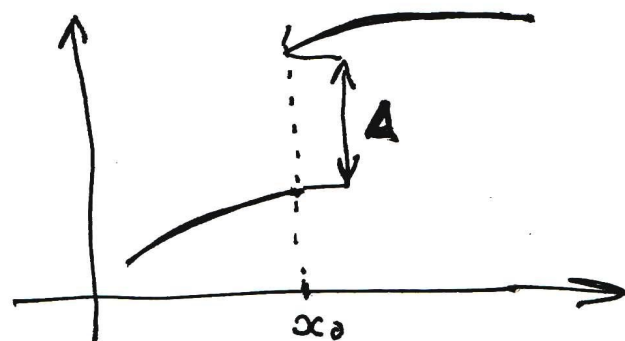
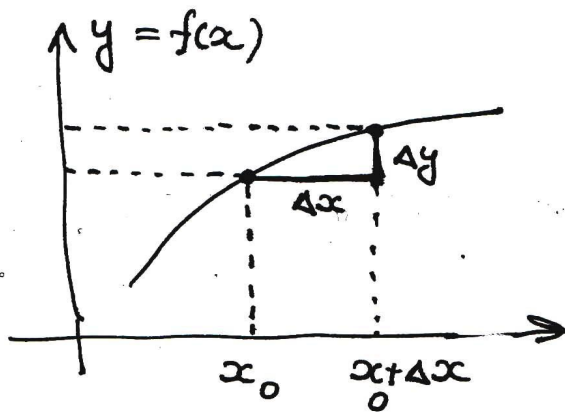
$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2} = -1.$$

Непрерывные функции

С понятием предела функции тесно связано другое важное понятие математического анализа — понятие непрерывности функции.

Известно, что во многих наблюдаемых процессах и явлениях изменения происходят в основном постепенно, непрерывно. Например, поставили нагревать воду: время идет, температура воды повышается. Но как? Постепенно, без скачков, непрерывно, т.е. за малый промежуток времени температура изменяется мало. В этом примере, с точки зрения математика, температура воды есть функция времени, и эта функция такова, что при малом изменении аргумента (времени) мало изменяется функция (температура).

Непрерывная функция?



$$\Delta f = \Delta y = \underset{\text{приращ. ф. в точке } x_0}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

$$\text{Подробнее: } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$x_0 + \Delta x = x \rightarrow x_0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

Равносильное определение непрерывности:

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0 , если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

То есть, $f(x)$ непрерывна в т. x_0 , если
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) :$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

На языке последовательностей:

$f(x)$ непрерывна в т. x_0 , если

$$\forall \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Укаже, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n)$

→

Определение 9.1 непрерывности функции можно сформулировать в иной форме. Изменение *аргумента* функции от значения $a \in \mathbb{R}$ к другому значению x можно представить как **приращение аргумента** (положительное или отрицательное) **в точке** $a \in \mathbb{R}$

$$\Delta x = x - a. \quad (9.3)$$

Тогда новое значение $f(a + \Delta x)$ функции $y = f(x)$ будет отличаться от прежнего значения $f(a)$ на величину

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a), \quad (9.4)$$

называемую **приращением функции в точке** $a \in \mathbb{R}$. Геометрический смысл приращений ясен из рис. 9.3, на котором и Δx , и Δy положительны. В общем случае каждое из них может иметь любой знак.

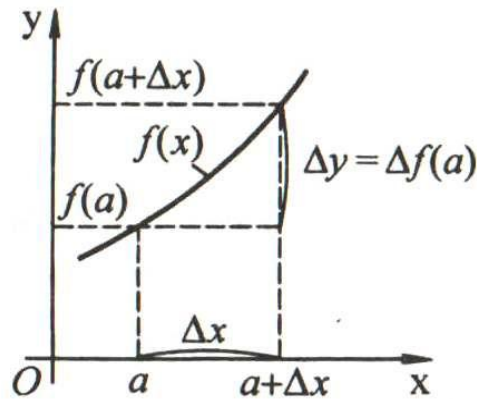


Рис. 9.3

Поскольку (9.1) означает, что $f(x) \rightarrow f(a)$ при $x \rightarrow a$, то с учетом (9.3) и (9.4) это равносильно

$\Delta f(a) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $\Delta f(a)$ является функцией, бесконечно малой (б.м.) при $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, определения 9.1 и 9.2 эквивалентно следующее определение.

