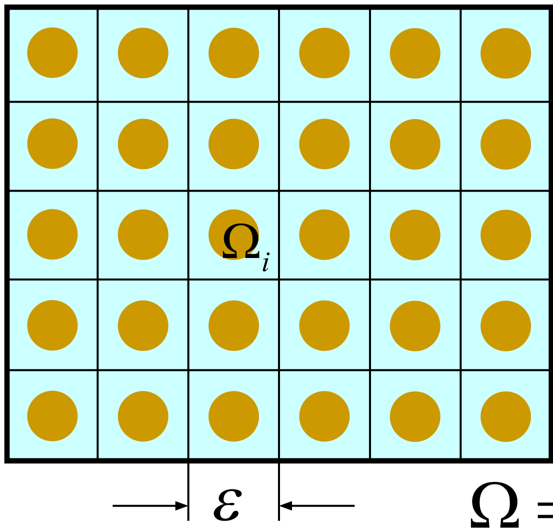
Введение в асимптотические методы. Лекция 12

Метод гомогенизации: вариационный подход

1. Вариационная постановка



$$\Omega = \bigcup \Omega_i$$

На микроуровне свойства среды описываются лагранжианом

$$\Lambda\left(k(x/\varepsilon), \nabla p\right)$$

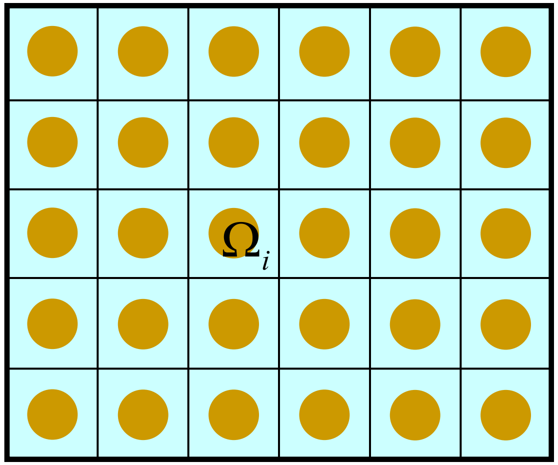
Вариационная формулировка задачи $\min\limits_{p} \int\limits_{\Omega} \Lambda\left(k(x/\varepsilon), \nabla p\right) dx$

Пример $\Lambda = \frac{1}{2} k(x/\varepsilon)\left(\nabla p\right)^2$ $\min\limits_{p} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} k(x/\varepsilon)\left(\nabla p\right)^2 dx \Leftrightarrow \nabla \cdot k(x/\varepsilon) \nabla p = 0$

Найти лагранжиан, описывающий свойства среды на макроуровне

$$\Lambda_0\left(\nabla p\right)$$

2. Нахождение макролагранжиана



$$\min_{p} \int_{\Omega} \Lambda\left(k(x/\varepsilon), \nabla p_{\varepsilon}\right) dx$$

$$p_{\varepsilon} = p_0(x) + \varepsilon\, p_1(x, y) + \ldots$$

тренд+осцилляции

$p_1(x, y)$ периодична по y $\qquad y = x/\varepsilon$

$$\nabla p_{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \nabla_y p + \nabla_x p = \nabla_x p_0 + \nabla_y p_1 + O(\varepsilon)$$

$$\min_{p_0, p_1} \int_{\Omega} \Lambda\left(k(y), \nabla_y p_1 + \nabla_x p_0\right) dx = \min_{p_0, p_1} \sum_i |\Omega_i| \int_{\Omega_i} \Lambda\left(k(y), \nabla_y p_1 + \nabla_x p_0\right) dy =$$

$$= \min_{p_0} \sum_i |\Omega_i| \underbrace{\min_{p_1} \int_{\Omega_i} \Lambda\left(k(y), \nabla_y p_1 + \nabla_x p_0(x_i)\right) dy}_{\Lambda_0(\nabla_x p_0(x_i))} = \min_{p_0} \sum_i |\Omega_i| \Lambda_0\left(\nabla_x p_0(x_i)\right) =$$

$$= \min_{p_0} \int_{\Omega} \Lambda_0\left(\nabla_x p_0\right) dx$$

3. Итог

Макроскопический лагранжиан зависит только от макроскопического градиента давления $\Lambda_0(\nabla p)$ и может быть вычислен как

$$\boxed{\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)=\min_{\varphi}\left\langle \Lambda\left(k(y),\left(\vec{\xi}+\nabla\varphi\right)\right)\right\rangle}$$

