



Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления

Веремей Е.И.

Введение в задачи исследования и проектирования цифровых систем

Лекции 2 — 5

**Раздел 1. Математические модели
линейных цифровых систем**

1. Преобразование дискретных сигналов линейными системами



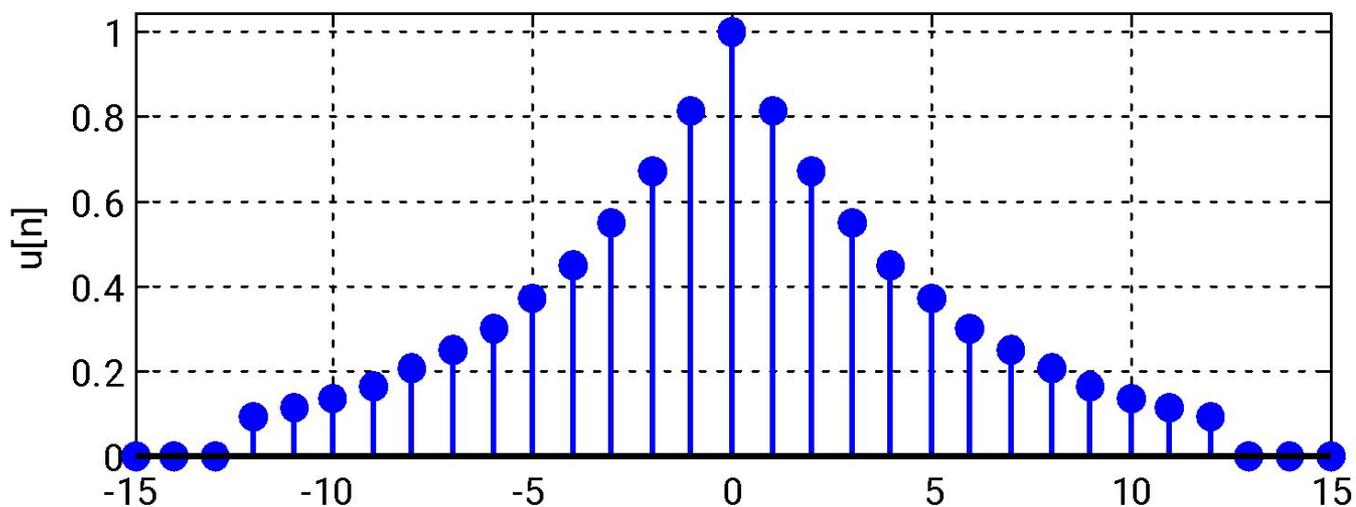
Система, преобразующая дискретный сигнал $u[n]$

$$1. \quad y[n] = 2(u[n])^2$$

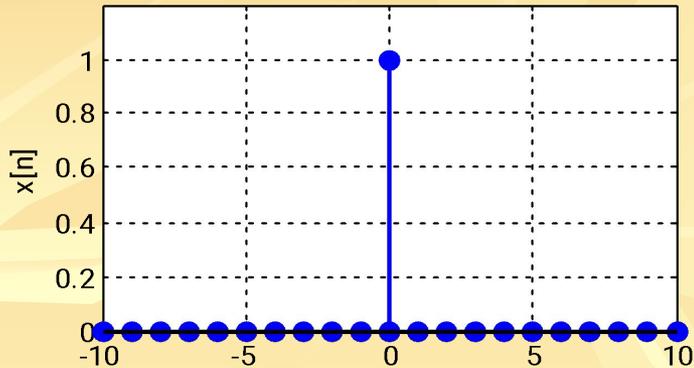
$$2. \quad y[n] = 2\left((u[n])^2 - |u[n-1]|\right)$$

