

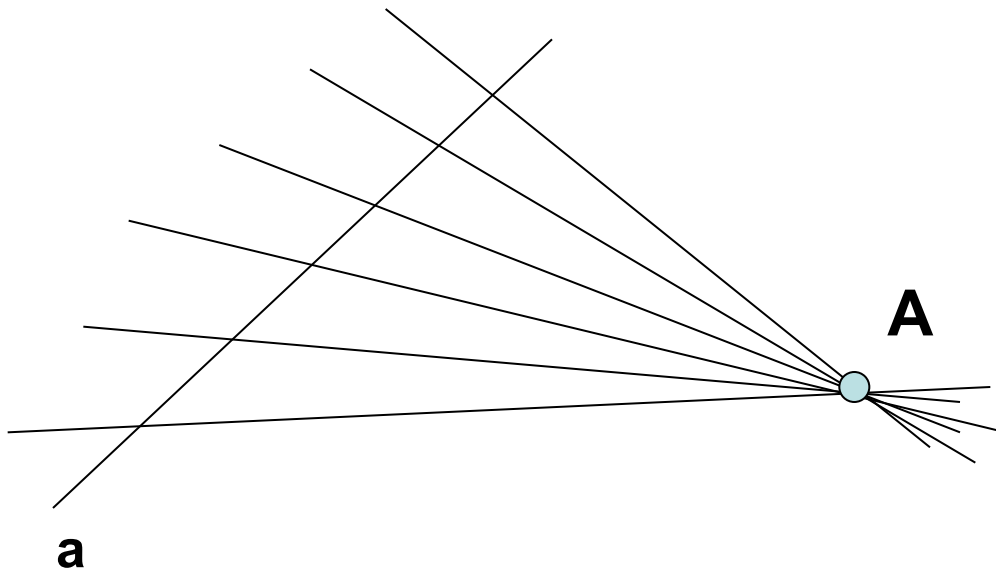
Лекция 3. Ортогональные проекции плоскости

- Способы задания плоскости
- Плоскости общего и частного положений
- Особые линии плоскости

Лектор Стриганова Л.Ю.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ

**ПЛОСКОСТЬ – МНОЖЕСТВО ПОЛОЖЕНИЙ
ПРЯМОЙ ЛИНИИ ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ОДНУ
ТОЧКУ ПРОСТРАНСТВА И ПЕРЕСЕКАЮЩИХ
ВНЕ ЕЕ ПРЯМУЮ ЛИНИЮ**



СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ПЛОСКОСТИ

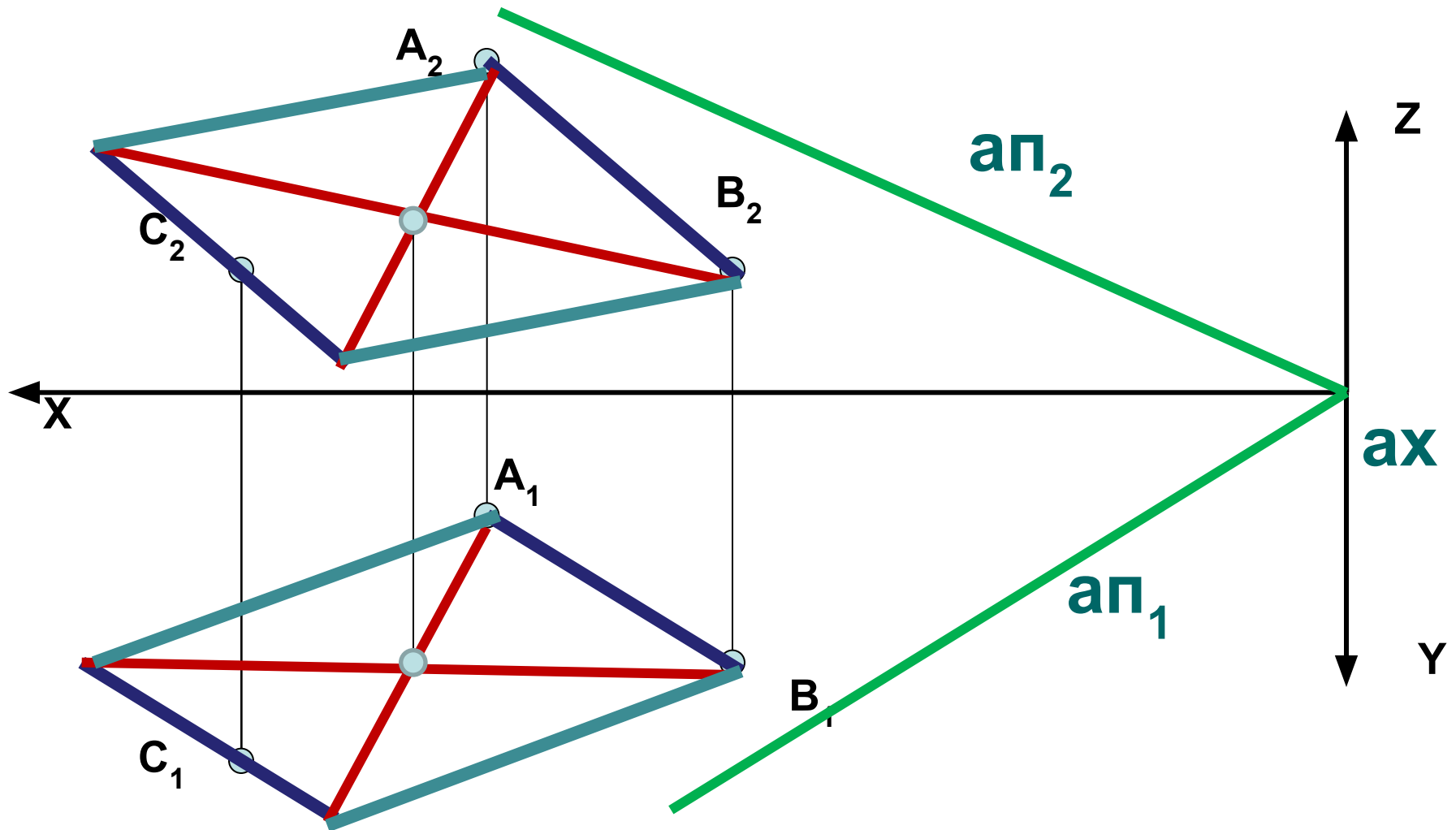
1. Аналитический способ

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

2. Графические способы

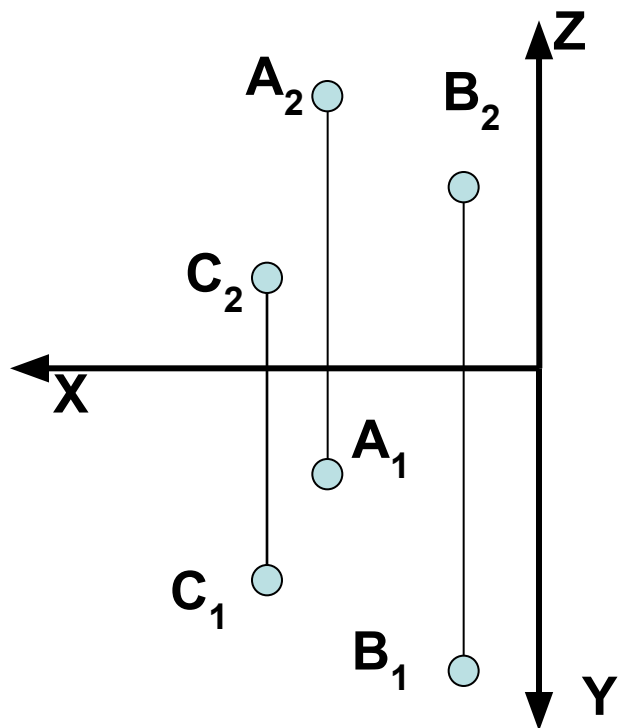
Графические способы задания плоскости

Существуют 6 способов задания плоскости на эюре, каждый из которых последовательно переходит один в другой

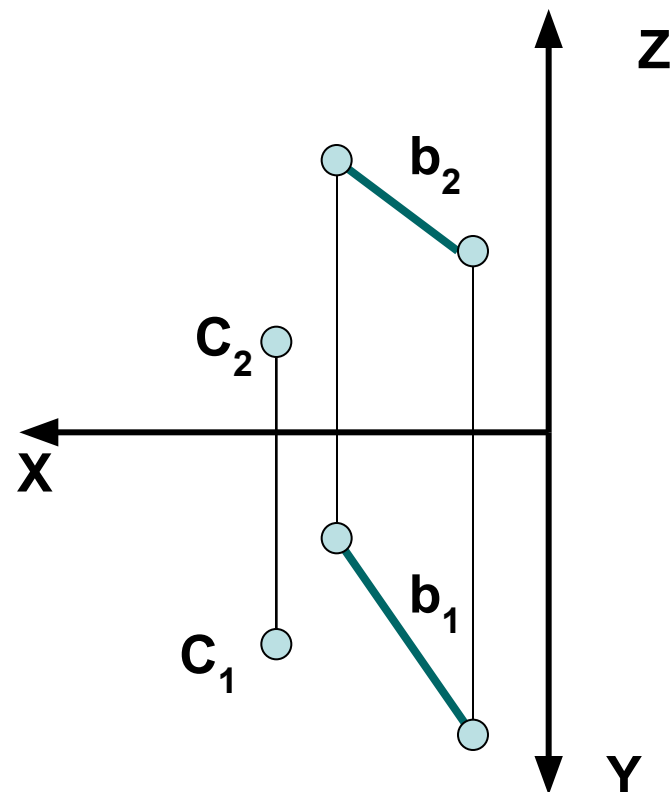


Графические способы задания плоскости

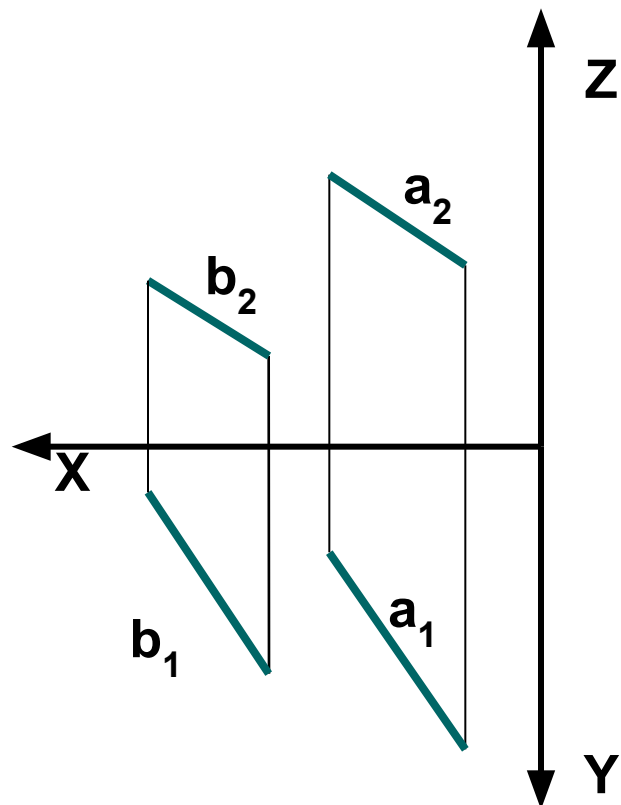
1. Три точки не принадлежащие одной прямой