Определение 9.3. Функцию $f(x)$ называют **непрерывной** в точке $a \in \mathbb{R}$, если приращение функции в этой точке является функцией, б.м. при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0. \quad (9.5)$$

Пример 9.1. а. Функция $f(x) = c = \text{const}$ непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, так как $\forall a \in \mathbb{R} \quad \Delta f(a) = f(x) - f(a) \equiv 0$ и выполнено (9.5).

б. Функция $f(x) = x$ также непрерывна в каждой точке $a \in \mathbb{R}$, поскольку $\forall a \in \mathbb{R} \quad \Delta f(a) = f(x) - f(a) = x - a = \Delta x$ и выполнено (9.5).

в. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbb{R}$.
Имеем

$$|\Delta f(x)| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq |\Delta x|,$$

так как $|\cos(x + \Delta x/2)| \leq 1$, а $|\sin(\Delta x/2)| \leq |\Delta x|/2$.

Поэтому $\Delta f(x) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и выполнено условие определения 9.3 непрерывности данной функции в любой точке $a \in \mathbb{R}$. #

1 0 Теорема (о непрерывности сложной функции)

Если $y=f(x)$ непрерывна в т. x_0 , а $g(y)$ непрерывна в т. $y_0=f(x_0)$,
то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в т. x_0 .

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$

$$g(y) \text{ - непрерывна в т. } y_0 \Rightarrow \exists \mu = \mu(\varepsilon) :$$

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - y_0| < \mu$$

$$y=f(x) \text{ - непрерывна в т. } x_0 \Rightarrow \exists \delta = \delta(\mu) :$$

$$|y - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \mu \quad \text{при} \quad |x - x_0| < \delta$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta :$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

Следствие. Если $y = f(x)$ непрерывна в т. x_0 ,
а $g(y)$ непрерывна в т. $y_0 = f(x_0)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

Док. В силу непрерывности $f(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$,

в силу непрерывности слож. функции $g(f(x))$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$. 

Следовательно, для непрерывных функций операция предельного перехода перестановочна с операциями по вычислению значения функции в соответствующей точке. Теорема **10** позволяет при вычислении предела сложной непрерывной функции удобно чередовать эти операции.

Теорема. Если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в т. x_0 , то функции $f(x)+g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$: $g(x_0) \neq 0$ непрерывны в т. x_0 .

Док-во. В силу непрерывности f и g по свойству пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{ (f+g)(x) \} = \lim_{x \rightarrow x_0} \{ f(x) + g(x) \} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{ (f \cdot g)(x) \} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) g(x_0) = (f \cdot g)(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{f}{g}(x) \right\} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f}{g}(x_0), \quad g(x_0) \neq 0.$$

Определение. Функция $f(x)$, определённая на $[x_0, x_0 + \varepsilon)$
 $\varepsilon > 0$ наз. непрерывной справа в т. x_0 , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \quad \text{и} \quad f(x_0+0) = f(x_0)$$

Функция $f(x)$, определённая на $(x_0 - \varepsilon, x_0]$, $\varepsilon > 0$ наз.
непрерывной слева в т. x_0 , если

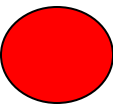
$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0-0) \quad \text{и} \quad f(x_0-0) = f(x_0).$$

— Определение. Функция $f(x)$ наз. непрерывной на интервале (a, b) , если она непрерывна в каждой его точке.

Функция $f(x)$ наз. непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в любой его внутренней точке, непрерывна слева в т.а. и непрерывна справа в т. б.

Классы функций $C(a, b)$, $C[a, b]$.

