

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ



БАРЫНИНА МАРИНА ВИТАЛЬЕВНА

Комбинаторика



Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы выбора или расположения элементов множества в соответствии с заданными правилами.

Комбинаторные соединения



● **Перестановки**

1. Перестановки без повторений
2. Перестановки с повторениями

● **Размещения**

1. Размещения без повторений
2. Размещения с повторениями

● **Сочетания**

1. Сочетания без повторений
2. Сочетания с повторениями

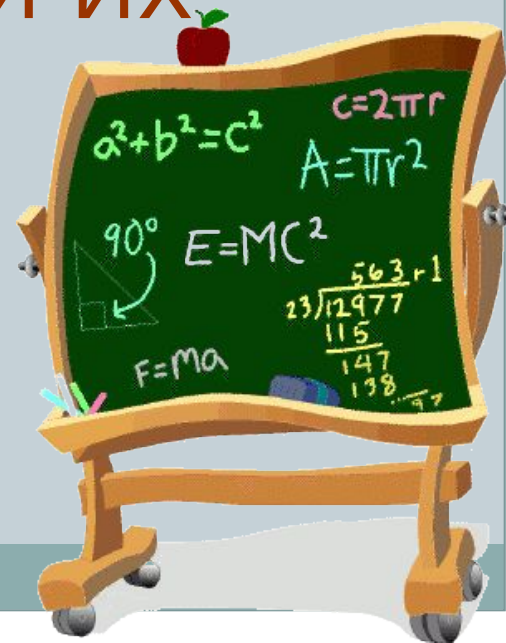
Перестановки



Перестановки – соединения, которые можно составить из n элементов, меняя всеми возможными способами их порядок.

Формула:

$$P_n = n!$$



Пример

Сколькими способами могут 8 человек встать в очередь к театральной кассе?

Решение задачи:

Существует 8 мест, которые должны занять 8 человек. На первое место может встать любой из 8 человек, т.е. способов занять первое место – 8.

После того, как один человек встал на первое место, осталось 7 мест и 7 человек, которые могут быть на них размещены, т.е. способов занять второе место – 7. Аналогично для третьего, четвертого и т.д. места.

Используя принцип умножения, получаем произведение. Такое произведение обозначается как $8!$ (читается 8 факториал) и называется перестановкой P_8 .

Ответ: $P_8 = 8!$

Перестановки с повторениями



Всякое размещение с повторениями, в котором элемент a_1 повторяется k_1 раз, элемент a_2 повторяется k_2 раз и т.д. элемент a_n повторяется k_n раз, где $k_1, k_2, \dots, k_n$ — данные числа, называется перестановкой с повторениями порядка $m = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, в которой данные элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ повторяются соответственно $k_1, k_2, \dots, k_n$ раз.

Перестановки с повторениями



Теорема. Число различных перестановок с повторениями из элементов $\{a_1, \dots, a_n\}$, в которых элементы $a_1, \dots, a_n$ повторяются соответственно $k_1, \dots, k_n$ раз, равно

$$\bar{P} = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!} = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

Пример

Слова и фразы с переставленными буквами называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слова «макака»?

Решение

Всего в слове «МАКАКА» 6 букв ($m=6$).

Определим сколько раз в слове используется каждая буква:

«М» - 1 раз ($k_1=1$)

«А» - 3 раза ($k_2=3$)

«К» - 2 раза ($k_3=2$)

$$P = \frac{m!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \rightarrow P_{1,3,2} = \frac{6!}{1! 3! 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 60.$$

Размещения



Размещением из n элементов по k называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из n элементов.

Два размещения из n элементов считаются различными, если они отличаются самими элементами или порядком их расположения.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))$$

Пример

Сколькими способами из 40 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: староста, физорг и редактор стенгазеты?

