Расчет неразветвленной электрической цепи синусоидального тока

Для расчета режима неразветвленной электрической цепи применяют комплексный метод. Представим все синусоидальные величины их комплексами:

$$\dot{E} = E \cdot e^{\psi_e}; \qquad \dot{I} = I \cdot e^{\psi_i}; \qquad \dot{U}_R = U_R \cdot e^{\psi_{uR}};$$

$$\dot{U}_L = U_L \cdot e^{\psi_{uL}}; \qquad \dot{U}_C = U_C \cdot e^{\psi_{uC}}.$$

Порядок расчета такой же, как на постоянном токе. Во-первых, стрелками изображаем положительные направления тока, ЭДС и напряжений. Во-вторых, выбираем направление обхода контура по направлению движения часовой стрелки и записываем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C = j\omega L\dot{I} + R\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \dot{E}. \qquad (1)$$

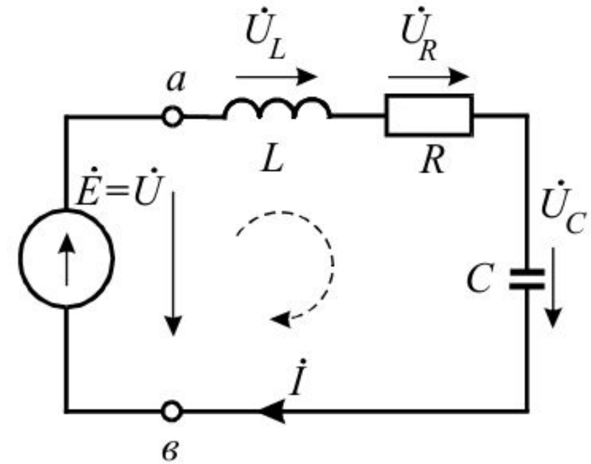
Выражения $R\dot{I}$, $j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I}$, $-j\frac{1}{\omega C}\dot{I} = -jX_C\dot{I}$ отражают особенности проявления закона Ома для резистивного, индуктивного и емкостного элементов электрической цепи:

$$\dot{U}_R = R\dot{I}; \quad \dot{U}_L = jX_L\dot{I}; \quad \dot{U}_C = -jX_C\dot{I}.$$

Здесь умножение на $+j$ означает, что напряжение $\dot{U}_L$ *опережает* по фазе ток $\dot{I}$ на 90^0, умножение на $-j$ означает, что напряжение $\dot{U}_C$ *отстает* по фазе от тока $\dot{I}$ на 90^0.

Из (1) находим комплексный ток в цепи:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}.$$



или (так как $\dot{E} = \dot{U}$)

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}.$$

где $\dot{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} = \dot{E} = E \cdot e^{j\varphi_e}$ – напряжение между выводами *ав* неразветвленной цепи

Величина, стоящая в знаменателе,

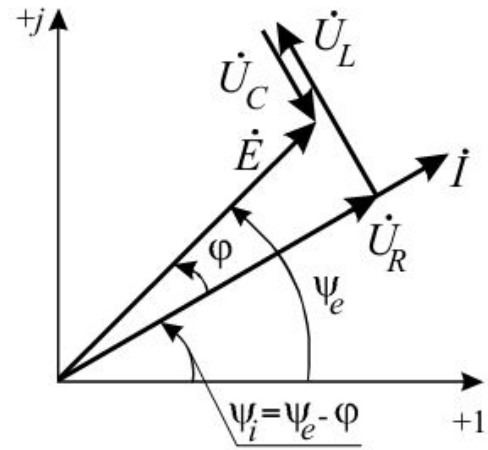
$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\left(X_L - X_C\right),$$

называется *комплексным сопротивлением* (неразветвленной цепи).

Величина, обратная комплексному сопротивлению, называется *комплексной проводимостью*:

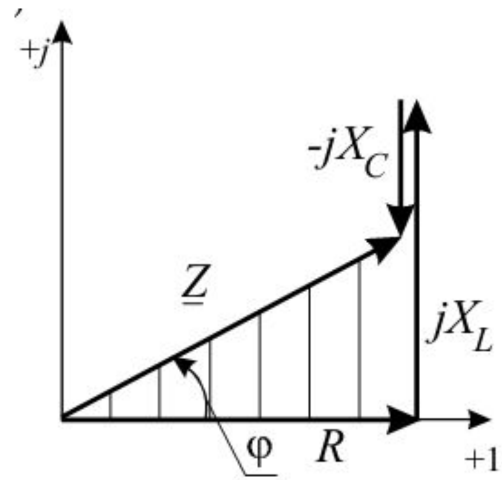
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}.$$

На рисунке построена векторная диаграмма тока и напряжений неразветвленной цепи для случая: $X_L > X_C$.