Свойства функций, непрерывных в точке



- Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $\alpha \in \mathbb{R}$, то она имеет конечный предел в ней, ограничена в окрестности т. α и при условии $f(x) \neq 0$ знакопостоянна. Из правил предельного перехода при арифметических операциях следуют свойства непрерывности:

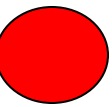
1) линейной комбинации конечного числа $m \in \mathbb{N}$ функций, непрерывных в данной точке, т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = f_k(a) \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^m c_k f_k(x) = \\ = \sum_{k=1}^m c_k \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = \sum_{k=1}^m c_k f_k(a), \quad c_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m}; \quad (9.7) \end{aligned}$$

2) произведения конечного числа $m \in \mathbb{N}$ функций, непрерывных в данной точке, т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = f_k(a) \in \mathbb{R} \quad \forall k = \overline{1, m} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \prod_{k=1}^m f_k(x) = \prod_{k=1}^m f_k(a); \quad (9.8) \end{aligned}$$





· 3) частного двух функций, непрерывных в данной точке, при условии, что значение делителя в этой точке отлично от нуля, т.е.

$$\begin{aligned} (\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R}) \wedge (\exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}. \quad (9.9) \end{aligned}$$

Свойство (9.8) можно распространить на натуральную степень $n \in \mathbb{N}$ функции, непрерывной в точке a , т.е.

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \in \mathbb{R} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = (f(a))^n. \quad (9.10) \end{aligned}$$

Примеры непрерывных функций.

1

$y = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0) = C \mid \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$$

5

$y = \sin x$ непрерывна $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\mid y = \cos x$ - тоже непрерывна

$$|\Delta y| = |\sin(x + \Delta x) - \sin x| = \left| 2 \cos \frac{2x + \Delta x}{2} \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq$$

$$\leq 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x| \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

2

$y = x$ непрерывна $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Delta y = \Delta x \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

3

$y = x^n$ непрерывна как произведение непрерывных функций.

4

Многогранник $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

непрерывен как сумма произведений непрерывных функций.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ

Пример

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x}.$$

Функцию под знаком предела представим в виде

$$(1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = ((1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x})^3$$

и рассмотрим ее как суперпозицию функций $y = f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}$ и $g(y) = y^3$. Если сделать замену $u = \operatorname{tg} x$, то нетрудно вычислить $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$. Действительно, с учетом *второго замечательного предела* имеем

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = u, \\ u \xrightarrow{x \rightarrow \pi} 0 \end{array} \right| = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = \underline{e}.$$

Тогда в силу непрерывности $g(y) = y^3$ получим

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} \right)^3 = e^3.$$

Определение 21. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если в этой точке выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Это определение предъявляет к функции следующие требования:

- а) функция $f(x)$ должна быть определена в точке x_0 ;
- б) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке x_0 ;
- в) этот предел должен совпадать со значением функции $f(x)$ в этой точке.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0 , а сама точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.



Если односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ существуют и конечны, то точка x_0 называется точкой разрыва 1-го рода. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т. е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел, то говорят, что x_0 есть точка устранимого разрыва. Разрыв в этом случае можно устранить, доопределяя или переопределяя значение функции $f(x)$ в точке x_0 : $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Эта процедура называется продолжением функции по непрерывности.

Всякая точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва 1-го рода, называется точкой разрыва 2-го рода. Другими словами, в точке разрыва 2-го рода по крайней мере один из односторонних пределов функции не существует или бесконечен. Наиболее типичный случай разрыва 2-го рода — это именно бесконечный разрыв.