Пример

$$\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)=\min_{\varphi}\left\langle \tfrac{1}{2}k(y)\left(\vec{\xi}+\nabla\varphi\right)^2\right\rangle=\tfrac{1}{2}\langle k\rangle\xi^2+\min_{\varphi}\left\langle \tfrac{1}{2}k(y)\left(2\vec{\xi}\cdot\nabla\varphi+\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right)\right\rangle$$

$$\delta\left\langle \tfrac{1}{2}k(y)\left(2\vec{\xi}\cdot\nabla\varphi+\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right)\right\rangle=\left\langle\left(-\nabla k(y)\nabla\varphi-\vec{\xi}\cdot\nabla k\right)\delta\varphi\right\rangle$$

$$-\nabla k(y)\nabla\varphi=\vec{\xi}\cdot\nabla k \qquad \varphi=\vec{\xi}\cdot\vec{N}(y)$$

$$\boxed{-\nabla\cdot\left(k(y)\nabla N_i\right)=\frac{\partial k(y)}{\partial y_i}}$$

задачи на ячейке

$$\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)-\tfrac{1}{2}\langle k\rangle\xi^2=\left\langle k\vec{\xi}\cdot\nabla\varphi+\tfrac{1}{2}k\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\right\rangle=\left\langle k\vec{\xi}\cdot\nabla\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\nabla k\nabla\varphi\right\rangle=$$

$$=\left\langle k\vec{\xi}\cdot\nabla\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi\vec{\xi}\cdot\nabla k\right\rangle=\left\langle \tfrac{1}{2}k\vec{\xi}\cdot\nabla\varphi\right\rangle=\tfrac{1}{2}\xi_i\xi_j\left\langle k\frac{\partial N_i}{\partial y_j}\right\rangle$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\frac{\partial^2 p_0(x)}{\partial x_i\partial x_j}=0 \quad\Longleftarrow\quad \Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)=\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}k_{ij}\xi_i\xi_j$$

эффективные к-ты

$$\boxed{k_{ij}=\int_Y k(y)\left(\delta_{ij}+\frac{\partial N_j}{\partial y_i}\right)dy}$$

4. Двойственная формулировка

Прямая формулировка $$\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right) = \min_{\varphi}\left\langle \Lambda\left(k(y), \left(\vec{\xi} + \nabla\varphi\right)\right)\right\rangle$$

Двойственная формулировка $$\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right) = \max_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \Lambda^*\left(k(y), \vec{v}\right)\right\rangle$$

$\Lambda^*\left(k, \vec{\eta}\right)$ преобразование Юнга-Фенхеля $\Lambda\left(k, \vec{\xi}\right)$ $\vec{\xi} \leftrightarrow \vec{\eta}$

$$\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right) = \min_{\varphi}\max_{\vec{v}}\left\langle \vec{v}\cdot\left(\vec{\xi} + \nabla\varphi\right) - \Lambda^*\left(k, \vec{v}\right)\right\rangle = \max_{\vec{v}}\min_{\varphi}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \Lambda^*\left(k, \vec{v}\right) - \varphi\nabla\cdot\vec{v}\right\rangle =$$

$$= \max_{\vec{v}}\begin{cases} \left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \Lambda^*\left(k, \vec{v}\right)\right\rangle, & \nabla\cdot\vec{v} = 0 \\ -\infty, & \nabla\cdot\vec{v} \neq 0 \end{cases} = \max_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \Lambda^*\left(k, \vec{v}\right)\right\rangle$$

Пример

$$\Lambda_0(\vec{\xi}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\xi_i\xi_j = \max_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \tfrac{1}{2}k^{-1}(y)v^2\right\rangle$$

Оценка $$\Lambda_0 \geq= \max_{\vec{V}}\left\langle \vec{V}\cdot\vec{\xi} - \tfrac{1}{2}\left\langle k^{-1}\right\rangle V^2\right\rangle = \left(\vec{V}_{\max} = \vec{\xi}\left\langle k^{-1}\right\rangle^{-1}\right) = \tfrac{1}{2}k_{harm}\xi^2$$

5.Общие результаты

Если микроскопические свойства среды описываются лагранжианом

(1) $\Lambda\left(k(y),\nabla p\right)$ (1a) $\frac{1}{2}k(y)\left(\nabla p\right)^2$

То макроскопические свойства могут быть описана лагранжианом

(2) $\Lambda_0\left(\nabla p\right)$ (2a) $\frac{1}{2}\sum_{i,j} k_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i}\frac{\partial p}{\partial x_j}$

а функция $\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)$ может быть найдена на основе прямого (в давлениях) или двойственного (в потоках) вариационного принципа для задачи на ячейке