Решение:

Требуется выделить упорядоченные трехэлементные подмножества множества, содержащего 40 элементов, т.е. найти число размещений без повторений из 40 элементов по 3.

$$A_{40}^3 = \frac{40!}{37!} = 38 * 39 * 40 = 59280$$

Размещения с повторениями



- Размещения с повторениями – соединения, содержащие **n** элементов, выбираемых из элементов **m** различных видов ($n \leq m$) и отличающиеся одно от другого либо составом, либо порядком элементов.
- Их количество в предположении неограниченности количества элементов каждого вида равно

$$\bar{A}_m^n = m^n$$

Пример

В библиотеку, в которой есть много одинаковых учебников **по десяти предметам**, пришло **5 школьников**, каждый из которых хочет взять учебник. Библиотекарь записывает в журнал по порядку названия (без номера) взятых учебников без имен учеников, которые их взяли. Сколько разных списков в журнале могло появиться?

Пример

Так как учебники по каждому предмету одинаковые, и библиотекарь записывает лишь название (без номера), то список – размещение с повторением, число элементов исходного множества равно 10, а количество позиций – 5. Тогда количество разных списков равно

$$= 100000.$$

Ответ: 100000

$$\bar{A}_{10}^5 = 10^5$$

Сочетания



Сочетания – соединения, содержащие по t предметов из n , различающихся друг от друга по крайней мере одним предметом

Сочетания – конечные множества, в которых порядок не имеет значения.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример

Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из класса, в котором 25 учеников?

Решение:

$m = 2$ (необходимое количество дежурных)

$n = 25$ (всего учеников в классе)

$$C_{25}^2 = \frac{25!}{2! (25 - 2)!} = \frac{24 \cdot 25}{2} = 300$$

Сочетания с повторениями



Определение

Сочетаниями с повторениями из m по n называют соединения, состоящие из n элементов, выбранных из элементов m разных видов, и отличающиеся одно от другого хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из m по n обозначают

$$C_m^n$$

Сочетания с повторениями

Если из множества,  содержащего n элементов, выбирается поочередно m элементов, причём выбранный элемент каждый раз возвращается обратно, то количество способов произвести неупорядоченную выборку – число **сочетаний с повторениями** – составляет

$$C_m^n = P_{m-1, n} = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!n!}$$

Пример

Задача №1

Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в распоряжении имеются 4 сорта пирожных?

Решение:

$$C_4^7 = \frac{(4+7-1)!}{(4-1)!4!} = 120$$

Закрепление знаний



Сколькоими способами можно установить дежурство по одному человеку в день среди **семи** учащихся группы в течение 7 дней (каждый должен отдежурить один раз)?



Решение

По формуле перестановки находим:

$$P(7) = 7! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 6 \times 7 = 5040$$

Ответ: 5040 способа.



Телефонный номер состоит из 7 цифр.
Какое наибольшее число звонков
неудачник-Петя может совершить
прежде, чем угадает правильный
номер.

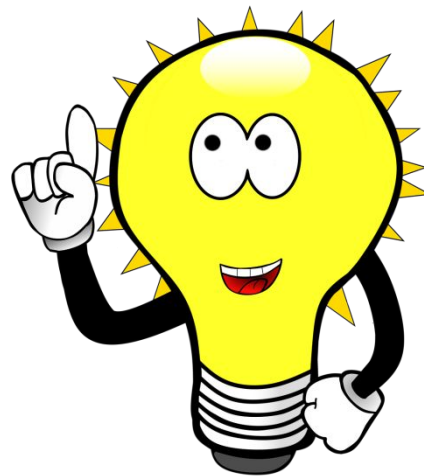


Решение

Т.к. цифры могут повторяться, то всего возможно разных номеров $\bar{A}_{10}^7 = 10^7$

Если Петя невезучий, он должен будет звонить 10 миллионов раз.

Ответ: 100000000



Сколько способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 9 членов научного общества?



Решение

$$C_9^3 = \frac{9!}{3! (9-3)!} = \frac{9!}{3! * 6!} = \frac{6! * 7 * 8 * 9}{3! * 6!} = 84$$



Домашнее задание



Выучить конспект и формулы

***Спасибо за
внимание***