Точка разрыва первого рода – существование обоих односторонних конечных пределов

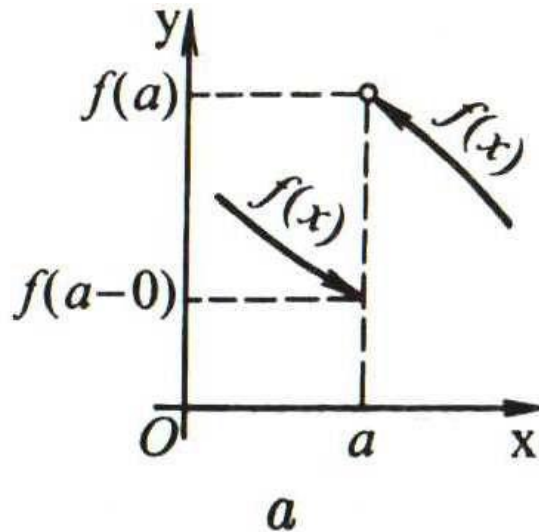
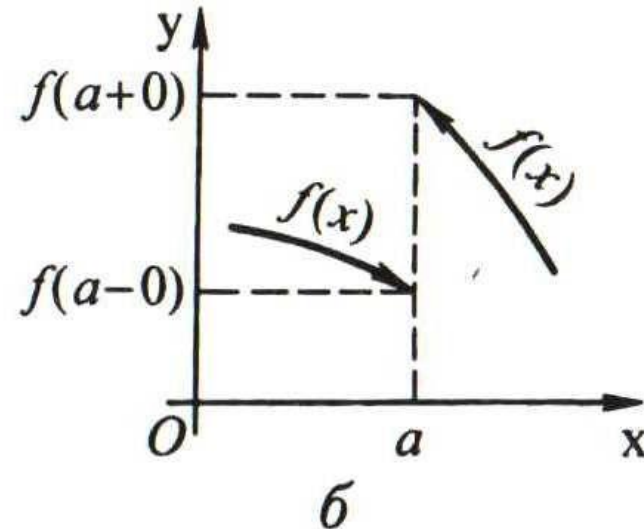


Рис. 9.4



Определение . *Точкой разрыва первого рода* называют такую точку разрыва функции, в которой существуют оба односторонних предела этой функции и они конечны.

Итак, для точки разрыва первого рода выполнено, по крайней мере, условие 2 непрерывности функции в точке (рис. 9.4). Разность $f(a+0) - f(a-0)$ конечна, и ее называют **скачком функции** в точке разрыва первого рода, а про функцию иногда говорят, что она терпит разрыв с конечным скачком.

Продолжение.

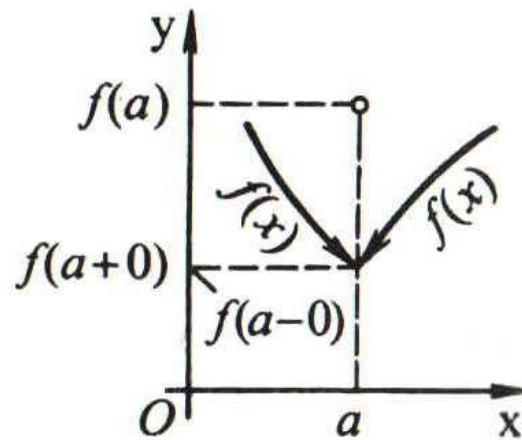
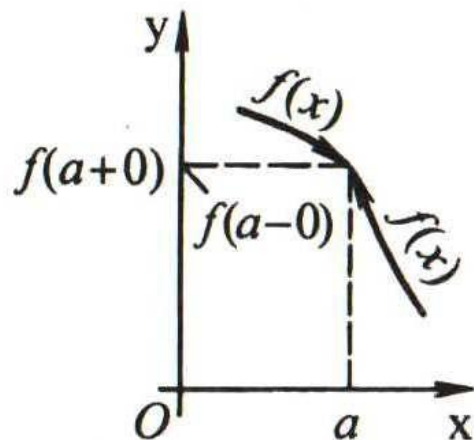
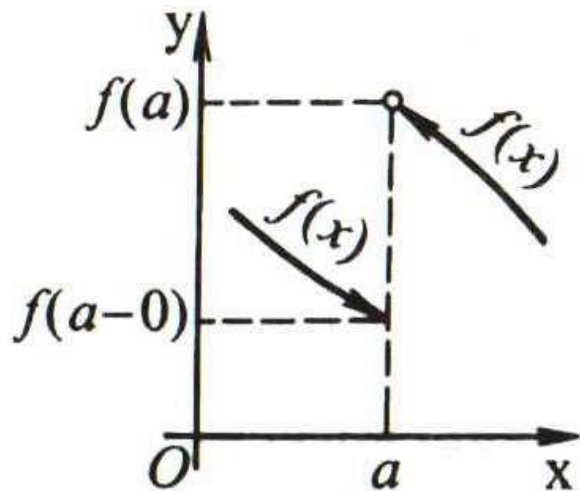