прямой:

(3) $\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)=\min_{\varphi}\left\langle \Lambda\left(k(y),\left(\vec{\xi}+\nabla\varphi\right)\right)\right\rangle$ $\min_{\varphi}\left\langle \frac{1}{2}k(y)\left(\vec{\xi}+\nabla\varphi\right)^2\right\rangle$

Двойственный:

(4) $\Lambda_0\left(\vec{\xi}\right)=\max_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi}-\Lambda^*\left(k(y),\vec{v}\right)\right\rangle$ $\max_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi}-\frac{1}{2}k^{-1}(y)v^2\right\rangle$

6. Еще один общий результат

Аналогичные формулы могут быть получены для двойственного макроскопического вариационного принципа

$$\Lambda_0^*(\vec{\eta}) = \max_{\vec{\xi}}\left(\vec{\eta}\cdot\vec{\xi} - \Lambda_0(\vec{\xi})\right)$$

(1) $$\Lambda_0(\vec{\xi}) = \max_{\vec{\eta}}\left(\vec{\eta}\cdot\vec{\xi} - \Lambda_0^*(\vec{\eta})\right)$$ потому что $f^{**} = f$

(2) $$\Lambda_0(\vec{\xi}) = \max_{\nabla\cdot\vec{v}=0}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \Lambda^*\left(k(y),\vec{v}\right)\right\rangle$$

Двойственный ВП для задачи на ячейке

$$= \max_{\vec{\eta}} \max_{\substack{\nabla\cdot\vec{v}=0 \\ \langle\vec{v}\rangle=\vec{\eta}}}\left\langle \vec{v}\cdot\vec{\xi} - \Lambda^*\left(k(y),\vec{v}\right)\right\rangle = \max_{\vec{\eta}}\left(\vec{\eta}\cdot\vec{\xi} - \min_{\substack{\nabla\cdot\vec{v}=0 \\ \langle\vec{v}\rangle=\vec{\eta}}}\left\langle \Lambda^*\left(k(y),\vec{v}\right)\right\rangle\right)$$

Сравнение (1) и (2) дает

(3) $$\boxed{\Lambda_0^*(\vec{\eta}) = \min_{\substack{\nabla\cdot\vec{v}=0 \\ \langle\vec{v}\rangle=\vec{\eta}}}\left\langle \Lambda^*\left(k(y),\vec{v}\right)\right\rangle}$$

Для сучая 1-D

$$\Lambda_0^*(\eta) = \left\langle \Lambda^*\left(k(y),\eta\right)\right\rangle$$

7. 1-D Пример

При гомогенизации могут возникать свойства, отсутствующие на микроуровне

Нелинейная фильтрация с микролагранжианом $\Lambda = \frac{a}{\alpha}\left|\frac{dp}{dx}\right|^{\alpha}$ $\left(|q| = a\left|\frac{dp}{dx}\right|^{\alpha-1}\right)$

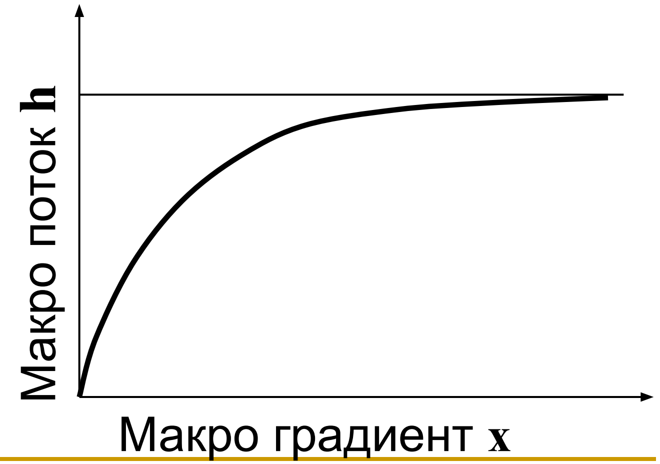
Коэффициент a константа, α функция y , $\alpha > 1$

(1) $$\Lambda_0^*(\eta) = \left\langle \frac{a}{\beta(y)}\left|\frac{\eta}{a}\right|^{\beta(y)} \right\rangle, \quad \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1$$

Пусть β эргодическое случайное поле (простр. среднее = среднее по ансамблю)

(2) $$\Lambda_0^*(\eta) = aM\left(\frac{1}{\beta}\left|\frac{\eta}{a}\right|^{\beta}\right)$$

Макроскопические свойства зависят от плотности распределения β. Возможно, что матожидание (2) будет конечным только при достаточно малых потоках η