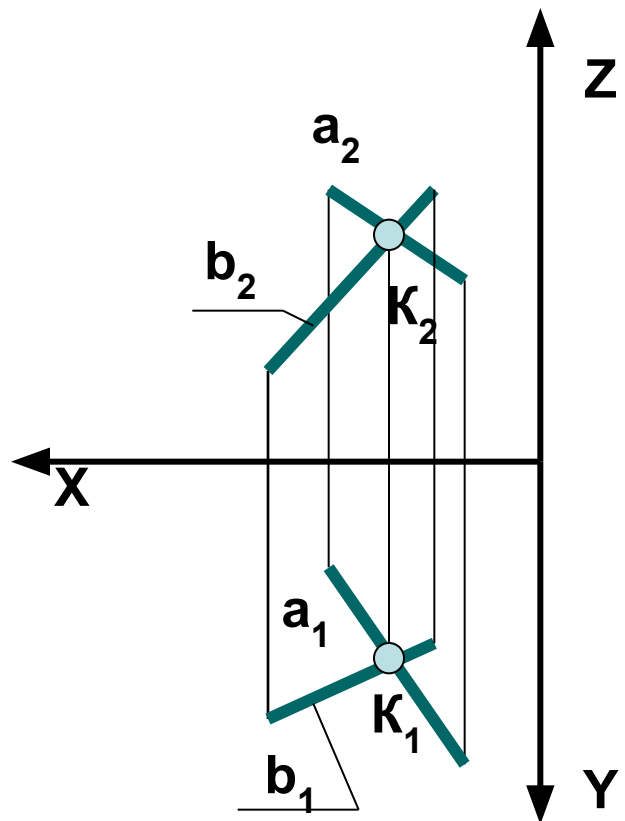
2. Прямая и точка вне этой прямой



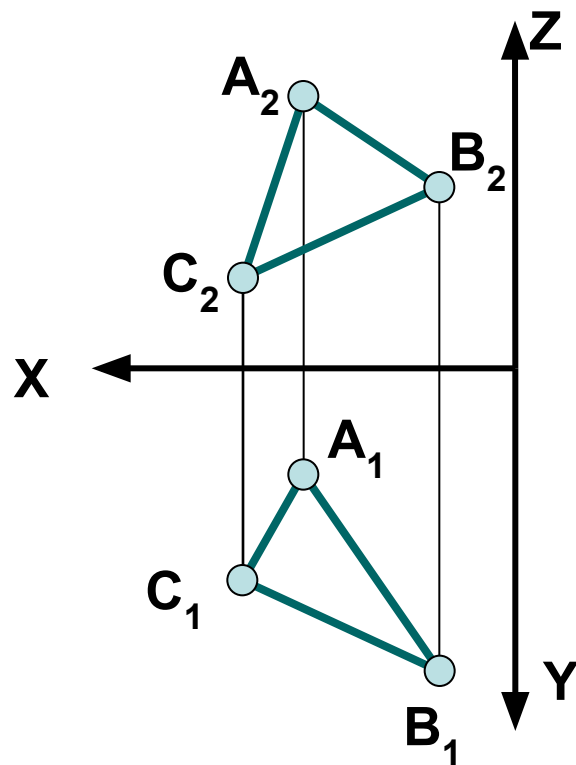
3. Параллельные прямые



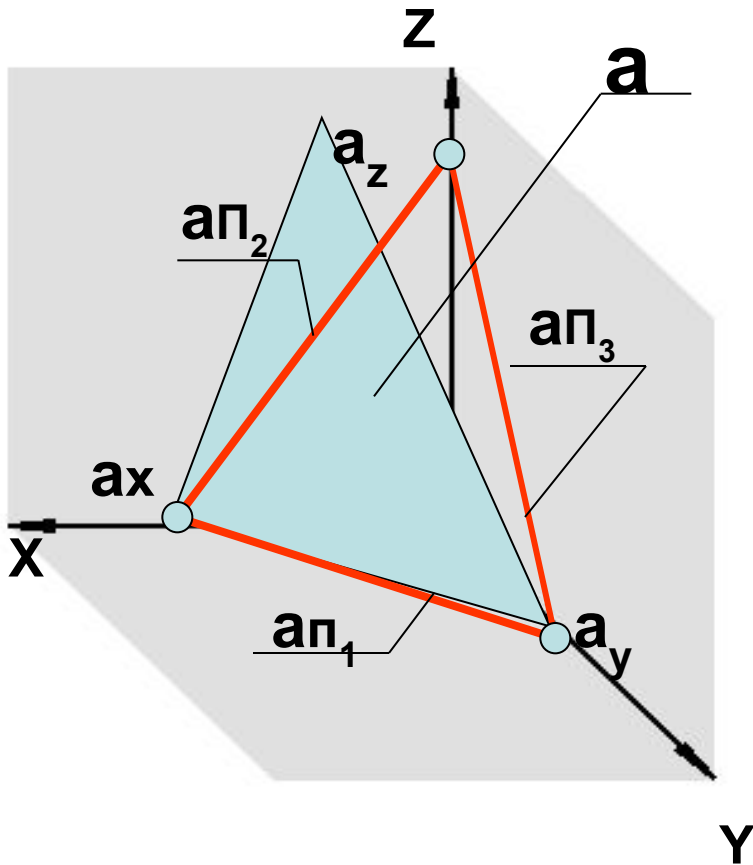
4. Пересекающиеся прямые



5. Плоская фигура



6. Следы плоскости – линии пересечения данной плоскости с плоскостями проекций



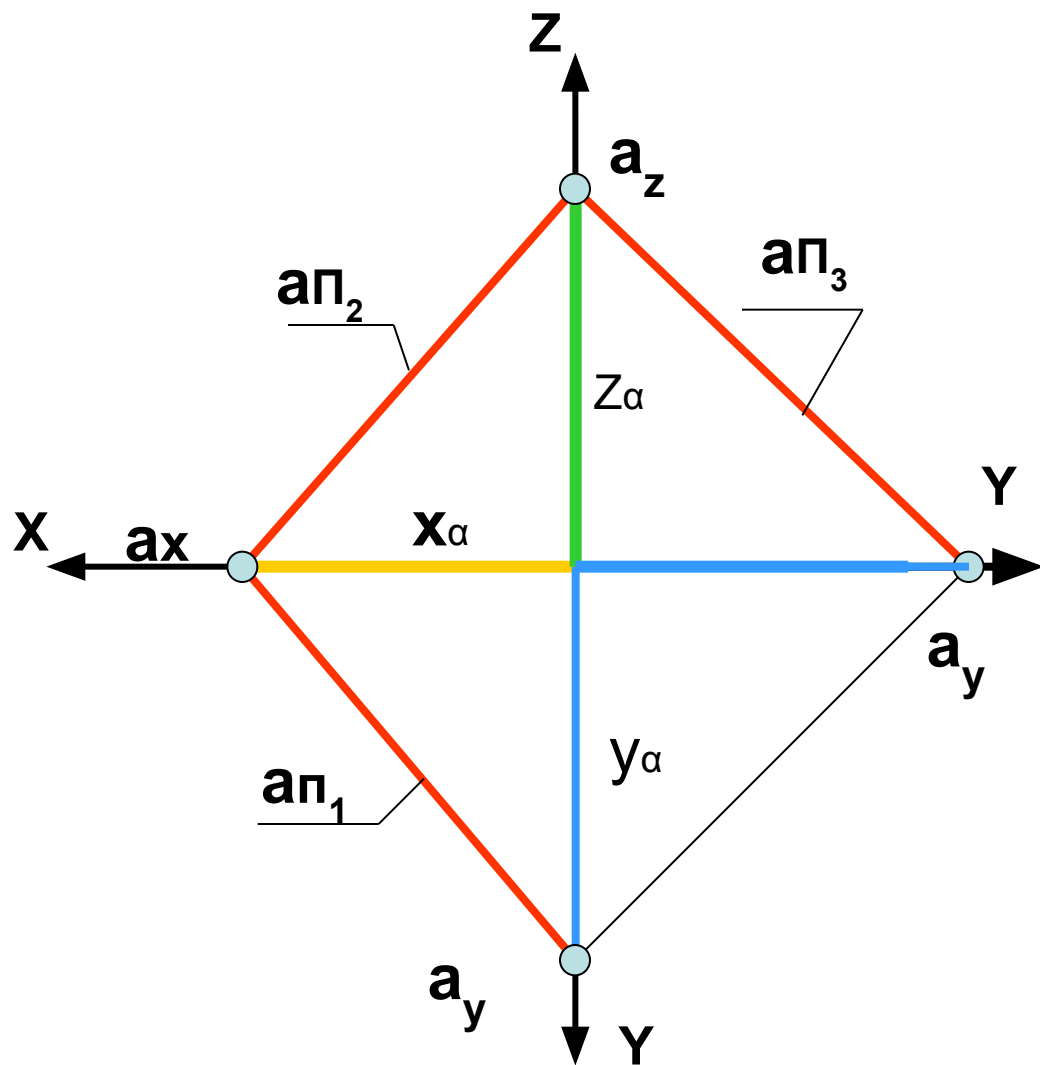
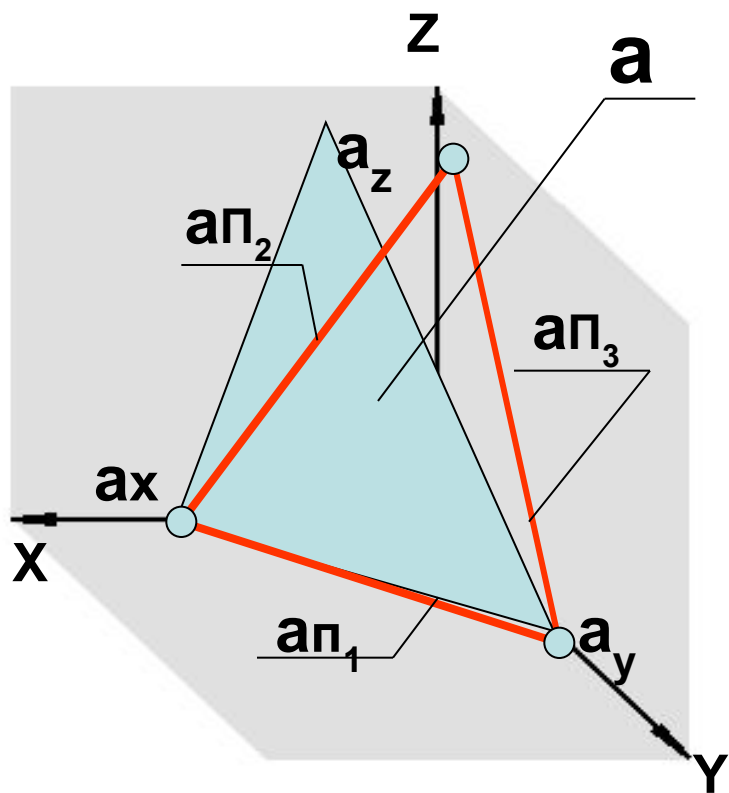
a -плоскость;

ap_1 - горизонтальный след
плоскости a ;

ap_2 - фронтальный след
плоскости a ;

ap_3 - профильный след
плоскости a ;

ax, ay, az - точки схода следов.



ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКЦИЙ

1. Относительно плоскостей проекций плоскости разделяют:

- плоскости частного положения
- плоскости общего положения

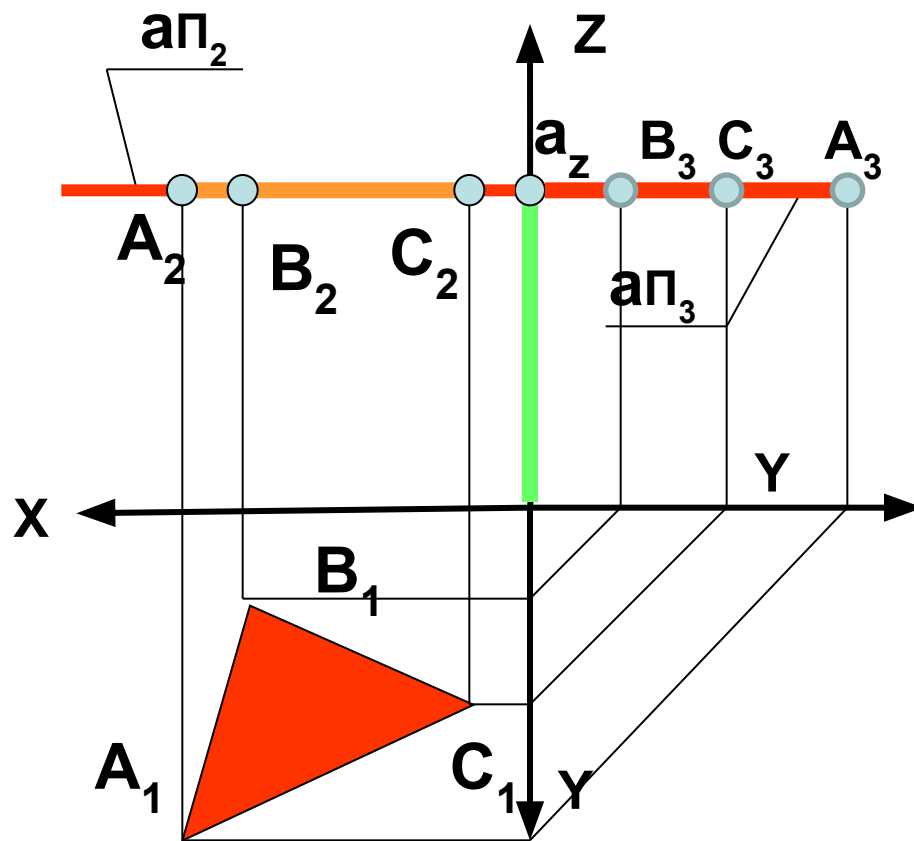
2. Плоскости частного положения разделяют:

- плоскости параллельные плоскостям проекций – **плоскости уровня**
- плоскости перпендикулярные плоскостям проекций – **плоскости проецирующие**

ПЛОСКОСТИ ЧАСТНОГО ПОЛОЖЕНИЯ

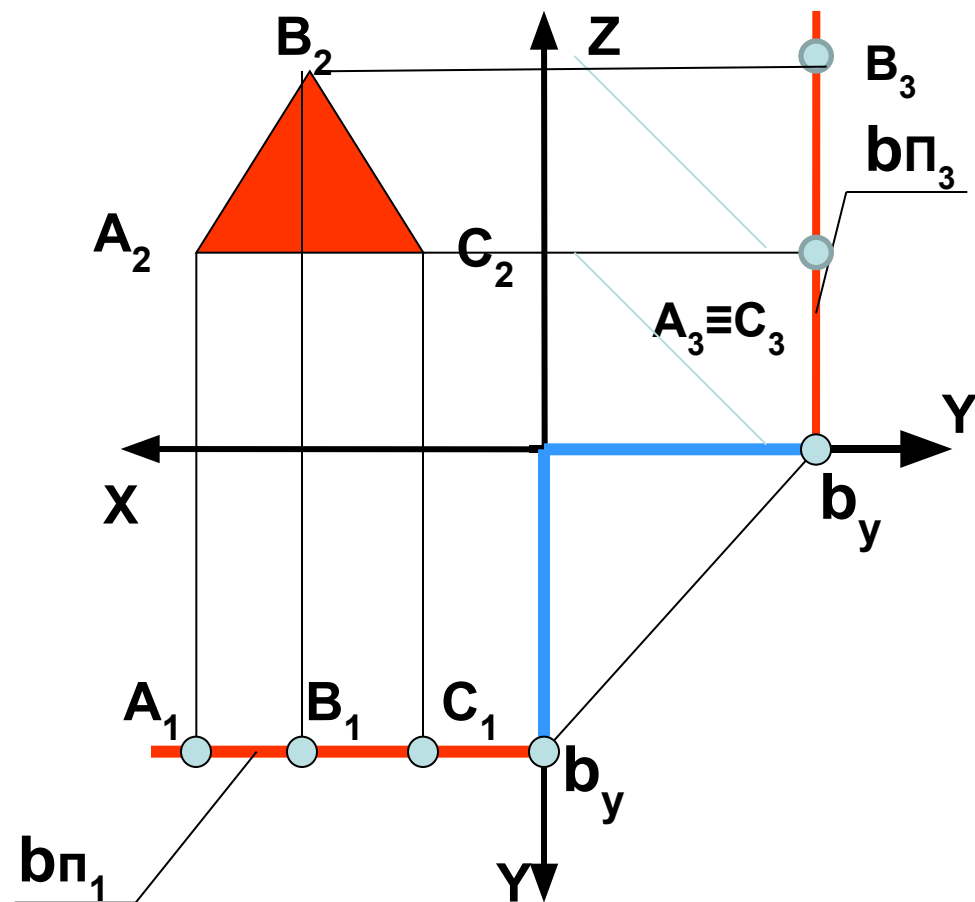
1. Плоскости уровня – это плоскости параллельные плоскостям проекций