$$3. \quad y[n] = 2u[n] + u[n-1] - 5y[n-2]$$

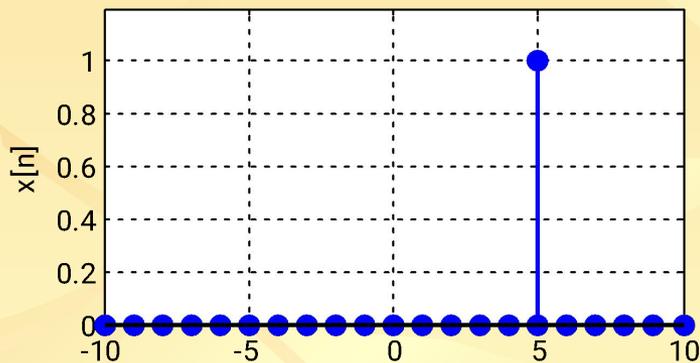
$$u[n] = \begin{cases} e^{-0.2|n|}, & \text{если } |n| \leq 12, \\ 0, & \text{если } |n| > 12. \end{cases}$$



Единичный импульс

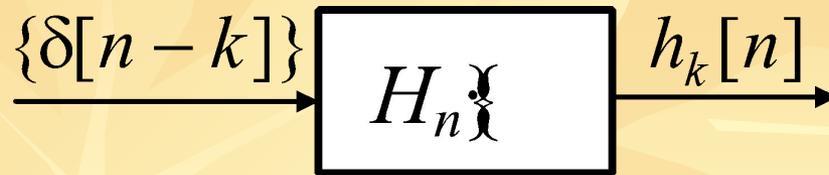


$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0 \end{cases}$$



$$\delta[n - k] = \begin{cases} 1 & \text{если } n = k, \\ 0, & \text{если } n \neq k \end{cases}$$