Рис. 9.4

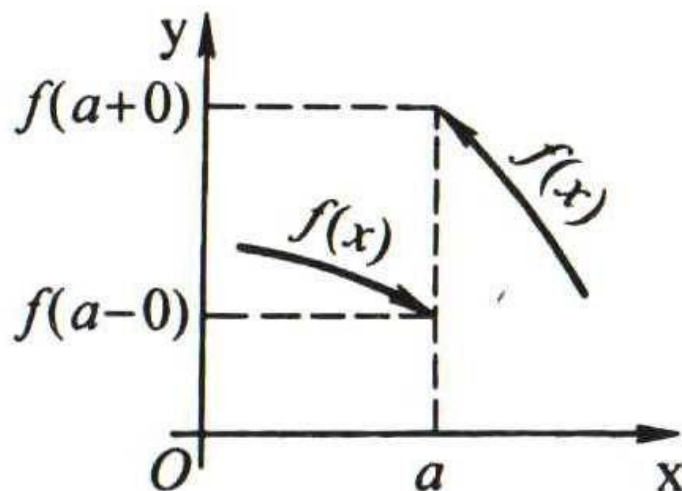
Если

скачок равен нулю (см. рис. 9.4, a и b), т.е. в точке a выполнено еще и условие 3 непрерывности функции, а поэтому существует конечный предел функции в этой точке, то имеем точку устранимого разрыва. Если в этом случае для функции $g(x)$, совпадающей в некоторой проколотой окрестности точки a с $f(x)$, положить $g(a) = f(a+0) = f(a-0)$, то $g(x)$ будет непрерывна в точке a , поскольку все условия 1–4 непрерывности функции в точке a будут выполнены. Про возможность введения такой непрерывной функции $g(x)$ говорят, что разрыв непрерывности $f(x)$ в точке a можно устранить.

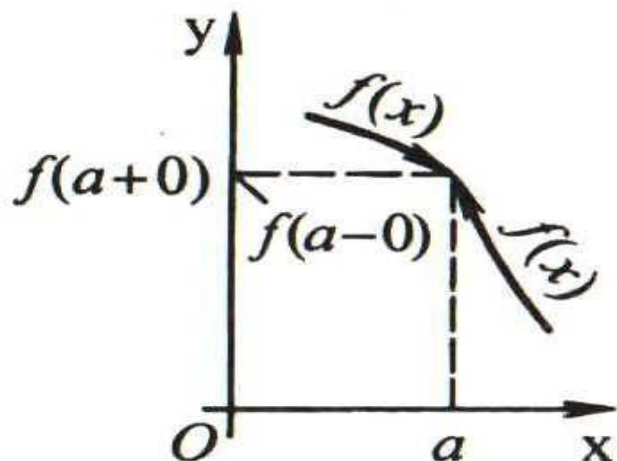
Точка разрыва первого рода – существование обоих односторонних конечных пределов



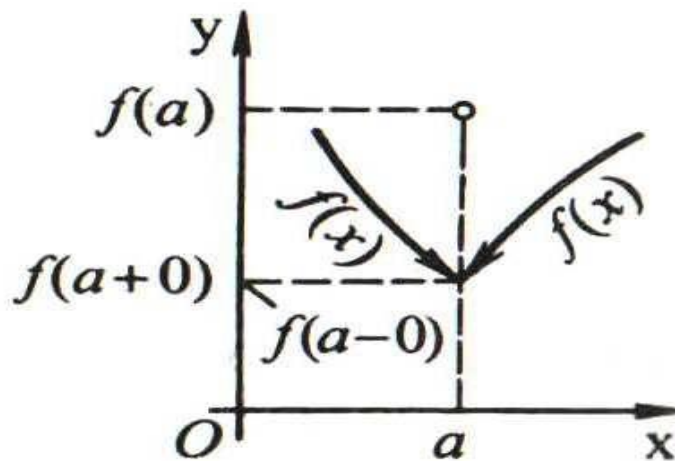
a



б



в



д

Рис. 9.4

Определение . *Точкой разрыва второго рода* называют такую точку разрыва функции, в которой хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен или не существует.