8. 1-D Пример

Плотность распределения β

(1) $$f(\beta)=\frac{c^b}{\Gamma(b)}(\beta-1)^{b-1}\exp\left(-c(\beta-1)\right)$$ Гамма распределение

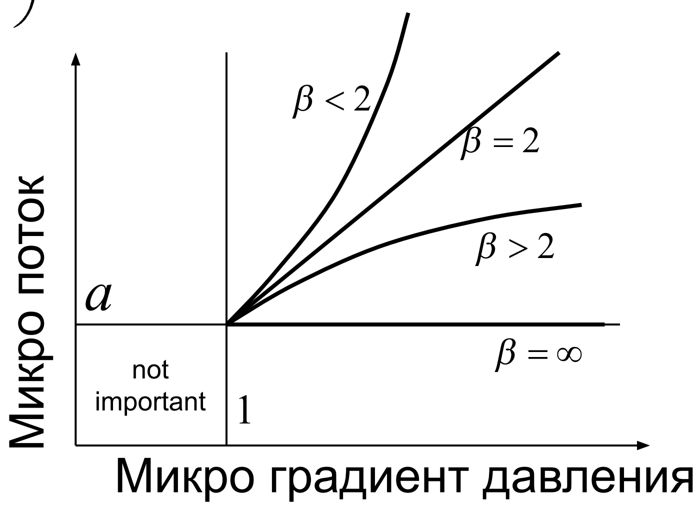
(2) $$c=\frac{\beta_0-1}{\sigma^2},\ b=\frac{(\beta_0-1)^2}{\sigma^2}\quad\left(\beta_0=M\beta,\ \sigma^2=M(\beta-\beta_0)^2\right)$$

(3) $$\Lambda_0^*(\eta)=\frac{ac^be^c}{\Gamma(b)}\int_1^\infty\frac{1}{\beta}(\beta-1)^{b-1}\left(\frac{\eta}{a}e^{-c}\right)^{\beta-1}d\beta$$

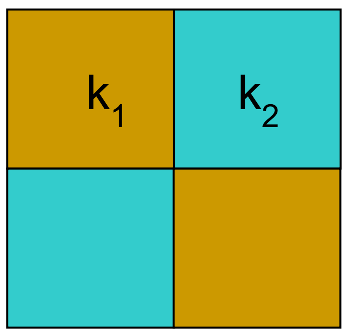
Если $\eta>ae^c$ то (3) расходится, независимо от значения параметра b.

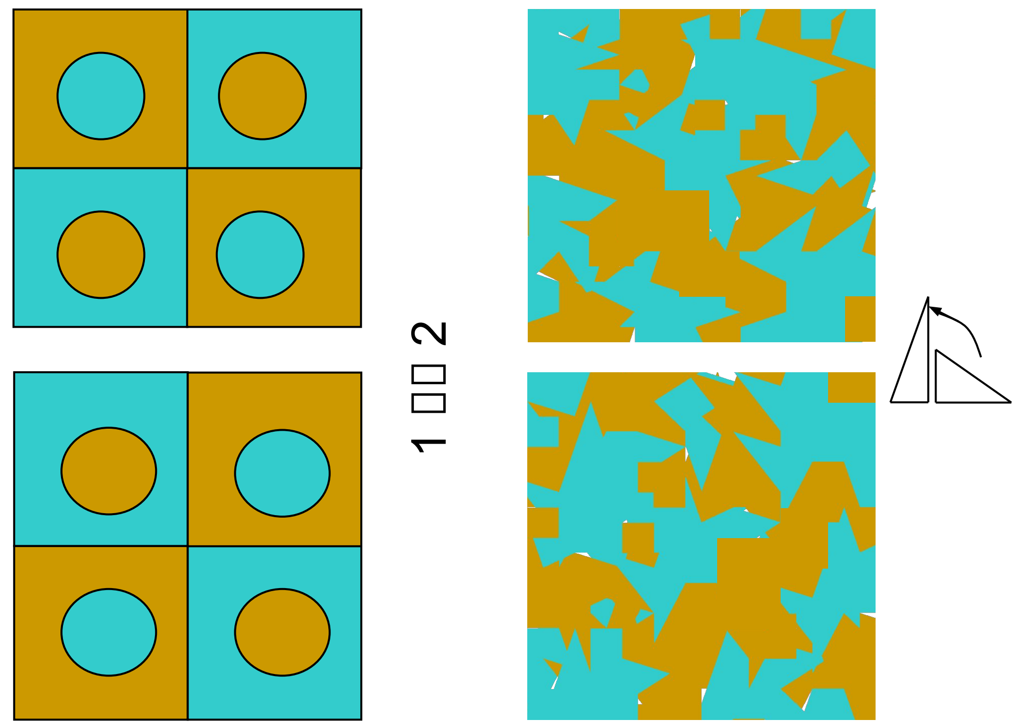
Расходимость из-за больших β

Малое число слоев с большими β определяют режим течения при больших градиентах давления.