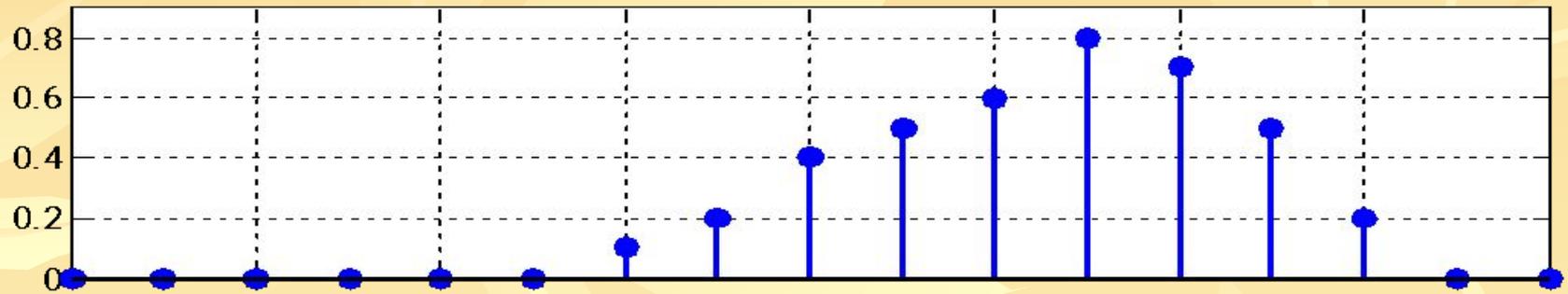
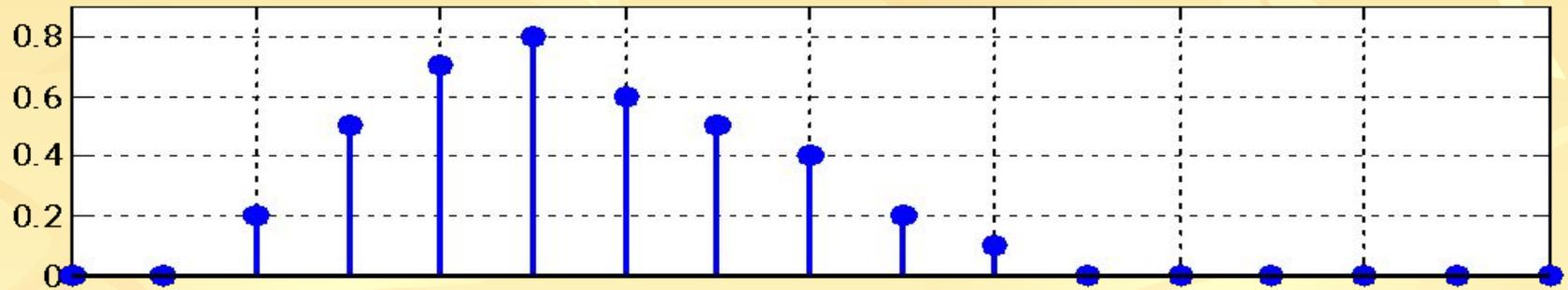
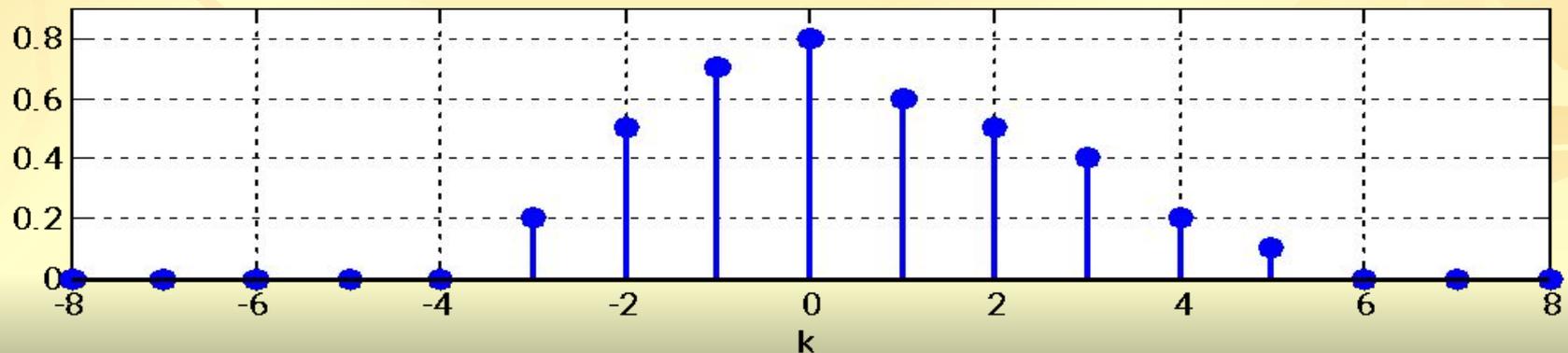
$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n - k]$$



$$h_k[n] = H_n \{\delta[n - k]\} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] h_k[n].$$

$$h[n] = H_n \{\delta[n]\} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] h[n - k].$$

$$y[n] = u[n] * h[n]$$

Построение последовательности $h[n-k]$ 1) impulse response $h(k)$ 2) impulse response $h(-k)$ 3) impulse response $h(-k+n)$, $n=3$ 