Обычно векторная диаграмма строится в конце расчета по полученным значениям тока и напряжений. При этом проверяется правильность расчета.

Поделив все составляющие векторной диаграммы на $\dot{I}$, получаем значения комплексных сопротивлений R, jX_L, $-jX_C$, $\underline{Z}$ и изображаем комплексные сопротивления на комплексной плоскости получаем диаграмму, подобную диаграмме тока и напряжений.



“Треугольник сопротивлений” (заштрихованная площадь), стороны которого соответствуют сопротивлениям $X = X_L - X_C$ R и $\underline{Z}$.

Анализ диаграммы сопротивлений позволяет перейти от алгебраической формы записи комплексного сопротивления к тригонометрической и показательной формам:

$$\underline{Z} = z \cdot cos\varphi + jz \cdot sin\varphi;$$

$$\underline{Z} = z \cdot e^{j\varphi},$$

где $z = \left|\underline{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$ – модуль комплексного сопротивления или полное сопротивление;

$\varphi = arctg\dfrac{X_L - X_C}{R}$ – аргумент комплексного сопротивления.

В зависимости от знака величины $\left(X_L - X_C\right)$ аргумент комплексного сопротивления может быть либо положительным (индуктивный характер), либо отрицательным (емкостный характер).

Подставив комплексное сопротивление в формулу комплексного тока, получим закон Ома для неразветвленной цепи:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \left(\frac{E}{z}\right) \cdot e^{j(\psi_e - \varphi)}, \text{ или } \dot{I} = I \cdot e^{j\psi_i} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \left(\frac{U}{z}\right) \cdot e^{j(\psi_u - \varphi)}, \ I = \frac{U}{z};$$

$$\psi_i = \psi_u - \varphi.$$

При нескольких последовательно соединенных элементах комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \sum R + j\left(\sum X_L - \sum X_C\right) = R + jX,$$

где $R = \sum R$ – активное сопротивление цепи;

$X = \sum X_L - \sum X_C$ – реактивное сопротивление цепи.

В активном сопротивлении происходит *необратимое* преобразование электрической энергии в другие виды энергии, а в реактивном сопротивлении – не происходит.

Полное сопротивление и аргумент комплексного сопротивления можно рассчитывать по формулам:

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2};$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{X}{R}\right).$$

Анализ разветвленных электрических цепей

Полная комплексная проводимость электрической цепи определяется согласно закону Ома

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G - j(B_L - B_C) = Y\mathrm{e}^{-j\varphi},\ \text{Ом},$$

где G – активная проводимость цепи, См;

B_L – индуктивная составляющая проводимости, См;

B_C – емкостная составляющая проводимости, См,

причем модуль полной комплексной проводимости

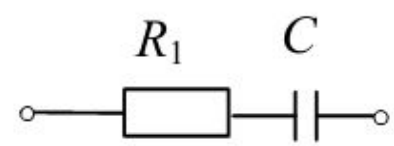
$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2},\ \text{См},$$

а фаза $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{B_L - B_C}{G}$, град.

Величины G, B_L, B_C могут быть вычислены также исходя из заданных параметров электрической цепи. И в общем виде можно сказать, что величина проводимости какой-то ветви прямо пропорциональна соответствующему сопротивлению ветви и обратно пропорциональна квадрату модуля полного комплексного сопротивления этой же ветви.

Так для ветви, содержащей активное сопротивление и емкость величины проводимостей

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_C^2}, \quad B_C = \frac{X_C}{R_1^2 + X_C^2};$$



$$\underline{Y}_1 = G_1 - (-jB_C) = Y_1 \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi_1}; \qquad Y_1 = \sqrt{G_1^2 + B_C^2},$$

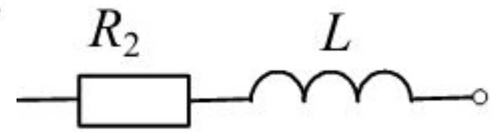
$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{-B_C}{G_1}.$$