9. 2-D Фильтрация: 1-я формула Дыхне





Специальные (хорошо перемешанные) среды

Макроскопические свойства среды инвариантны относительно
a) Замены фаз
b) Вращения на **p/2**

10. 2-D Фильтрация: 1-я формула Дыхне

(1) $$\Lambda_0(\vec{\xi}) = \min_{\varphi} \left\langle \tfrac{1}{2} k(y) \left(\vec{\xi} + \nabla\varphi\right)^2 \right\rangle \leftarrow \Lambda\left(k(y), \vec{\xi} + \nabla\varphi\right)$$

(2) $$\Lambda_0^*(\vec{\eta}) = \min_{\substack{\nabla\cdot\vec{v}=0 \\ \langle\vec{v}\rangle=\vec{\eta}}} \left\langle \tfrac{1}{2} k^{-1}(y) v^2 \right\rangle = \min_{\substack{\nabla\cdot\vec{v}=0 \\ \langle\vec{v}\rangle=0}} \left\langle \tfrac{1}{2} k^{-1}(y) \left(\vec{v} + \vec{\eta}\right)^2 \right\rangle \leftarrow \Lambda^*\left(k(y), \vec{\eta} + \vec{v}\right)$$

$v_1 = \partial_2\psi$, $v_2 = -\partial_1\psi$, ψ ограничена (как и φ в(1) !!).

(3) $$\Lambda_0^*(\vec{\eta}) = \min_{\psi} \left\langle \tfrac{1}{2} k^{-1}(y_1, y_2) \left((\eta_1 + \partial_2\psi)^2 + (\eta_2 - \partial_1\psi)^2 \right) \right\rangle =$$

$$\min_{\psi} \left\langle \tfrac{1}{2} k^{-1}(y_2, -y_1) \left(\vec{\eta} + \nabla\psi\right)^2 \right\rangle = \min_{\psi} \left\langle \tfrac{1}{2} k^{-1}(y_1, y_2) \left(\vec{\eta} + \nabla\psi\right)^2 \right\rangle$$

p/2 инвариантность

(4) $$\vec{\eta} \to \sqrt{k_1 k_2}\, \vec{\xi}, \quad \psi \to \sqrt{k_1 k_2}\, \varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_0(\vec{\xi}) = \Lambda_0^*(\sqrt{k_1 k_2}\, \vec{\xi})}$$ (5)

$k_1 k_2 / k(y) = k_{1\leftrightarrow 2}(y)$ + инвариантность по замене фаз

Окончательное уравнение

11. 2-D Фильтрация: 1-я формула Дыхне

Решением уравнения $\Lambda_0(\xi) = \Lambda^*_0(b\xi)$ является $\frac{1}{2}b\xi^2$

Проверка для линейной изотропной среды:

$$\Lambda_0(\xi) = \tfrac{1}{2}k_?\xi^2, \quad \Lambda^*_0(\xi) = \tfrac{1}{2}k_?^{-1}\xi^2 \quad \Rightarrow \quad k_? = b^2 k_?^{-1} \quad \Rightarrow \quad k_? = b$$

Доказательство в общем случае:

a) $\Lambda(x) + \Lambda^*(x^*) \ge x \cdot x^*$ (непосредственно из определения преобразования Ю-Ф)

b) $x^* = bx \quad \Rightarrow \Lambda(x) + \Lambda^*(bx) \ge bx^2 \qquad \Lambda(x) = \Lambda^*(bx) \quad \Rightarrow \Lambda(x) \ge \tfrac{1}{2}bx^2$

c) $\Lambda^*(x^*) = \sup\limits_x \left(x \cdot x^* - \Lambda(x)\right) \le \sup\limits_x \left(x \cdot x^* - \tfrac{1}{2}bx^2\right) = \tfrac{1}{2}b^{-1}x^{*2}$

d) $x^* = bx$ и $\Lambda(x) = \Lambda^*(bx) \quad \Rightarrow \quad \Lambda(x) \le \tfrac{1}{2}bx^2$

Окончательный результат: “хорошо перемешанная” среда макроскопически изотропна, а ее проницаемость равна $k_{geom} = \sqrt{k_1 k_2}$