Горизонтальная плоскость уровня $\alpha \parallel \Pi_1$



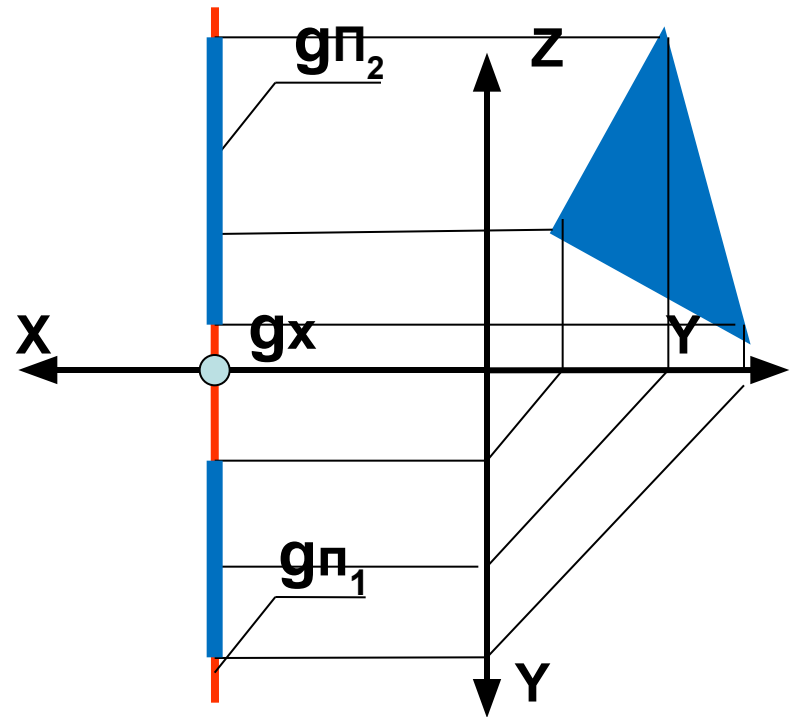
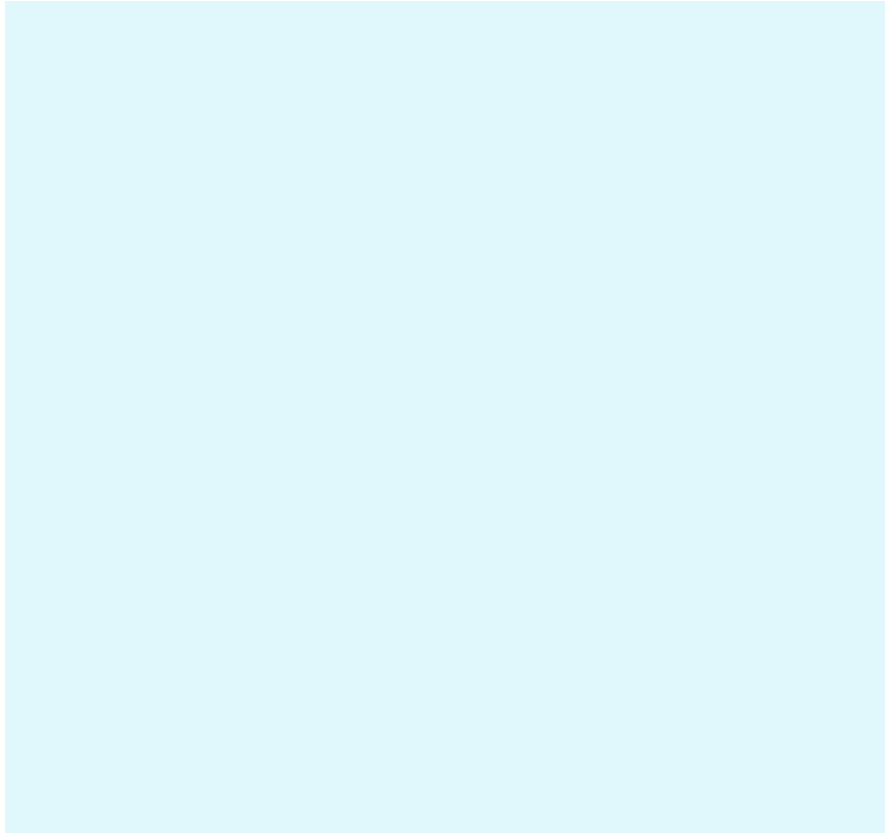
$$\Delta ABC \square \square; |ABCS| = |A_1B_1C_1|$$

Фронтальная плоскость уровня $b \parallel \Pi_2$



$$\Delta ABC \square \square; \quad |ABC| = |A_2B_2C_2|$$

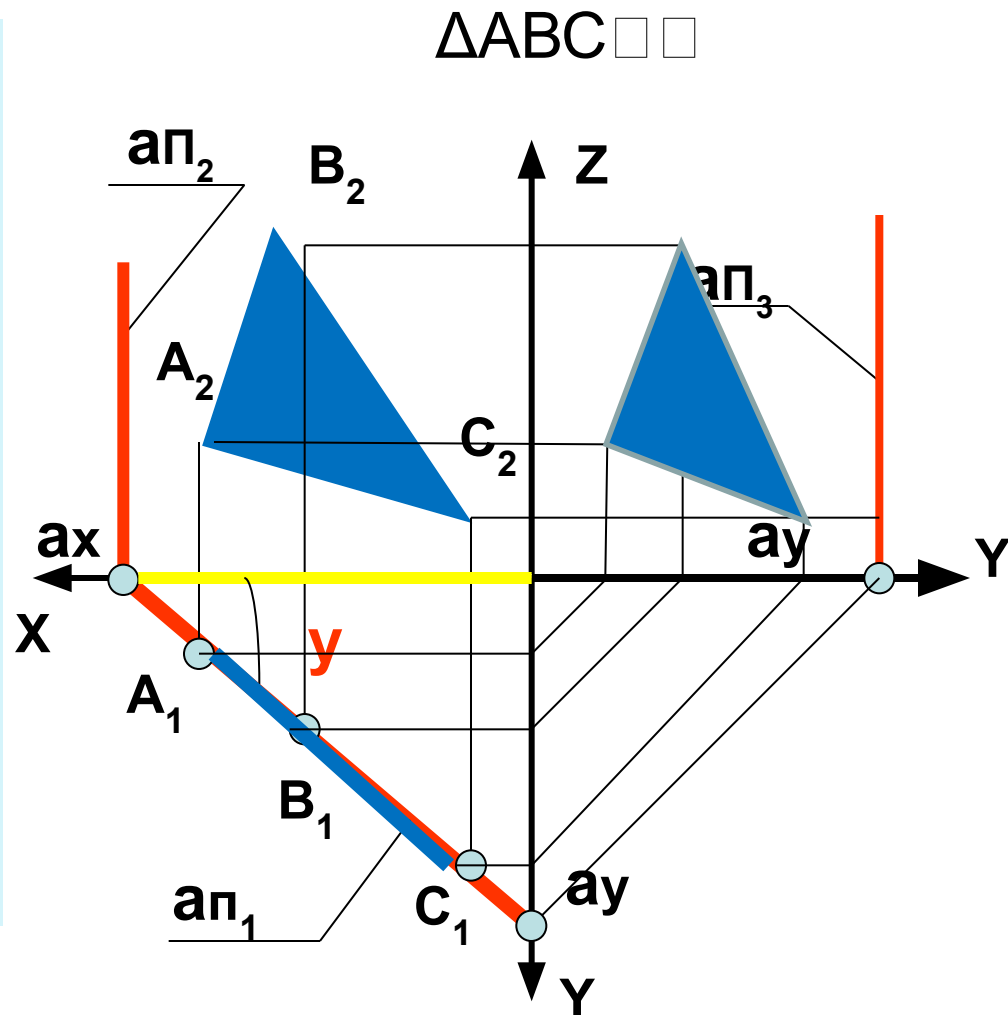
Профильная плоскость уровня $\square \square \square \Pi_3$



Особенности чертежа плоскостей уровня

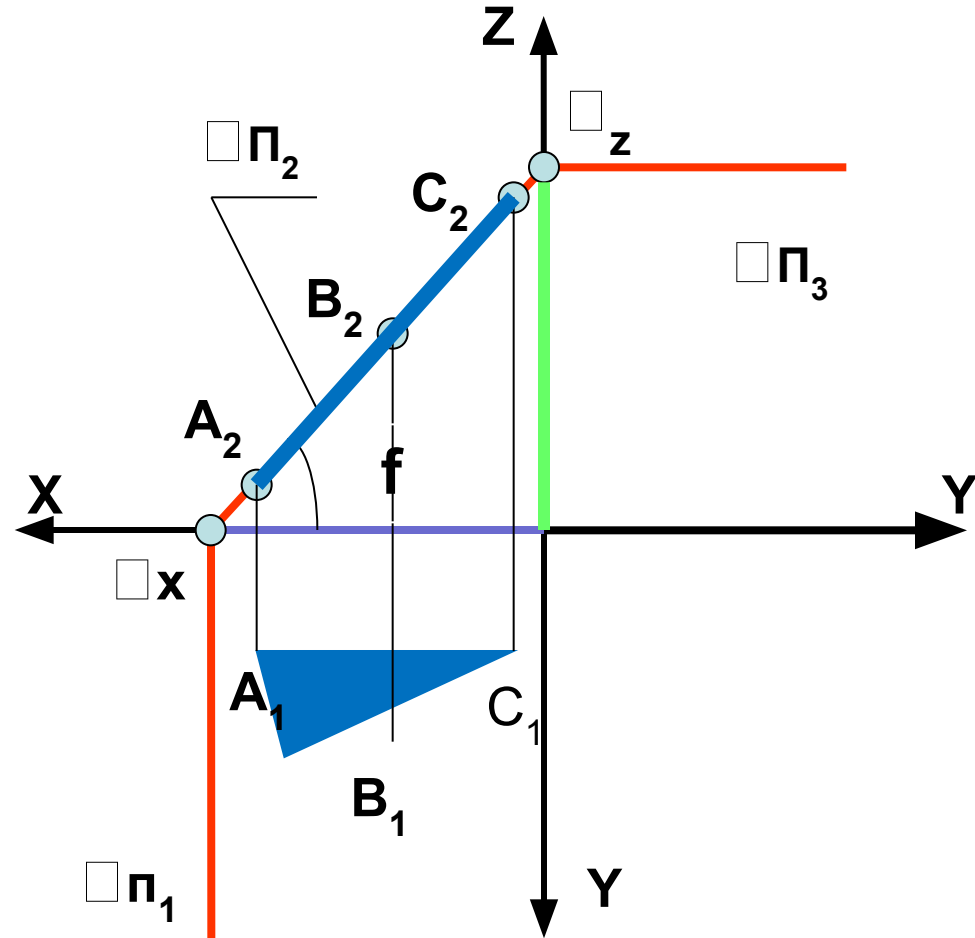
- Фигуры принадлежащие плоскостям уровня проецируются в натуральную величину на параллельную плоскость проекций
- На другие плоскости проекций фигуры принадлежащие плоскостям уровня проецируются в прямую линию

Горизонтально проецирующая плоскость $\square \perp \Pi_1$



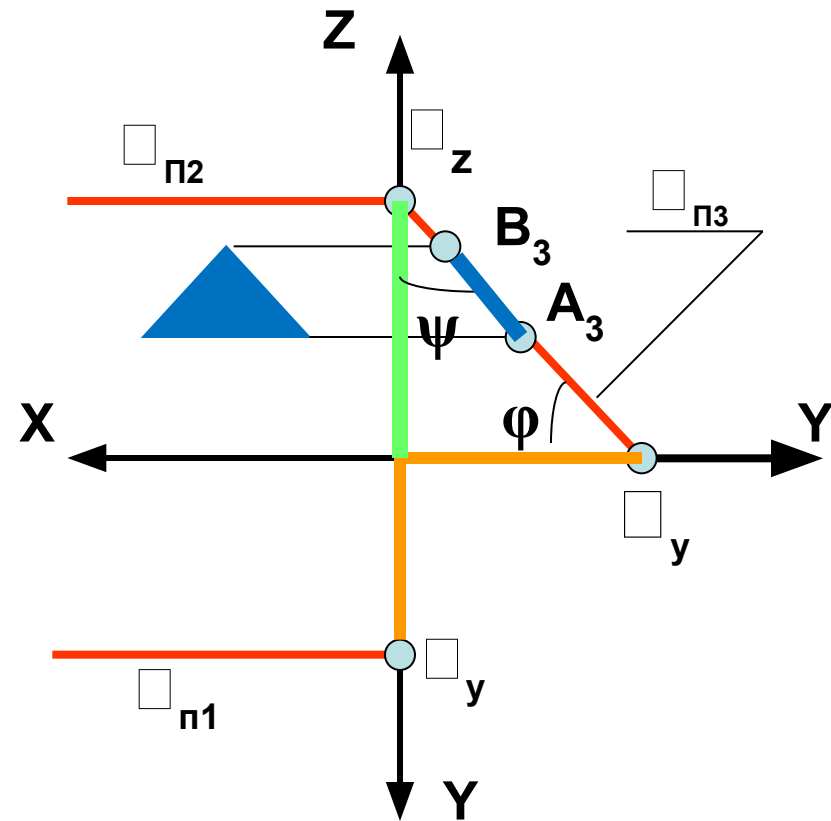
Фронтально проецирующая плоскость $\square \perp \Pi_2$

$\triangle ABC$ $\square$ $\square$



Профильно проецирующая плоскость $\square \perp \Pi_3$

$\triangle ABC$ $\square$ $\square$

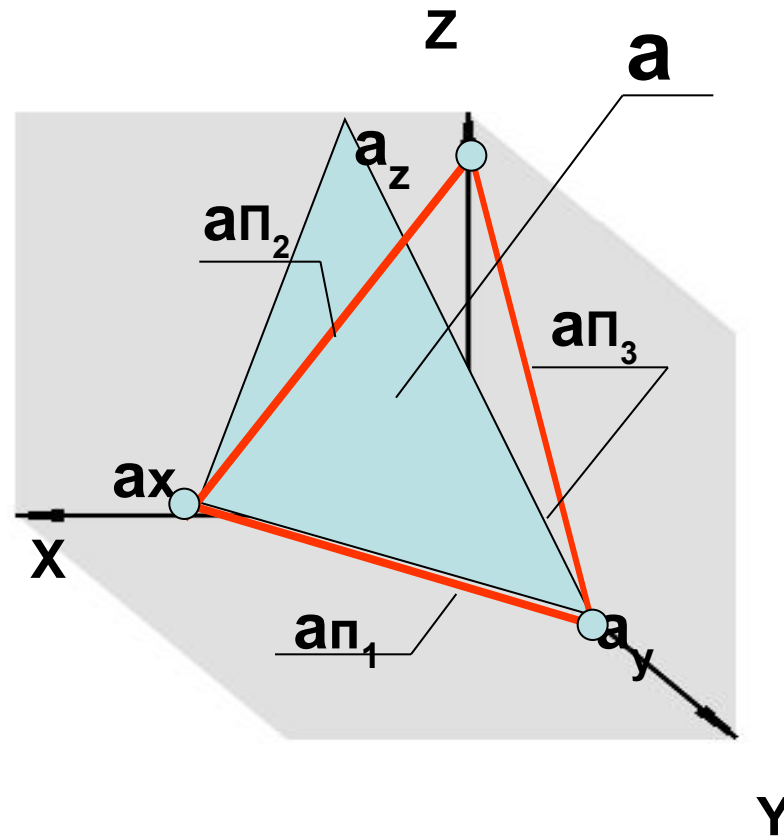


Особенности чертежа проецирующих плоскостей

- Фигуры принадлежащие проецирующим плоскостям на перпендикулярную плоскость проекций проецируются в прямую линию (вырожденная проекция)
- Угол наклона между вырожденной проекцией и осями координат равен углу между заданной плоскостью и плоскостью проекций

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ПЛОСКОСТИ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

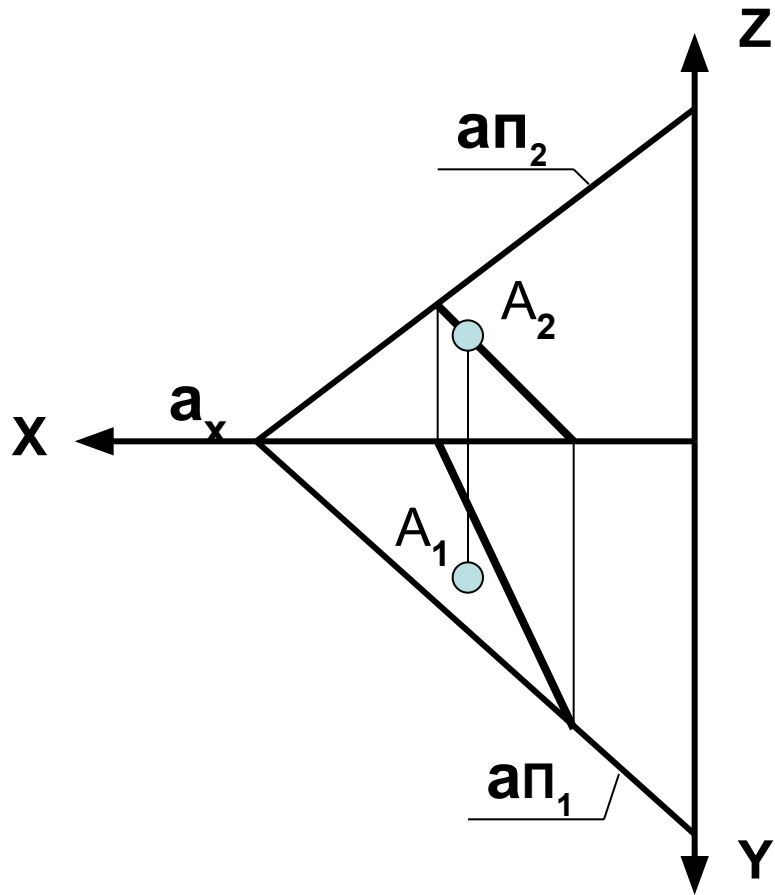
- Плоскость общего положения не параллельна и не перпендикулярна ни одной из плоскостей проекций.



ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧКИ И ПРЯМОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой в этой плоскости
2. Прямая принадлежит плоскости если она проходит:
 - а) через две точки этой плоскости
 - б) через точку плоскости параллельно какой-либо прямой этой плоскости

Принадлежит ли точка А плоскости а?



точка А плоскости а
не принадлежит

ОСОБЫЕ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ

1. **ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ** — линии параллельные плоскостям проекций и принадлежащие данной плоскости;
2. **ЛИНИИ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА (ЛНН) ПЛОСКОСТИ** — определяют угол наклона данной плоскости к одной из плоскостей проекций.

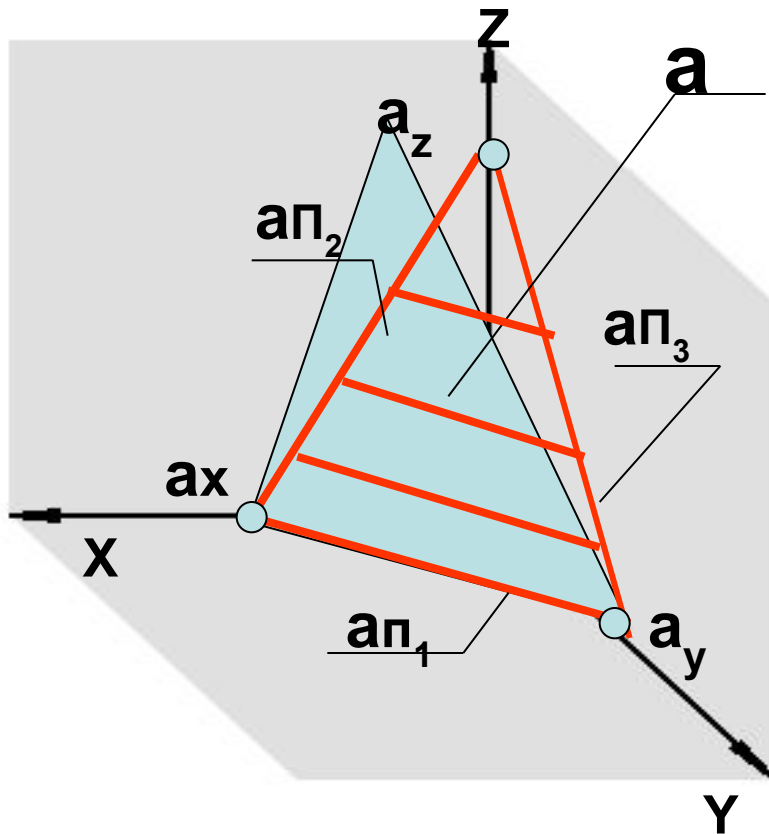
ЛНН перпендикулярны линиям уровня:

горизонтالي на плоскости Π_1 ;

фронтالي на плоскости Π_2 .

ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ

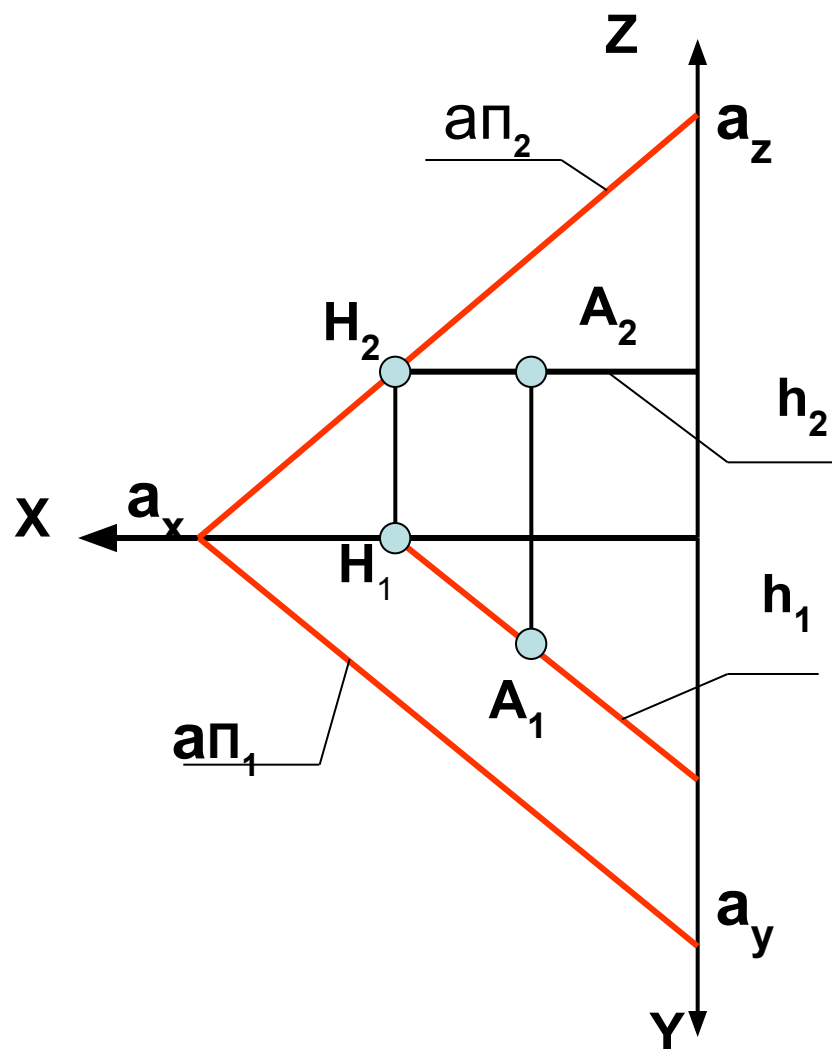
Горизонталь плоскости



Горизонталь h параллельна горизонтальной плоскости проекций и принадлежит плоскости a

1. ЛИНИИ УРОВНЯ ПЛОСКОСТИ

Горизонталь плоскости $\square$

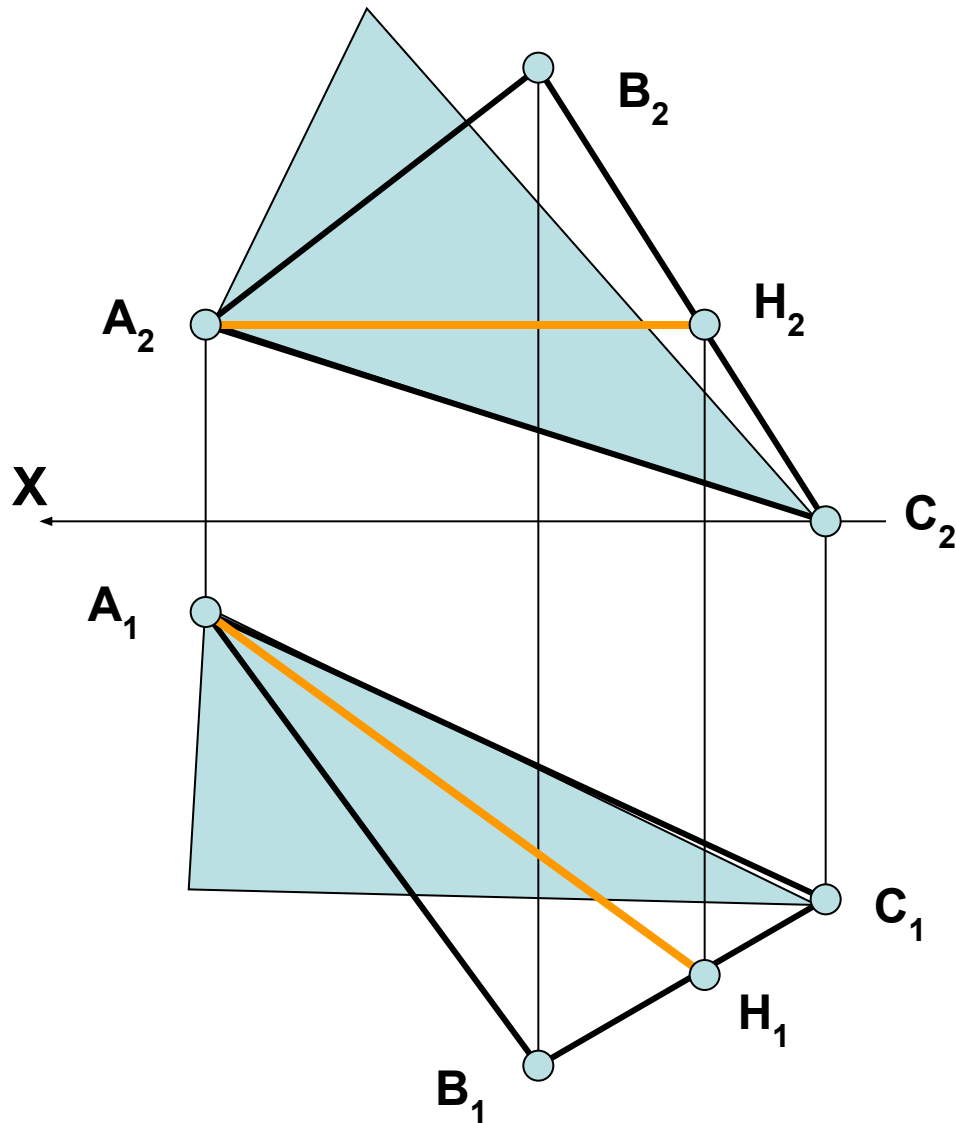


$АН(h)$ горизонталь
плоскости a ;

Следы плоскости –
линии уровня плоскости

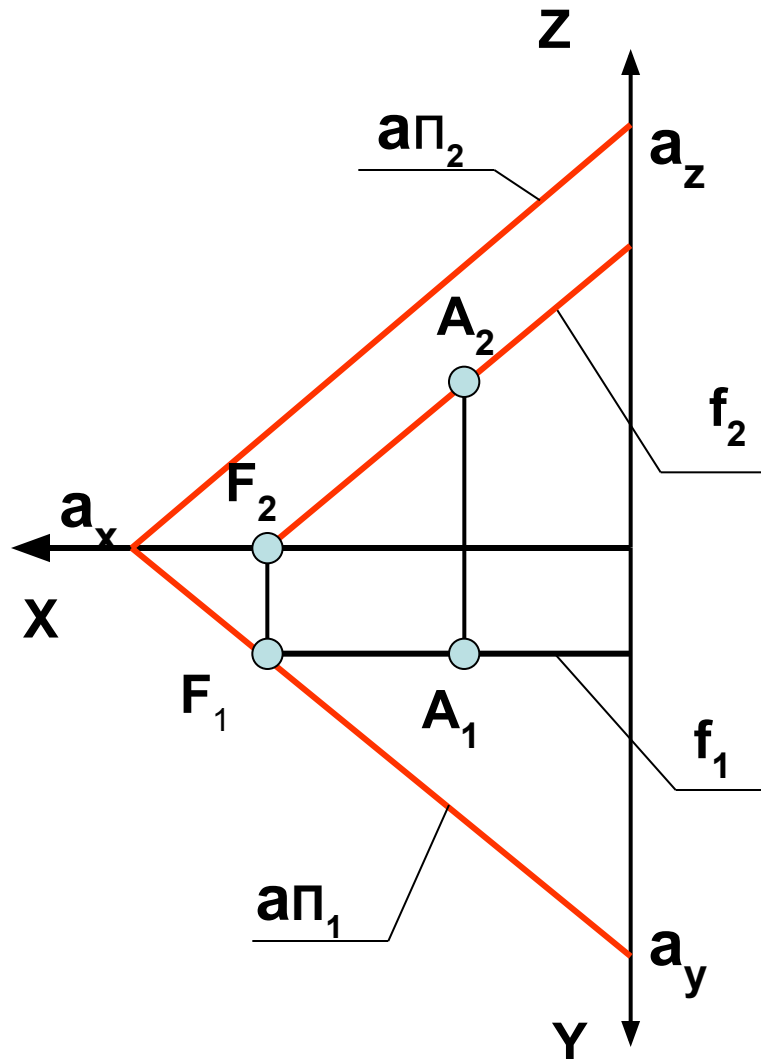
- $\square_{п1}$ – горизонталь плоскости
- $\square_{п2}$ – фронталь плоскости