2. Математические модели DLT систем в виде разностных уравнений

$$y = \{y[n]\} \longrightarrow \nabla y = \{\nabla y[n]\}$$

$$\nabla y[n] = y[n] - y[n-1], \quad n \in N^1$$

Первая обратная конечная разность

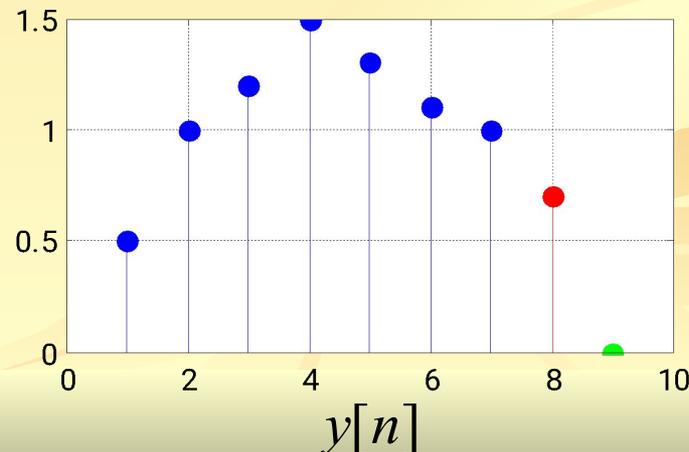
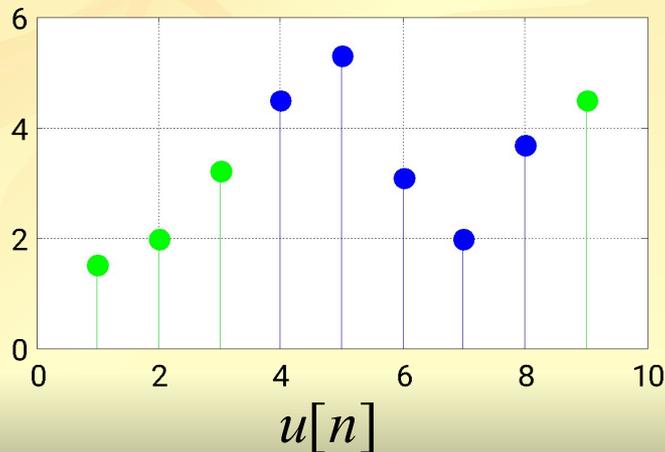
$$F\{n, y[n], \nabla y[n], \nabla^2 y[n], \dots, \nabla^N y[n]\} = 0$$

Базовая математическая модель DLTИ системы с одним входом и одним выходом (SISO)

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_M u[n-M].$$

Линейное неоднородное разностное уравнение

$$y[n] = -\sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k u[n-k]$$



$$n = 8$$

$$N = 7$$

$$M = 4$$

ТИПЫ SISO DLT МОДЕЛЕЙ

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_M u[n-M].$$

Модель авторегрессии со скользящим средним (АРСС)
Autoregressive moving average (ARMA) model

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n].$$

Модель авторегрессии (АР)
Autoregressive (AR) model

$$y[n] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_M u[n-M].$$

Модель скользящего среднего (СС)
Moving average (MA) model

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_M u[n-M].$$

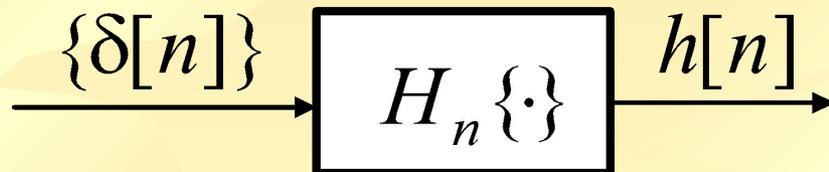
APCC (ARMA)

AP (AR)

CC (MA)

рекурсивные цифровые фильтры

– нерекурсивные цифровые фильтры



$$\{h[n]\} = \{b_0, b_1, \dots, b_M\}$$

КИХ (FIR) фильтры

Разностные уравнения DLTИ систем в пространстве состояний

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n].$$

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{b}u[n],$$

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{x}[n] + \mathbf{d}u[n].$$

$$\mathbf{c} = (-a_N \quad -a_{N-1} \quad -a_{N-2} \quad \dots \quad -a_1)$$

Модель AP
(авторегрессия)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = b_0$$