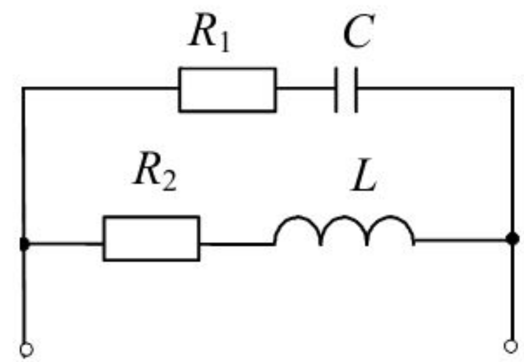
Для ветви, содержащей последовательно соединенные активное сопротивление и индуктивность, проводимости запишутся в виде

$$G_2 = \frac{R_2}{Z_2^{\,2}} = \frac{R_2}{R_2^{\,2} + X_L^{\,2}}, \quad \underline{Y}_2 = G_2 - jB_L = Y_2 \cdot \mathrm{e}^{-j\varphi_2},$$

$$Y_2 = \sqrt{G_2^{\,2} + B_L^{\,2}},$$

$$B_L = \frac{X_L}{Z_2^{\,2}} = \frac{X_L}{R_2^{\,2} + X_L^{\,2}}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{B_L}{G_2}\right).$$





Если эти ветви включены параллельно друг другу, то полная комплексная проводимость такой цепи запишется как

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = (G_1 + G_2) - j(B_L - B_C) = G - j(B_L - B_C) =$$

$$= \left(\frac{R_1}{R_1^{\,2} + X_C^{\,2}} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + X_L^{\,2}}\right) - j\left(\frac{X_L}{R_2^{\,2} + X_L^{\,2}} - \frac{X_C}{R_1^{\,2} + X_C^{\,2}}\right).$$

Мощность в цепях переменного тока определяется независимо от способа соединения элементов.

Алгоритм решения задач (*классический вариант*):

1) определяется угловая частота сети;

2) вычисляются величины реактивных сопротивлений элементов электрической цепи и определяются**:**

- комплексные сопротивления ветвей,
- комплексные проводимости ветвей,
- полная комплексная проводимость цепи,

3) ток на входе электрической цепи,

4) токи в ветвях цепи,

5) комплексное значение полной мощности;

6) по полученным данным строится векторная диаграмма напряжения и токов.

Мощность в линейных цепях синусоидального тока

В линейных цепях синусоидального тока имеют место три вида мощности:

- активная;
- реактивная;
- полная.

Активная мощность – это мощность необратимого *преобразования* электрической энергии в другие виды энергии в резистивных элементах цепи. В источниках электрической энергии активная мощность P рассчитывается по формулам:

$$P = U \cdot I \cdot cos\varphi ,$$

$$P = Re\left(\dot{U} \cdot \bar{I}\right),$$

где U – действующее значение напряжения в ИЭЭ, В;
I – действующее значение тока в ИЭЭ, А;
$\dot{U}$ – комплекс действующего значения напряжения, В;
$\bar{I}$ – комплексно-сопряженное значение тока, А;
φ – угол сдвига фаз между током и напряжением.

В резистивных элементах активная мощность определяется по формуле:

$$P = I^2 \cdot R$$

где R – сопротивление резистивного элемента, Ом;

I – сила тока через него, А.

В реактивных элементах *реактивная мощность* Q определяется по формулам:

$$Q = I^2 \cdot X$$

$$Q = U \cdot I \cdot sin\varphi$$

$$Q = Jm\left(\dot{U} \cdot \bar{I}\right)$$

Полная мощность определяется по формуле:

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \bar{I} = P + jQ,$$

где $\bar{I}$ – комплексно-сопряженное значение тока, протекающего через соответствующий элемент, А;

$\dot{U}$ – комплекс напряжения на этом элементе, В;

Резонансные явления в цепях синусоидального тока

Последовательное соединение приемников

Резонансом напряжений называется явление, возникающее в цепи, содержащей последовательно соединенные реактивные элементы (индуктивные и емкостные), при совпадении тока и напряжения по фазе (ϕ= 0), он имеет место при отсутствии реактивного сопротивления (X=0). При этом величины напряжений (по модулю) на идеальных реактивных элементах (емкости и индуктивности) равны друг другу, а, стало быть, напряжение на активном сопротивлении равно напряжению питания. Ток в цепи определяется только величиной активного сопротивления. При этом напряжения на реактивных элементах могут в несколько раз превышать напряжение питания. Если это не расчетный режим цепи, то превышение напряжения на реактивных элементах может привести к электрическому пробою и тепловому, необратимому, повреждению элементов. Параметр, показывающий превышение напряжениями на реактивных элементах напряжения питания, называется добротностью резонансного контура:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}.$$

Параллельное соединение приемников

При параллельном соединении реактивных элементов возникает резонанс токов, и аналогично резонансу напряжения токи реактивных элементов могут намного превысить ток в неразветвленной части схемы. Превышение тока также характеризуется добротностью резонансного контура

$$Q = \frac{I_L}{I} = \frac{I_C}{I}.$$

Условие возникновения резонанса токов: B= 0.