Горизонталь плоскости треугольника



$AH(h)$ —
горизонталь
 $\triangle ABC$

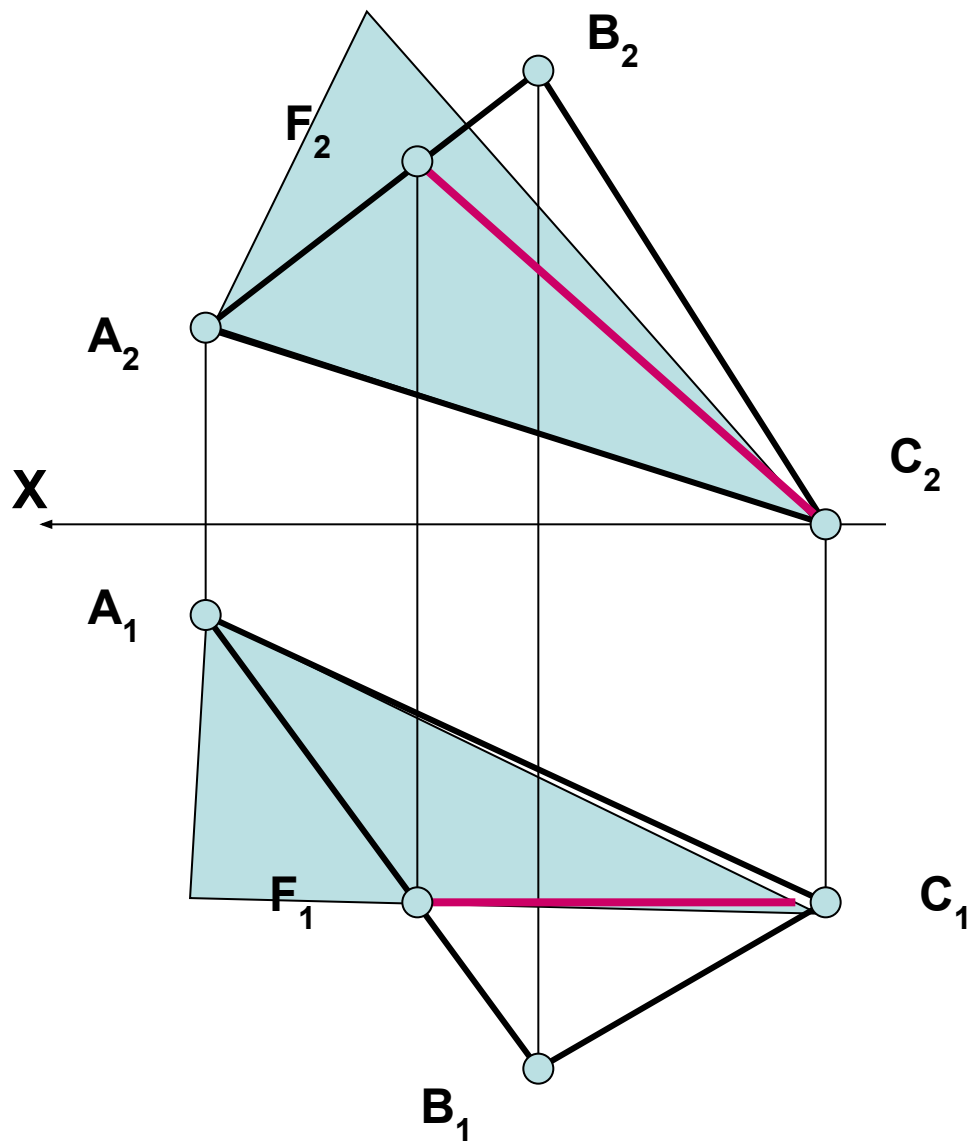
Фронталь плоскости $\square$



AF (f)- фронталь
плоскости **a**

Фронталь плоскости треугольника

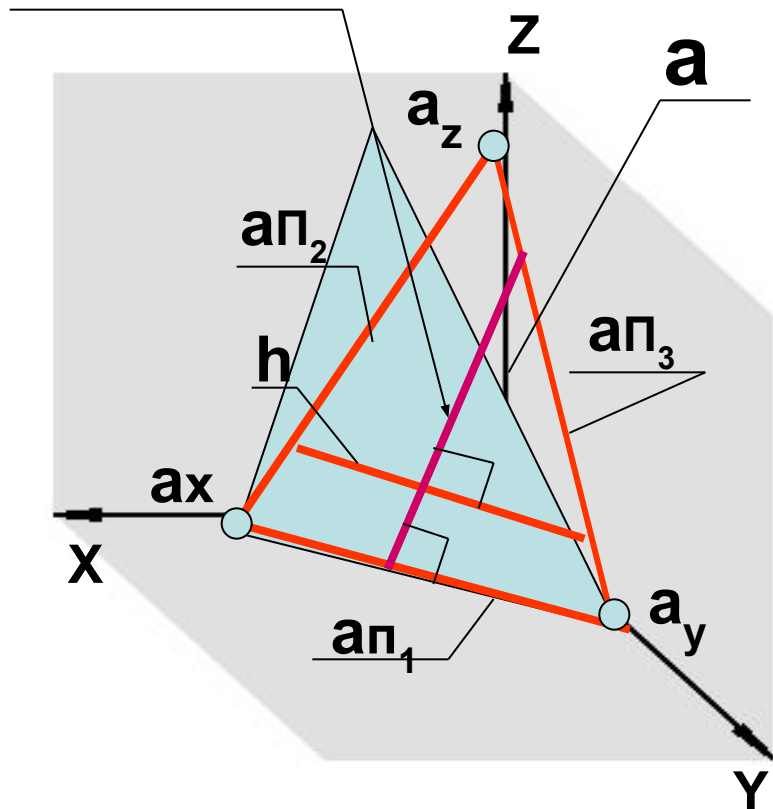
CF (f) фронталь
плоскости $\triangle ABC$



2. ЛИНИИ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА ПЛОСКОСТИ К ПЛОСКОСТЯМ ПРОЕКЦИЙ

Линия ската

Линия ската

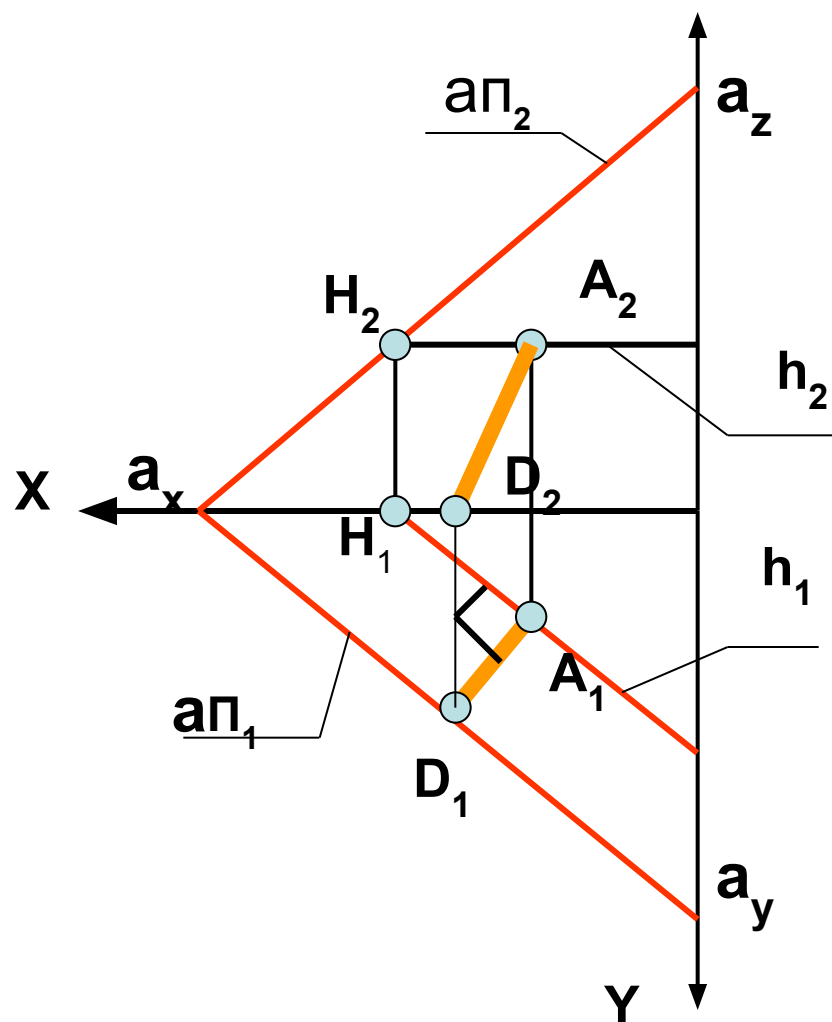


1. Линия наибольшего наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций - **Линия ската** плоскости α .

2. **Линия Ската** $\perp \alpha_{п1}$;

3. **Линия Ската** $\perp h_1$.

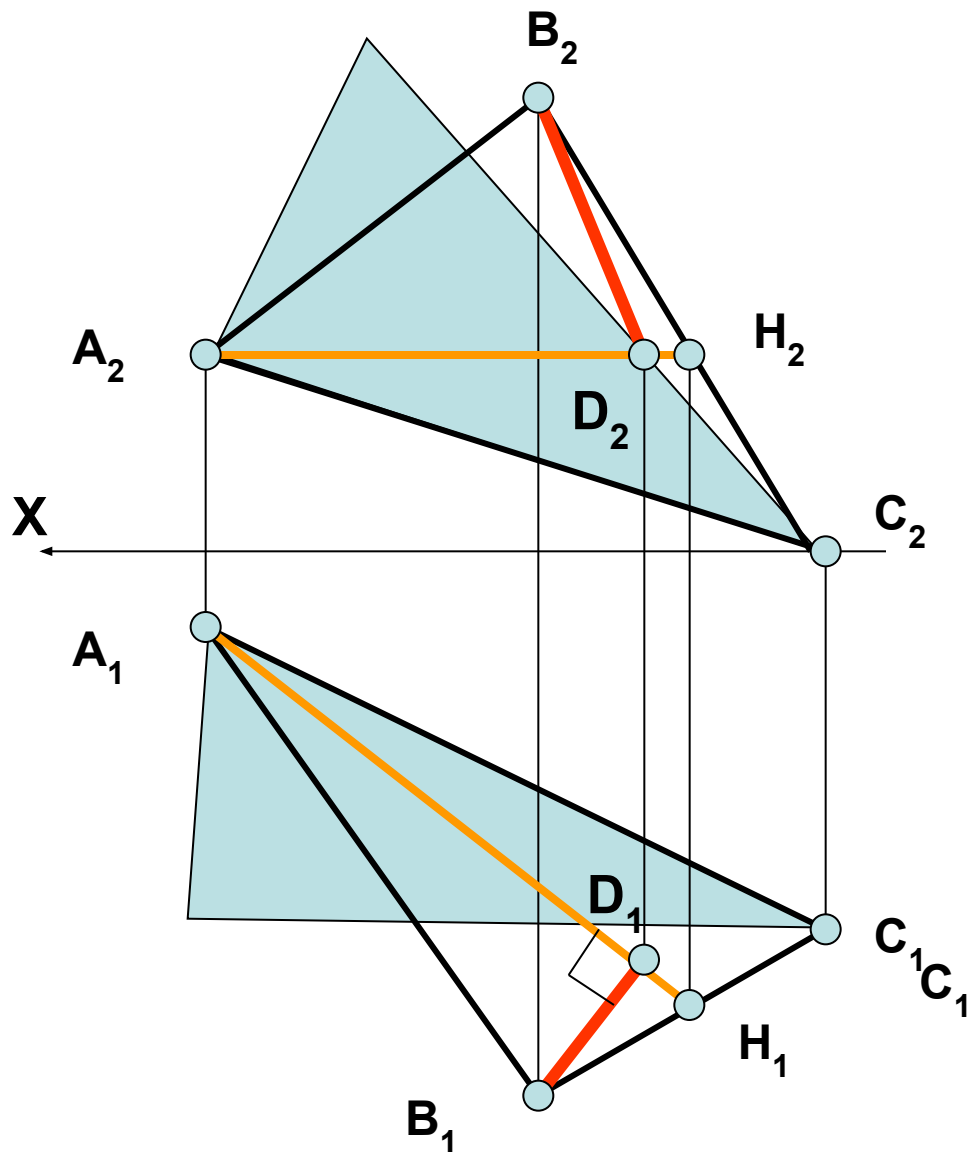
Линия ската



$$1. A_1D_1 \perp A_1H_1 \parallel \Pi_1.$$

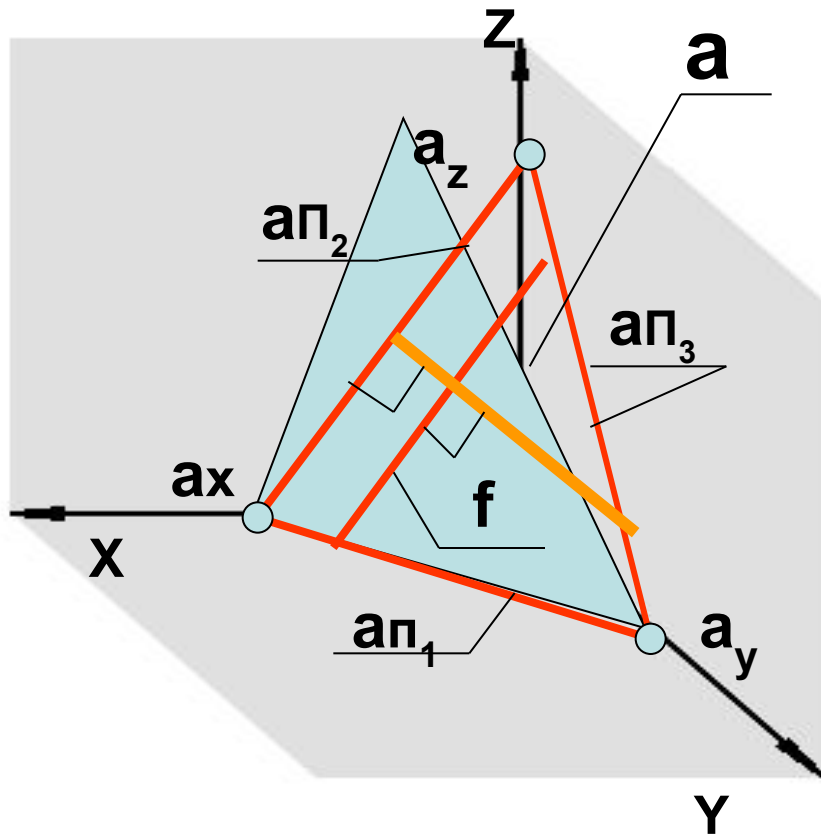
$$2. A_1D_1 \perp \alpha_{\Pi_1}$$

Линия ската треугольника



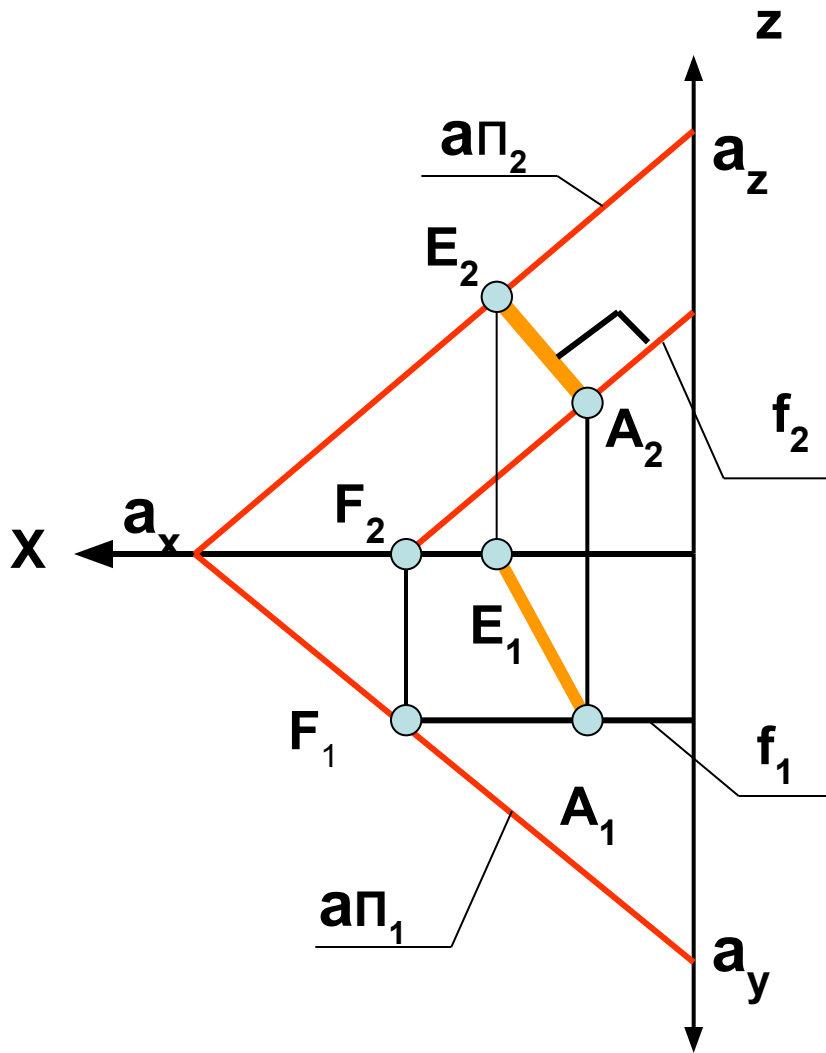
1. $B_1D_1 \perp A_1H_1$
2. BD – линия ската треугольника

ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА ПЛОСКОСТИ



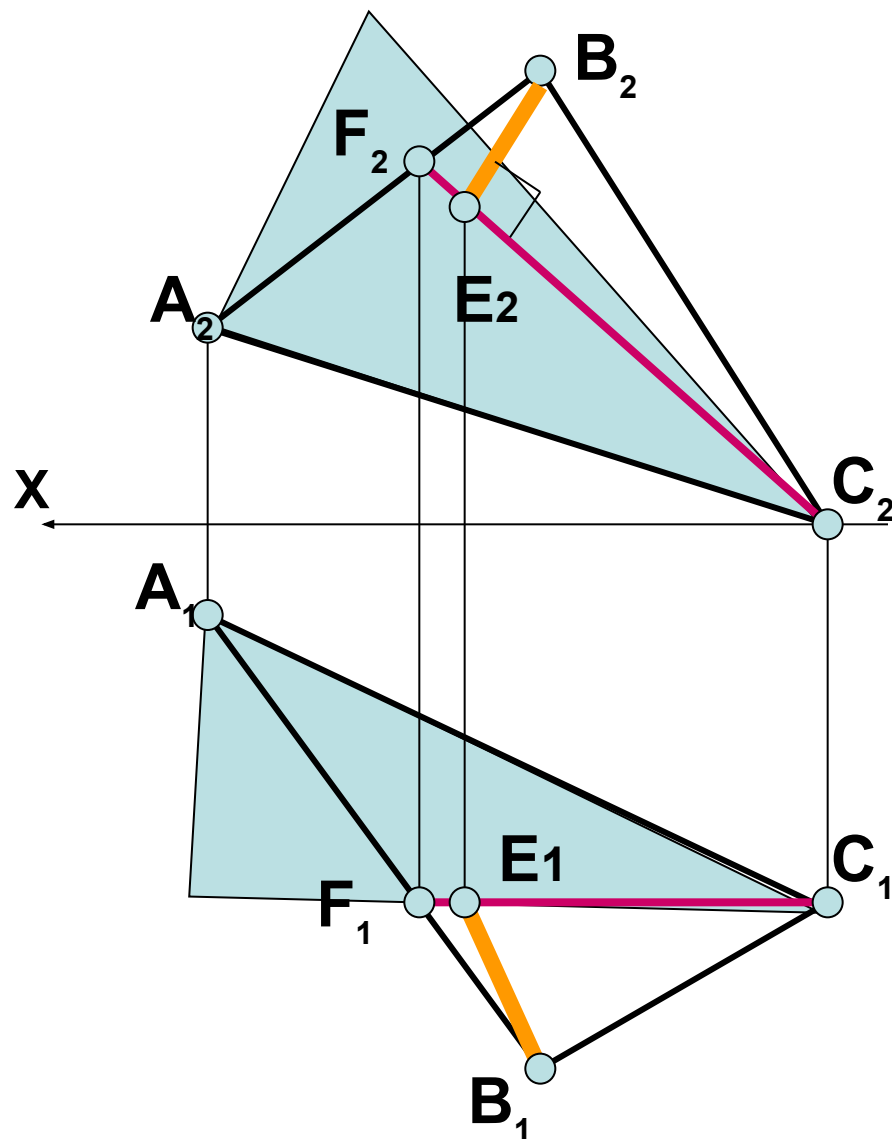
1. ЛНН к $\Pi_2 \perp \alpha_{\Pi_2}$
2. ЛНН к $\Pi_2 \perp f \parallel \Pi_2$

Линия наибольшего наклона плоскости к фронтальной плоскости проекций



AE – ЛНН к Π_2
 $A_2E_2 \perp A_2F_2 \square \square \Pi_2$
 $A_2E_2 \perp \square \Pi_2$

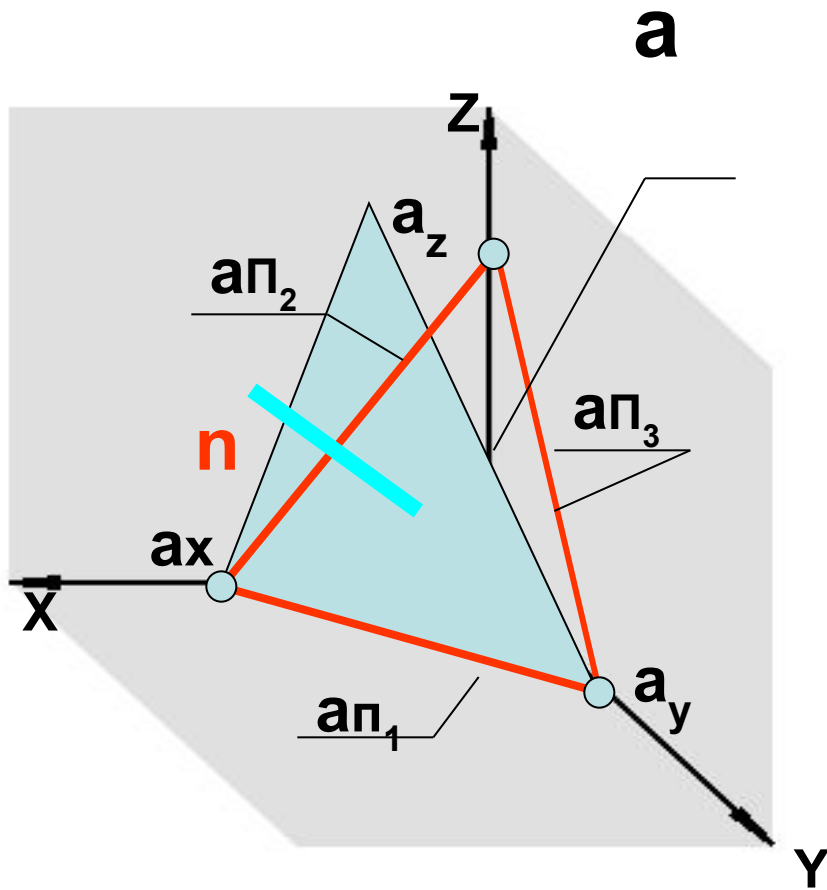
ЛИНИЯ НАИБОЛЬШЕГО НАКЛОНА плоскости $\triangle ABC$ к фронтальной плоскости проекций



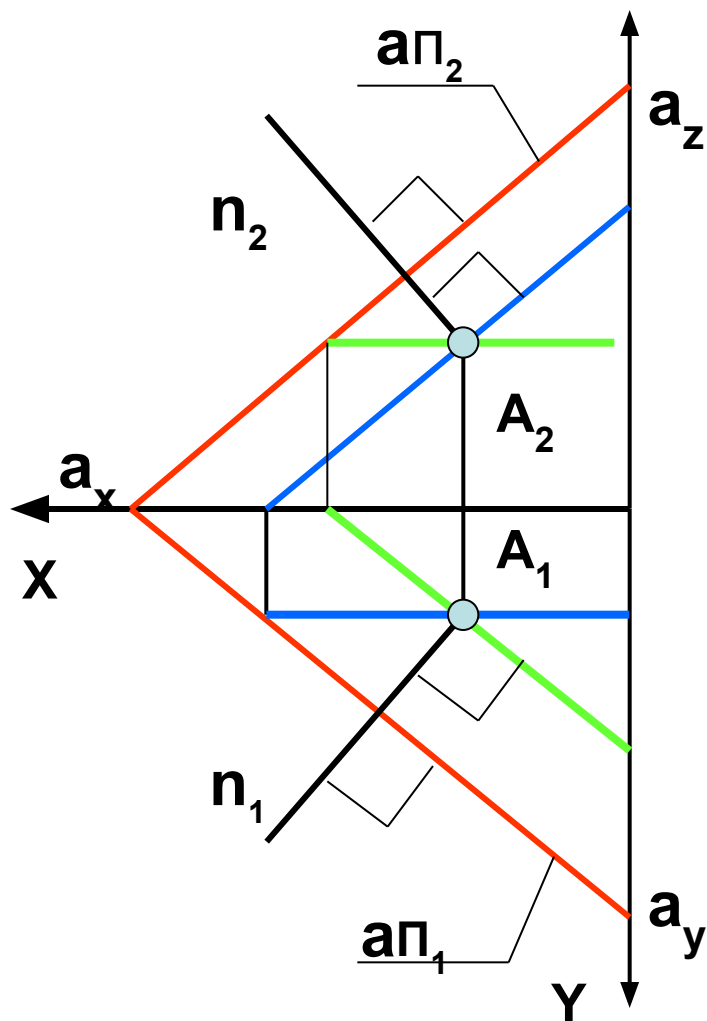
BE – ЛНН к Π_2

$B_2E_2 \perp C_2F_2 \square\square \Pi_2$

НОРМАЛЬ ПЛОСКОСТИ



- Нормаль плоскости
 n – линия
перпендикулярная
заданной плоскости

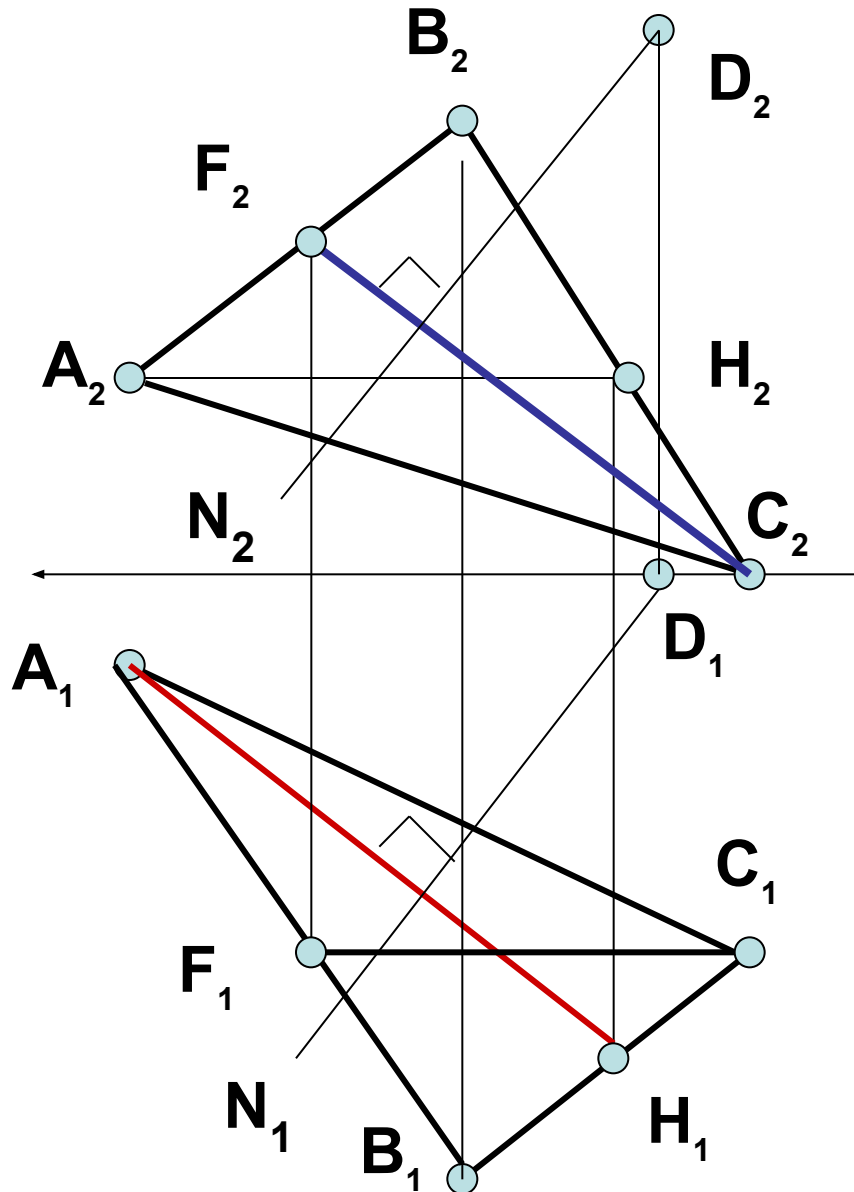


- Проекции нормали перпендикулярны проекциям линий уровня плоскости A :
горизонтали на Π_1 ;
фронталы на Π_2 .
- Проекции нормали перпендикулярны следам плоскости A :

$$n_1 \perp a_{\Pi_1};$$

$$n_2 \perp a_{\Pi_2}.$$

НОРМАЛЬ ПЛОСКОСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА



1. Проведем горизонталь AH . На горизонтальной плоскости проекции нормали перпендикулярна горизонтали $D_1N_1 \perp A_1H_1$

Точку N выберем произвольно

2. Проведем фронталь CF

На фронтальной плоскости проекции нормали перпендикулярна фронтالي $D_2N_2 \perp C_2F_2$