3. Z – преобразование (Преобразование Лорана)

$$f = \{f[n]\} \longrightarrow F = F(z)$$

$$F(z) = Z\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

**Прямое
преобразование**

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0. \end{cases} \longrightarrow F(z) = Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1 \cdot z^0 = 1$$

$$u_e[n] = \begin{cases} 1 & \text{если } n \geq 0, \\ 0, & \text{если } n < 0, \end{cases} \longrightarrow F(z) = Z\{u_e[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n$$

$$f[n] = A\alpha^n u_e[n] \longrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A(\alpha z^{-1})^n = \frac{A}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{Az}{z - \alpha}$$

№	$f[n]$	$F(z)$
1.	$\delta[n]$	1
2.	$u_e[n]$	$\frac{z}{z-1}$
3.	$A\alpha^n u_e[n]$	$\frac{Az}{z-\alpha}$
	$f_1[n], f_2[n]$	$F_1(z), F_2(z)$
4.	$\alpha_1 F_1(z) + \alpha_2 F_2(z)$	$\alpha_1 f_1[n] + \alpha_2 f_2[n]$
5.	$f[n-m]$	$z^{-m} F(z)$
6.	$f_1[n] * f_2[n]$	$F_1(z)F_2(z)$

Одностороннее z-преобразование

$$f = \{f[n]\} \longrightarrow F = F(z)$$

$$F(z) = Z_0\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]u_e[n]z^{-n}$$

$$f_m = \{f[n-m]\} \xrightarrow{m > 0} F_m(z) = Z_0\{f_m[n]\}$$

$$F_m(z) = z^{-m} \left(F(z) + \sum_{p=-m}^{-1} f[p]z^{-p} \right)$$

Обратное z-преобразование

$$F = F(z) \longrightarrow f = \{f[n]\} = Z^{-1}[F(z)]$$

$$f[n] = \oint_{\gamma} F(z) \frac{z^n}{z} dz$$

$$f[n] = \oint_{\gamma} F(z) \frac{z^n}{z} dz = \sum_{i=1}^k \operatorname{Res} \left[F(z) \frac{z^n}{z}, z_i \right]$$

Обратное z-преобр. для дробно-рациональных функций

$$F = F(z) \longrightarrow f = \{f[n]\} = Z^{-1}[F(z)]$$

$$F(z) = \frac{zB(z)}{A(z)} \quad A(z) = a_{n_s} (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\dots(z - \alpha_{n_s})$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^{n_s} \frac{B(\alpha_i)}{\alpha_i A'(\alpha_i)} \frac{z}{z - \alpha_i} \longrightarrow f = Z^{-1}[F(z)] = \sum_{i=1}^n f_i,$$

$$f_i = \{f_i[n]\} \quad f_i[n] = A_i \alpha_i^n u_e[n] \quad A_i = \frac{B(\alpha_i)}{\alpha_i A'(\alpha_i)}$$

Решение разностных уравнений в изображениях

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \dots + a_N y[n-N] = b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_M u[n-M].$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} U(z)$$

$$U(z) = Z\{u[n]\} \quad \longrightarrow \quad Y(z) = Z\{y[n]\}$$

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{X}(z) = Z\{\mathbf{x}[n]\} \quad \mathbf{U}(z) = Z\{\mathbf{u}[n]\} \quad \mathbf{X}(z) = (\mathbf{E}z - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

4. Модели DLT-систем в изображениях по Лорану

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{x}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n], \quad \mathbf{u}[n] \in E^{m_s} \quad \mathbf{y}[n] \in E^{k_s}$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]. \quad \mathbf{x}[n] \in E^{n_s}$$

$$\mathbf{Y}(z) = [\mathbf{C}(\mathbf{E}z - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(z)$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ МАТРИЦА

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(\mathbf{E}z - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D},$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}(z)\mathbf{u}, \quad \mathbf{H}(z) := [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$$

Передаточные функции цифровых фильтров

$$y[n] + a_1y[n-1] + \dots + a_Ny[n-N] = b_0u[n] + b_1u[n-1] + \dots + b_Mu[n-M].$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}} U(z) \quad y = H(z)u$$

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ ФИЛЬТРА

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_Nz^{-N}}$$