Пример . Определим точки разрыва и выясним их характер для следующих функций.

а. $y = 1/x$. Эта функция непрерывна при любом $x \neq 0$. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Оба односторонних предела не являются конечными, т.е., по определению 9.8, $x = 0$ — точка разрыва второго рода (см. рис. 7.7).

б. $y = a^{1/x}$ при $0 < a < 1$. Функция непрерывна при любом $x \neq 0$ и в силу (7.17) $y \rightarrow +0$ при $x \rightarrow +0$, а при $x \rightarrow -0$ $y \rightarrow +\infty$. По определению 9.8, $x = 0$ является точкой разрыва второго рода

в. $y = \sin(1/x)$. В точке $x = 0$ не существуют ни двусторонний, ни односторонние пределы (см. пример 7.5). По определению 9.8, $x = 0$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 7.10).

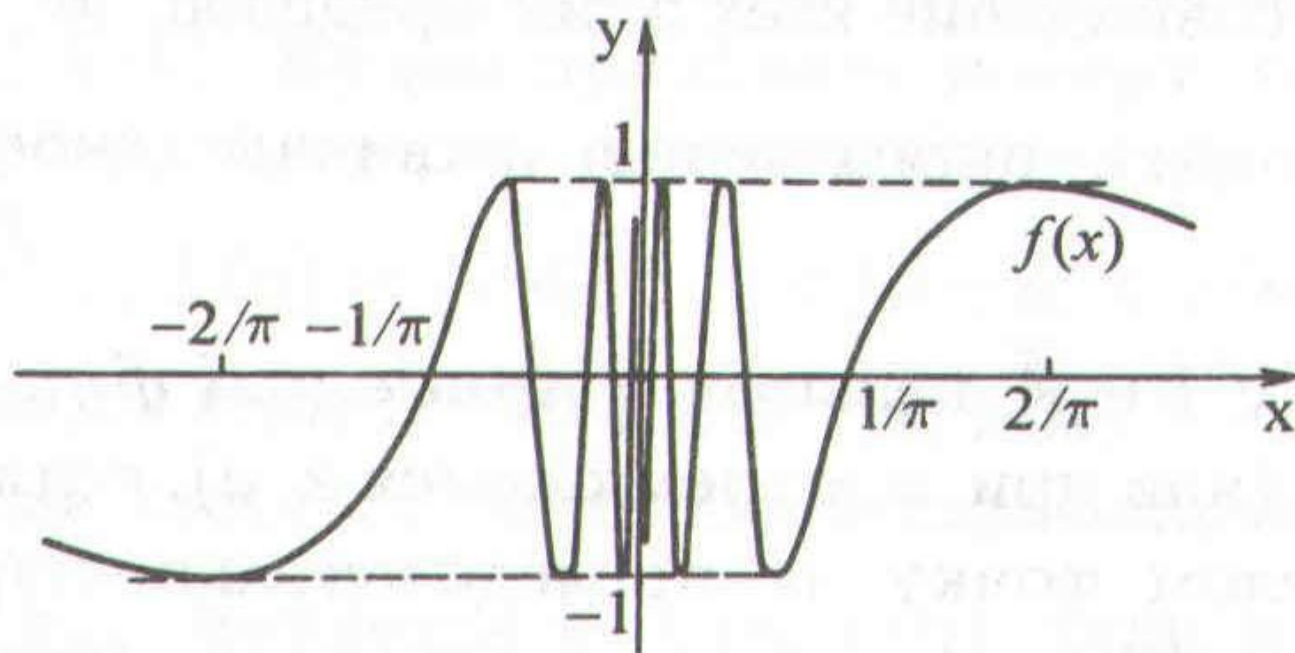


Рис. 7.10

Свойства непрерывных функций

Теорема (первая теорема Больцано — Коши).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка c , в которой функция обращается в нуль, т.е.

$$(f(x) \in C[a, b]) \wedge (f(a)f(b) < 0) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(c) = 0.$$

Теорема имеет простой геометрический смысл: если непрерывная линия *графика функции* лежит и ниже, и выше оси Ox , то эта линия пересекает ось Ox (рис. 9.6).