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, ПЛОСКОСТЕЙ

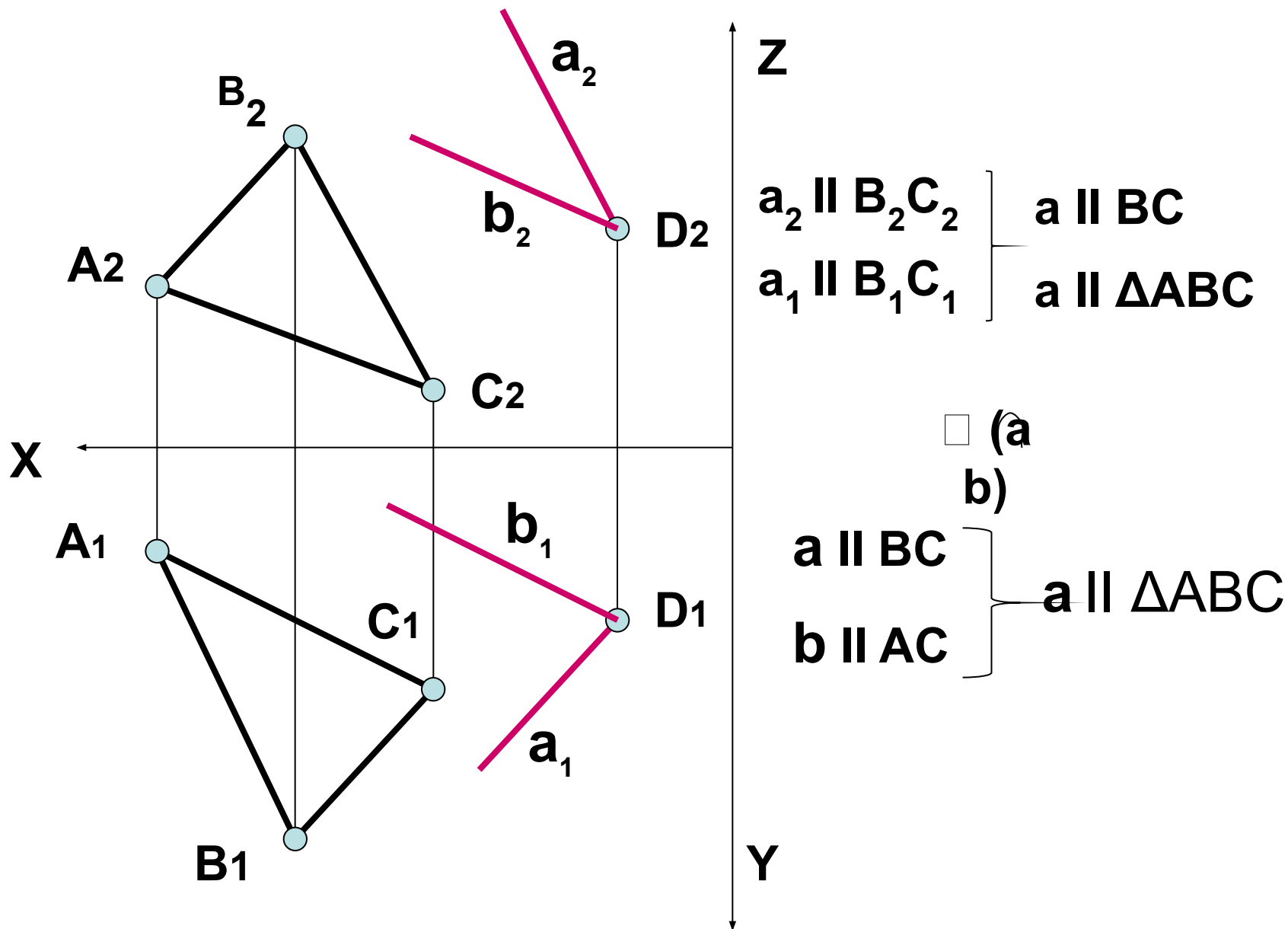


ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ, ПЛОСКОСТИ

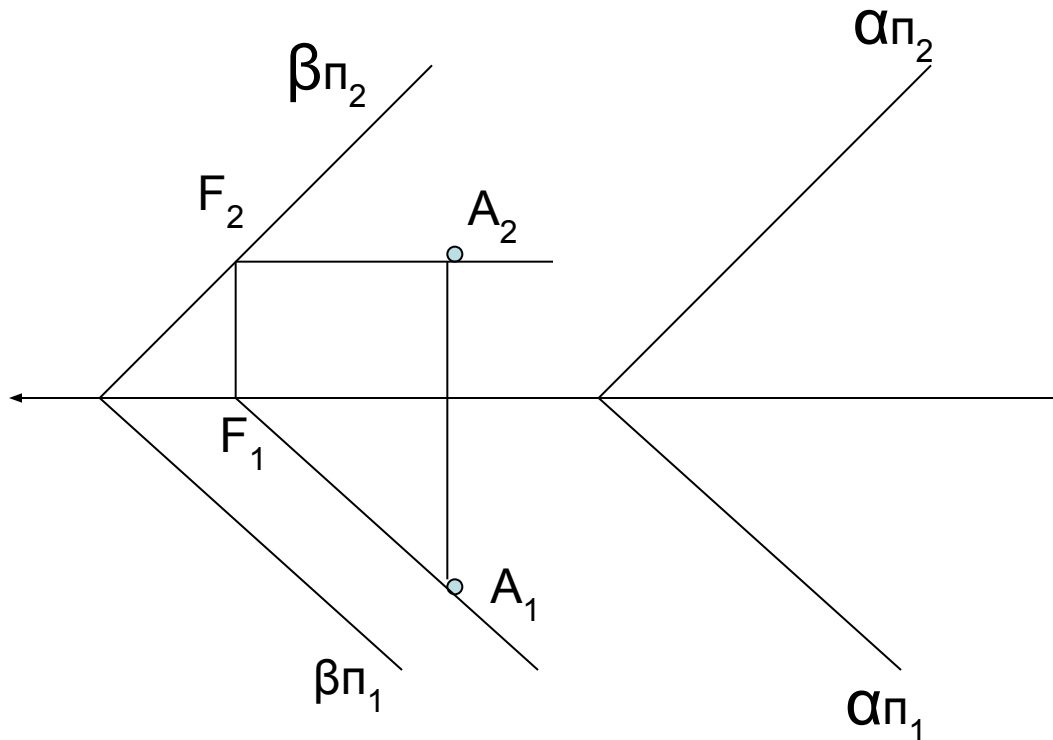
1. ПРЯМАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНА ПЛОСКОСТИ, ЕСЛИ ОНА ПАРАЛЛЕЛЬНА ЛЮБОЙ ПРЯМОЙ ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ ПЛОСКОСТИ
2. ПЛОСКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫ, ЕСЛИ ДВЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМЫЕ ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫ ДВУМ ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ ДРУГОЙ ПЛОСКОСТИ



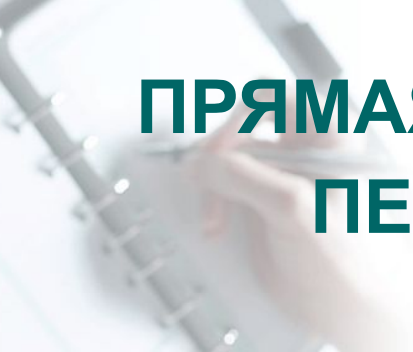
- Через точку D провести прямую a параллельную ΔABC и плоскость α ($a \cap b$) параллельную ΔABC



Построить следы плоскости β , параллельной α и проходящей через точку A



Проведем через точку A горизонталь параллельную
горизонтальному следу плоскости α

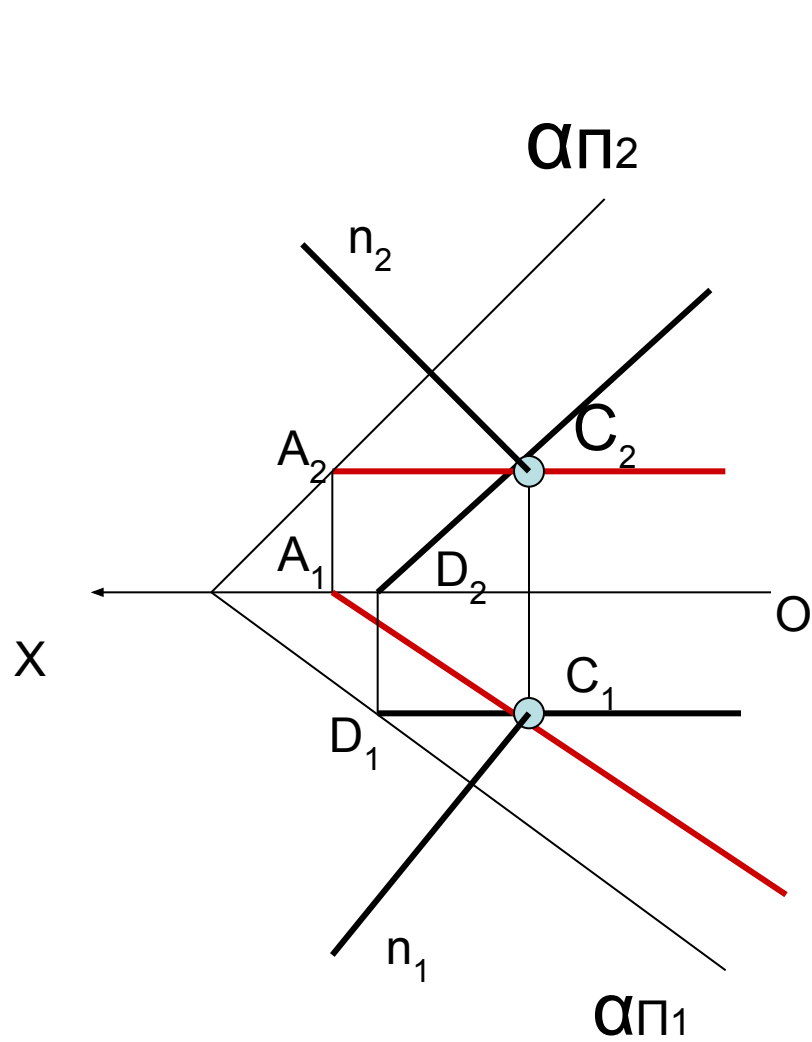


ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ

- *ПРЯМАЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ПЛОСКОСТИ, ЕСЛИ ОНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ДВУМ ПЕРЕСЕКАЮЩИМСЯ ПРЯМЫМ ПРИНАДЛЕЖАЩИМ ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ*
- *В соответствии с теоремой о проекциях прямого угла прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна одноименным проекциям горизонтали и фронтали плоскости*
- *ДВЕ ПЛОСКОСТИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ, ЕСЛИ ОДНА ПЛОСКОСТЬ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ДРУГОЙ*

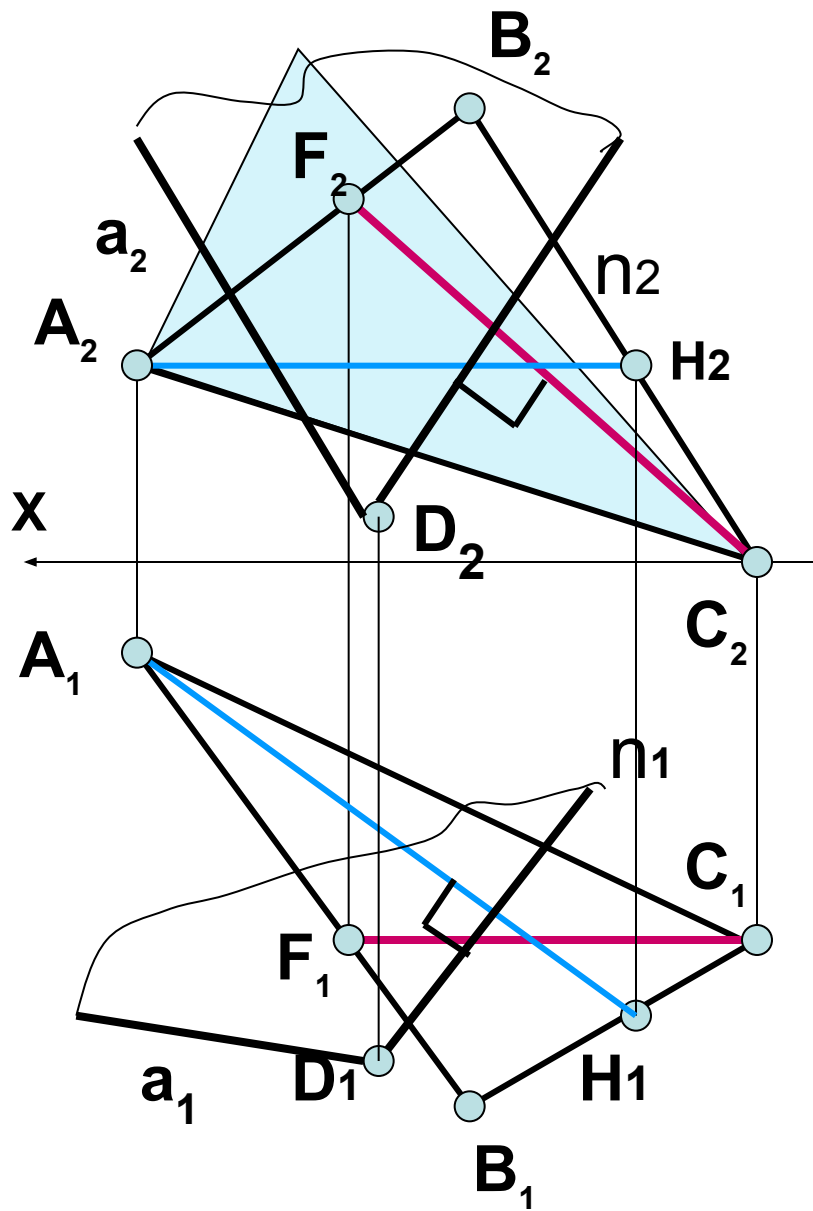
Задача

- Построить проекции нормали плоскости α , проходящей через точку C плоскости



$C \in$
 α

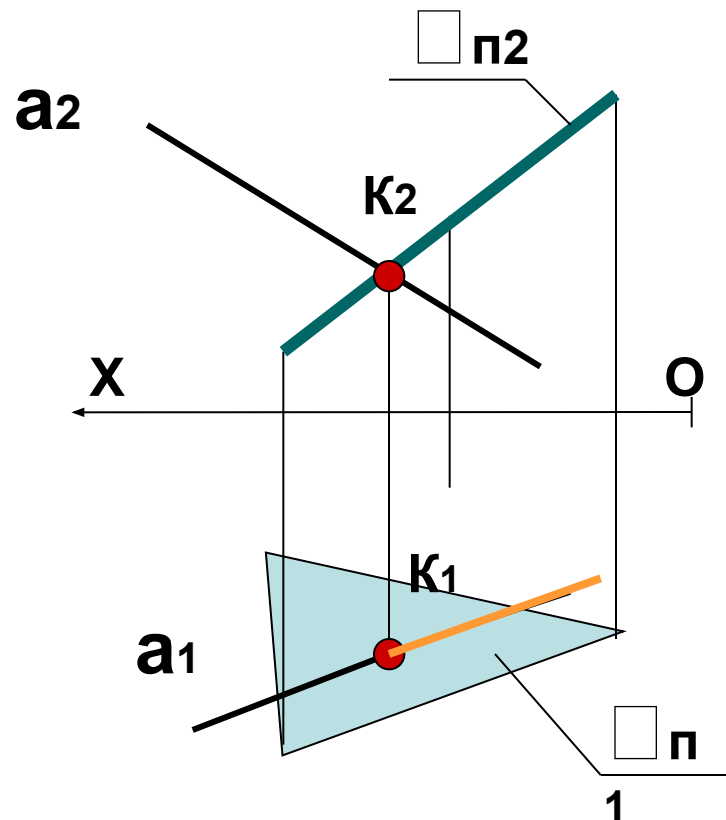
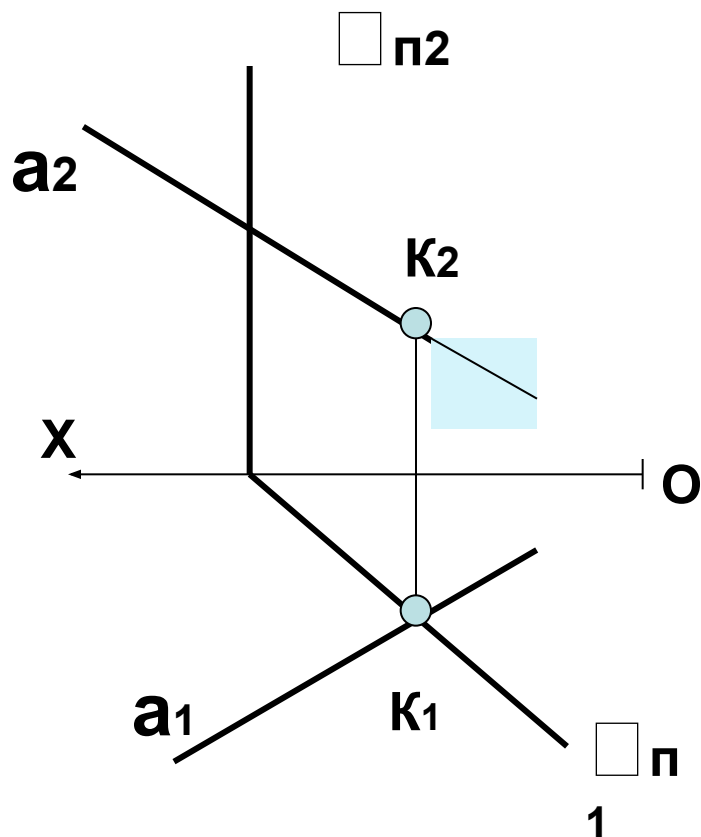
- Через точку D провести перпендикуляр к плоскости ΔABC и плоскость α ($n \perp \alpha$) перпендикулярную ΔABC
- $A(80, 10, 30)$
- $B(40, 60, 50)$
- $C(10, 45, 0)$
- $D(50, 55, 5)$



