

# Решение комбинаторных задач.

Предмет: математика.

Тип урока: урок комплексного применения знаний.

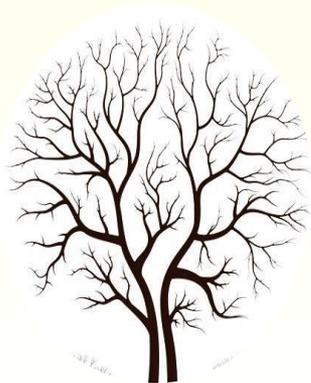
Продолжительность: 1 урок - 45 минут.

Класс: 9.

Учитель: Степушкина Н.Ю.

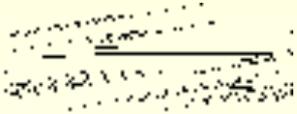
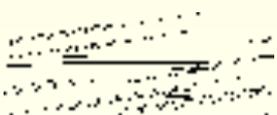
## Цели урока:

- Подвести итог проделанной работе, решить задачи с применением всех правил и формул. Проверить осознанность усвоения материала.
- Развитие навыков комбинаторного мышления.
- Воспитание творческого подхода к решению задач.



## Проверка домашнего задания

Условие задачи	Решение задачи
Сколькими способами 9 учащихся могут встать в очередь в школьном буфете?	$P_9 = 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$ . <i>Ответ:</i> 362880 способов
Сколько существует способов выбрать троих ребят из 11 желающих дежурить по школе?	Количество сочетаний из 11 по 3 (порядок выбора не имеет значения). $C_{11}^3 = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165$ <i>Ответ:</i> 165 способов.
Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100м?	Выбор из 8 по 3 с учётом порядка. $A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ <i>Ответ:</i> 336 способов.

Вид комбинации	Формула	Характерный пример
Перестановка	$P_n = n!$	Вся совокупность трёхзначных номеров
Сочетание		Вся совокупность всех десятичных номеров, в каждом из которых нет повторений цифр
Размещение		Всевозможные варианты состава группы в количестве 3-х человек из коллектива, в которых 10 человек

## Решение задач

1. Если на одной полке книжного шкафа стоит 30 различных книг, а на другой 40 различных книг (и нет таких, как на первой полке), то выбрать одну книгу из стоящих на этих полках можно:...

$$30+40= 70 \text{ способов}$$

Ответ: 70 способов

2. В конференции участвовало 30 человек. Каждый участник с каждым обменялся визитной карточкой. Сколько всего понадобится карточек?

Каждый из 30 участников конференции раздал 29 карточек. Всего было роздано  $30 \cdot 29 = 870$  карточек.

Ответ: 870

## Решение задач

Сочетания	Размещения
<p>3. Сколько рукопожатий получится, если здороваются 5 человек?</p> <p>{Вася, Петя} = {Петя, Вася} -</p>	<p>4. Сколькими способами пять человек могут обменяться фотографиями?</p>
<p>- одно и то же.</p> <p>Порядок неважен.</p> <p><b>Сочетание</b> из пяти по два.</p> $C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$	<p>{Вася, Петя} <math>\neq</math> {Петя, Вася} -</p> <p>- разные обмены.</p> <p>Порядок важен.</p> <p><b>Размещение</b> из пяти по два.</p> $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 4 \cdot 5 = 20$

## Решение задач

Сочетания	Размещения
<p data-bbox="202 348 979 462"><b>5. Сколько аккордов можно сыграть с помощью трех клавиш из семи?</b></p> <p data-bbox="202 544 967 654">{до, ми, соль} = {до, соль, ми} – одно и то же. Порядок неважен, значит это подмножество по три элемента из семи, значит это <b>сочетание</b> из семи по три.</p> $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$	<p data-bbox="994 348 1649 525"><b>6. Сколько мелодий (трезвучий, проигрышей) можно сыграть с помощью трех клавиш из семи?</b></p> <p data-bbox="994 606 1630 658">{до, ми, соль} <math>\neq</math> {до, соль, ми} –</p> <p data-bbox="994 676 1725 915">разные мелодии. Порядок важен, значит это последовательность по три элемента из семи - <b>размещение</b> из семи по три.</p> $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

## Решение задач

- Сколькими способами 5 ламп можно расположить в круговой гирлянде?
- Сколькими способами пять часовых можно расположить у основания пятиугольной пирамиды по ее углам?
- Сколькими способами  $n$  человек могут сесть на одной скамейке?
- Сколько различных упорядоченных наборов мы можем составить, имея некоторое число элементов?