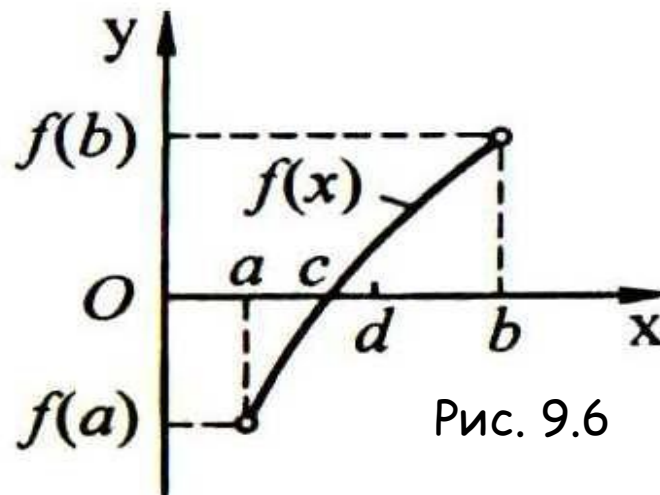


Рис. 9.6

Теорема о промежуточном значении непрерывной функции

Теорема (вторая теорема Больцано — Коши).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором промежутке X (замкнутом или нет, конечном или бесконечном). Если в двух точках a и b ($a < b$) этого промежутка функция принимает неравные значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, каково бы ни было число C , лежащее между A и B , найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = C$.

Теорема (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция является *ограниченной* на этом отрезке, т.е. существуют числа m и M , такие, что $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$.

Существенным условием в этой теореме является непрерывность функции именно на отрезке. Непрерывность лишь на интервале не обеспечивает ограниченности функции. Так, при $x \in (0, \pi/2)$ функция $\operatorname{tg} x$ непрерывна (см. пример 9.3), но не ограничена

Теорема (вторая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения, т.е.

$$f(x) \in C[a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_*, x^* \in [a, b] : \forall x \in [a, b] \quad f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*).$$

На рис. 9.8 наименьшее и наибольшее значения обозначены соответственно m и M . Существенным условием в этой теореме (как и в предыдущей) является непрерывность функции именно на отрезке, а не вообще на промежутке

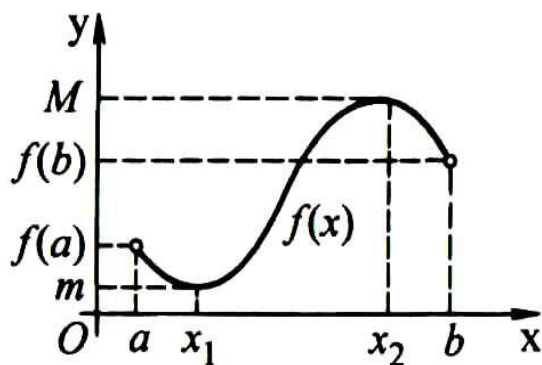


Рис. 9.8

любого типа. Даже сочетание непрерывности и ограниченности не гарантирует достижения функцией наименьшего и наибольшего значений: на $\mathbb{R}$ функция $1/(1+x^2)$ не