Каждый из таких упорядоченных наборов, есть перестановка.

$$P_n = n!$$

## Решение задач



8. Команда из 6 человек готовится к выполнению на брусках. Сколькими способами можно установить их очередность, если

- А) Ира должна выступить первой.
- Б) Ира должна выступить первой, а Зоя последней.
- В) Ира и Зоя должны выступать одна за другой.
- Г) Ира должна выступить первой или второй.

Решение задачи:

А) Ира выступает первой, «фиксируем» первое место. Перестановка из 5 элементов  $P_5 = 5!$ .

Б) «Фиксируем» первое место и последнее. Перестановка из 4 элементов  $P_4 = 4!$ .

В) «Склеиваем» 2 элемента, 1 место – Ира, 2 место – Зоя, перестановка из 5 элементов  $P_5 = 5!$ , 1 место – Зоя, 2 место – Ира,  $P_5 = 5!$ .

По правилу суммы  $5! + 5! = 120 + 120 = 240$ .

Г) Ира первой  $5!$ , Ира второй  $5!$ .

По правилу суммы имеем  $120 + 120 = 240$ .

Ответ: 120, 24, 240, 240.

## Решение задач

9. Вороне как-то Бог послал кусочек сыра, брынзы, колбасы, сухарика, шоколада. «На ель ворона взгромоздясь, позавтракать совсем уж собралась, да призадумалась»:

- а) если есть кусочки по очереди, из скольких вариантов придётся выбирать;
- б) сколько получится «бутербродов» из двух кусочков;
- в) если первым везде оставить любимый сыр в «бутерброде», а вторым остальные, то сколько будет вариантов бутербродов;
- г) сколько получится вариантов, если какой-то кусочек всё-таки бросить лисе, а потом ответить на вопрос пункта а)?

Рассмотреть все возможные случаи.



## Решение задач

Вороне Бог послал кусочки 5 разных видов.

а) Есть все кусочки по очереди - это, значит, выбирать только порядок их расположения, т. е. образовывать разные перестановки из 5 элементов.

$$P_5 = 5! = 120.$$

б) Делать бутерброды из двух кусочков - это выбирать разные пары из 5 данных кусочков; при этом порядок выбора не важен;

$$C_2^5 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

в) Если первым сыр, то вторым - любой из 4-х кусочков.

По правилу произведения  $1 \cdot 4 = 4$ .

г) Если бросить Лисе кусочек, то останутся 4 кусочка, которые можно съесть одним из  $P_4 = 4! = 24$  способов (меняется только порядок поедания). Но Лисе можно бросить любой из 5 имеющихся кусочков, при этом в каждом случае будут оставаться 4 разных набора кусочков, каждый из которых можно съесть 24 способами.

Общее число вариантов по правилу умножения :  $5 \cdot P_4 = 5 \cdot 24 = 120$ .

*Ответ:* а) 120; б) 10; в) 4; г) 120.

## Комбинаторика

(от лат. «Combinare» - сочетать, соединять), термин был введен Лейбницем в 1666 году. Многие в комбинаторику в частности правила и основы, ввел Якоб Бернулли.

Естественно, люди пытались найти способ правильного выбора выигрышной в азартных играх.

Одним из первых попыткам решить задачу занимался Д. Паскаль. Паскаль предложил в 1654 году переписки м. французскими м. Ферма. Тогда и зародилась комбинаторика.

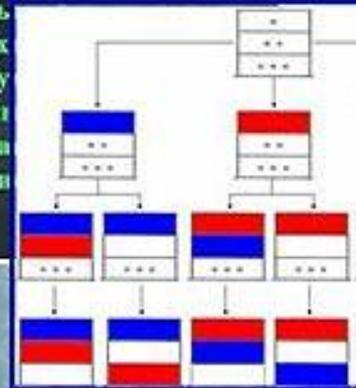
Соберем все варианты в такой таблице:

плюшка,	бутерброд	пряник,	кекс,
кофе	кофе	кофе	кофе
плюшка,	бутерброд	пряник,	кекс,
сок	сок		
плюшка,	бутерброд		
кефир	кефир		

По правилу

## правило умножения

Для того чтобы возможных исходов проведения двух следует переисходов исходов в



На окружности отмечено 12 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

развиваться как наука комбинаторика начала после писем к известному ученому Ласкалю от известного игрока в азартные игры кавалера Де Мере



Лейбниц



Паскаль



Бернулли

$$P_n = n!$$

## Правило суммы.

Если объект *a* можно выбрать *m* различными способами, а объект *b* можно выбрать *n* различными способами, причем результаты выбора объектов *a* и *b* никогда не совпадают, то выбор «либо *a*, либо *b*» можно осуществить *m+n* различными способами.

### **Домашнее задание.**

Решить задачи из сборника Л. В. Кузнецова,  
С. Б. Суворова "Сборник заданий для подготовки к  
итоговой аттестации в 9 классе" стр. 226 - 227.