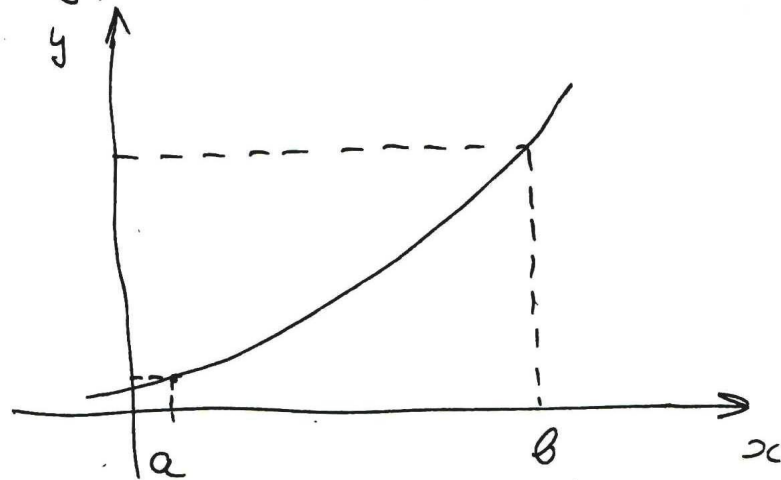
прерывна

как дробно-рациональная с не обраща-

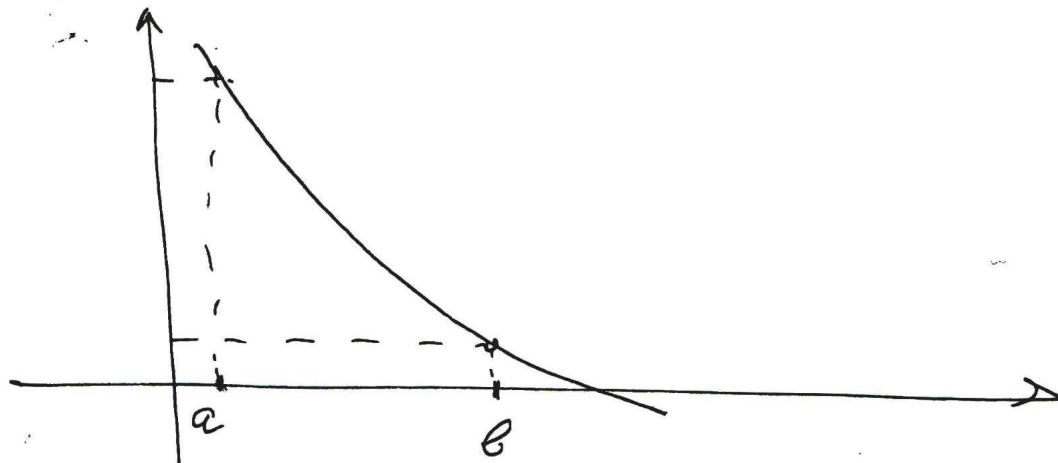
ющимся в нуль знаменателем и ограничена, но не достигает наименьшего значения

Теорема (об обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в интервале (a, b) . Тогда в соответствующем (a, b) интервале $(f(a + 0), f(b - 0))$ (или $(f(b - 0), f(a + 0))$) значений этой функции существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, также возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Если $y=f(x)$ монотонно возрастает и непрерывна на (a, b) , и $x=f^{-1}(y)$ монотонно возрастает и непрерывна на $(f(a+0), f(b-0))$



Если $y=f(x)$ монотонно убывает и непрерывна на (a, b) , и $x=f^{-1}(y)$ монотонно убывает и непрерывна на $(f(b+0), f(a-0))$



Асимптоты

Определение. Прямая $x = a$ наз.
вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$,
если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Пример. Прямая $x = 0$ - вертик. асимптота графиков
 $y = \frac{1}{x}$, $y = \ln x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Теорема. Прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда

когда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - kx\} = b$$

Док-во. Пусть $y = kx + b$ - асимптота, тогда

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \rightarrow k, \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \rightarrow b, \quad x \rightarrow \infty$$

$$\text{Пусть } \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - kx\} = b \quad \Rightarrow$$

$$f(x) - kx = b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad y = kx + b \text{ - асимптота. } \blacktriangleright$$

Замечание. Для существования асимптоты достаточно лишь $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - kx\} = b$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ наз. (двусторонней) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty$$

иначе, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (kx + b)\} = 0$

Если этот предел существует только при:

$x \rightarrow -\infty$, то асимптота наз. левосторонней,

$x \rightarrow +\infty$, — правосторонней.

односторонняя
асимптота.

При $k = 0$ асимптота наз. горизонтальной.