1. $n_1 \perp A_1H_1 \parallel \Pi_1$
3. $n_2 \perp C_2F_2 \parallel \Pi_2$
4. a – произвольная прямая

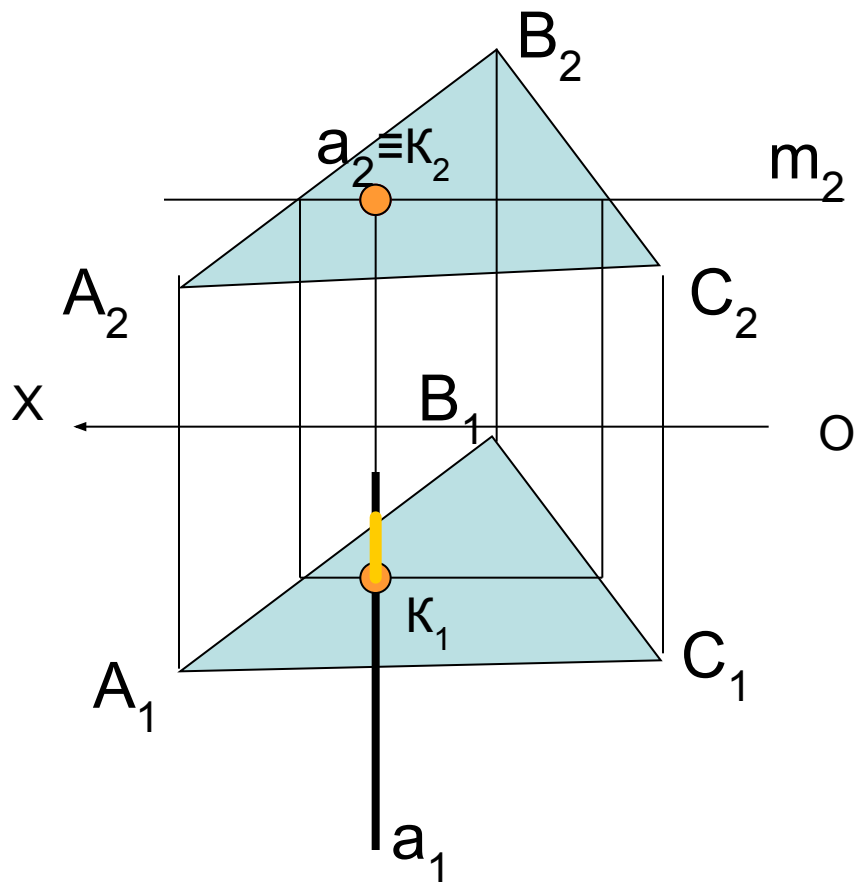
ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

*ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ,
ЕСЛИ У НИХ ЕСТЬ ОДНА ОБЩАЯ ТОЧКА*



- Точка пересечения прямой и плоскости частного положения определяется на пересечении следа плоскости и проекции прямой

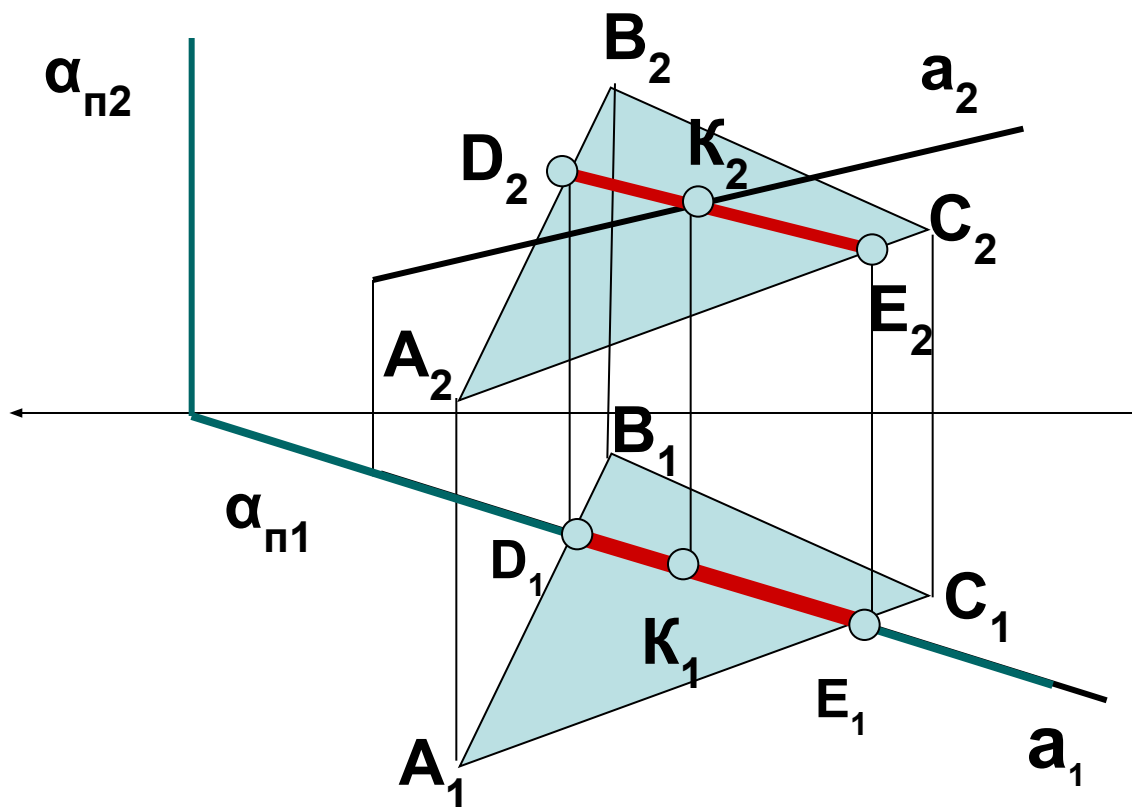
Пересечение прямой частного положения и плоскости общего положения



Пересечение прямой общего положения и плоскости общего положения

СПОСОБ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

1. Через прямую проводят плоскость частного положения $\alpha \perp P_1$.
2. Определяют линию пересечения заданной плоскости и введенной плоскости α .
3. Определяют точку пересечения заданной прямой и построенной линии пересечения. Это искомая точка пересечения заданной плоскости и прямой a .
4. Определяют видимость заданной прямой.

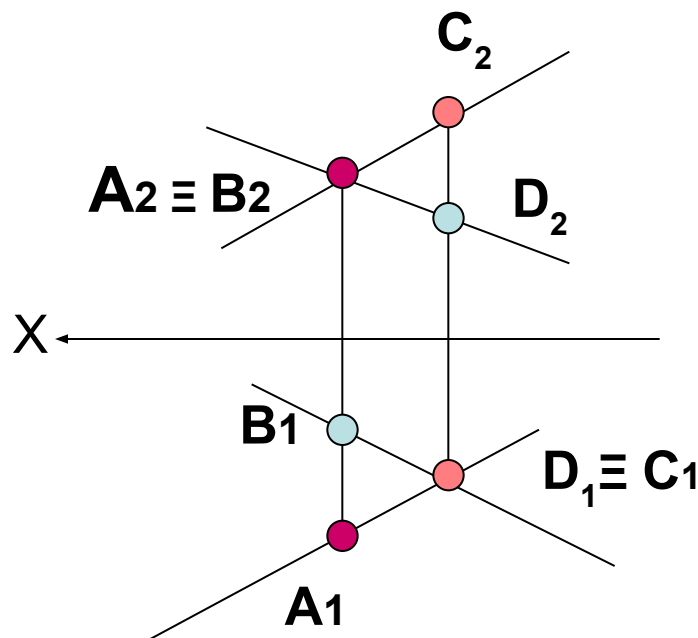


Видимость прямой определяют по конкурирующим точкам

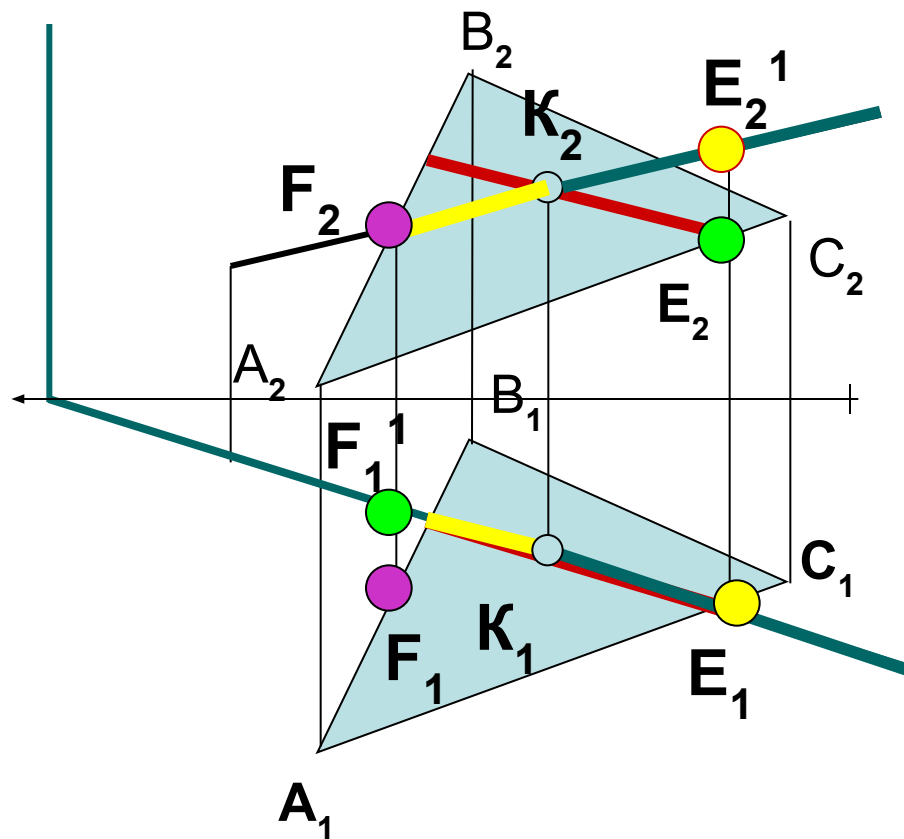
Видимость прямых определяют по **конкурирующим точкам** - **которые принадлежат скрещивающимся прямым.**

Конкурирующие точки располагаются дальше или ближе относительно плоскости Π_2 (точки A и B),
выше или ниже относительно плоскости Π_1 (точки C и D).

*На горизонтальной плоскости проекций видима точка C имеющая большую координату Z,
на фронтальной плоскости проекций видима точка A имеющая большую координату Y.*



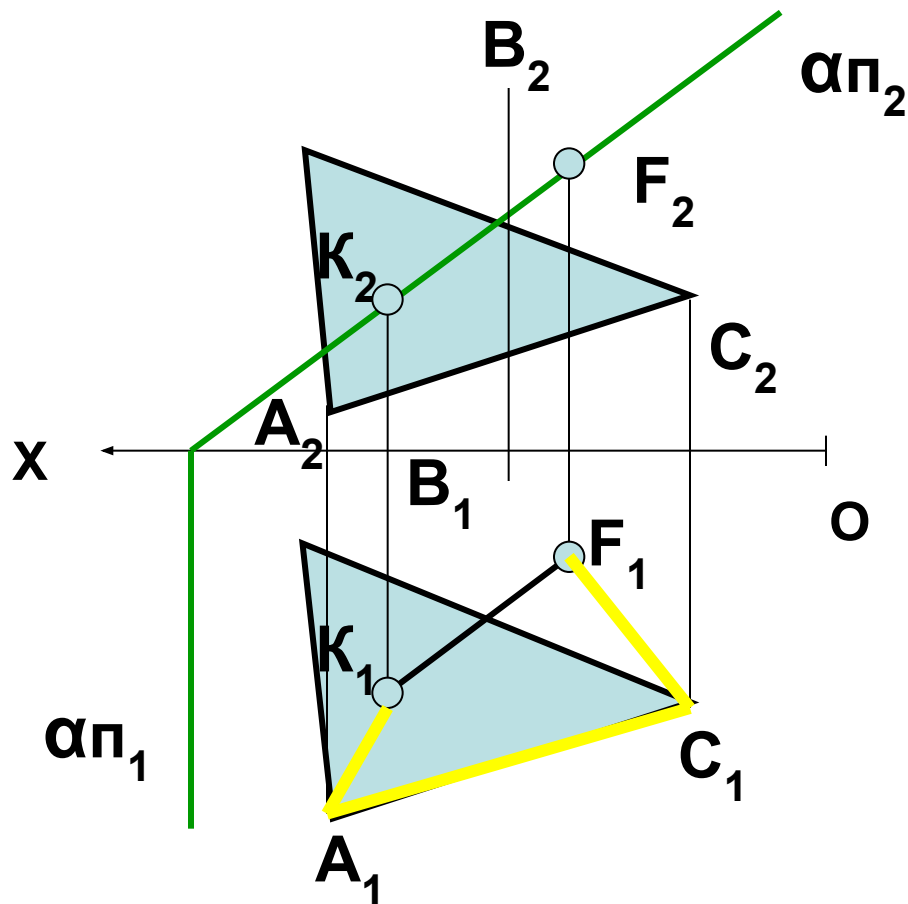
Определение видимости прямой



ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ПЛОСКОСТИ

**1. ПЛОСКОСТИ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ, ЕСЛИ
У НИХ ЕСТЬ ДВЕ ОБЩИЕ ТОЧКИ**

**2. ПЛОСКОСТИ ПЕРЕСЕКАЮТСЯ ПО
ПРЯМОЙ ЛИНИИ, КОТОРАЯ
ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ДВЕ ОБЩИЕ
ТОЧКИ ПЛОСКОСТЕЙ**



- Линия пересечения фронтально-проецирующей плоскости и плоскости общего положения определяется по точкам пересечения сторон треугольника ΔABC и фронтального следа плоскости α

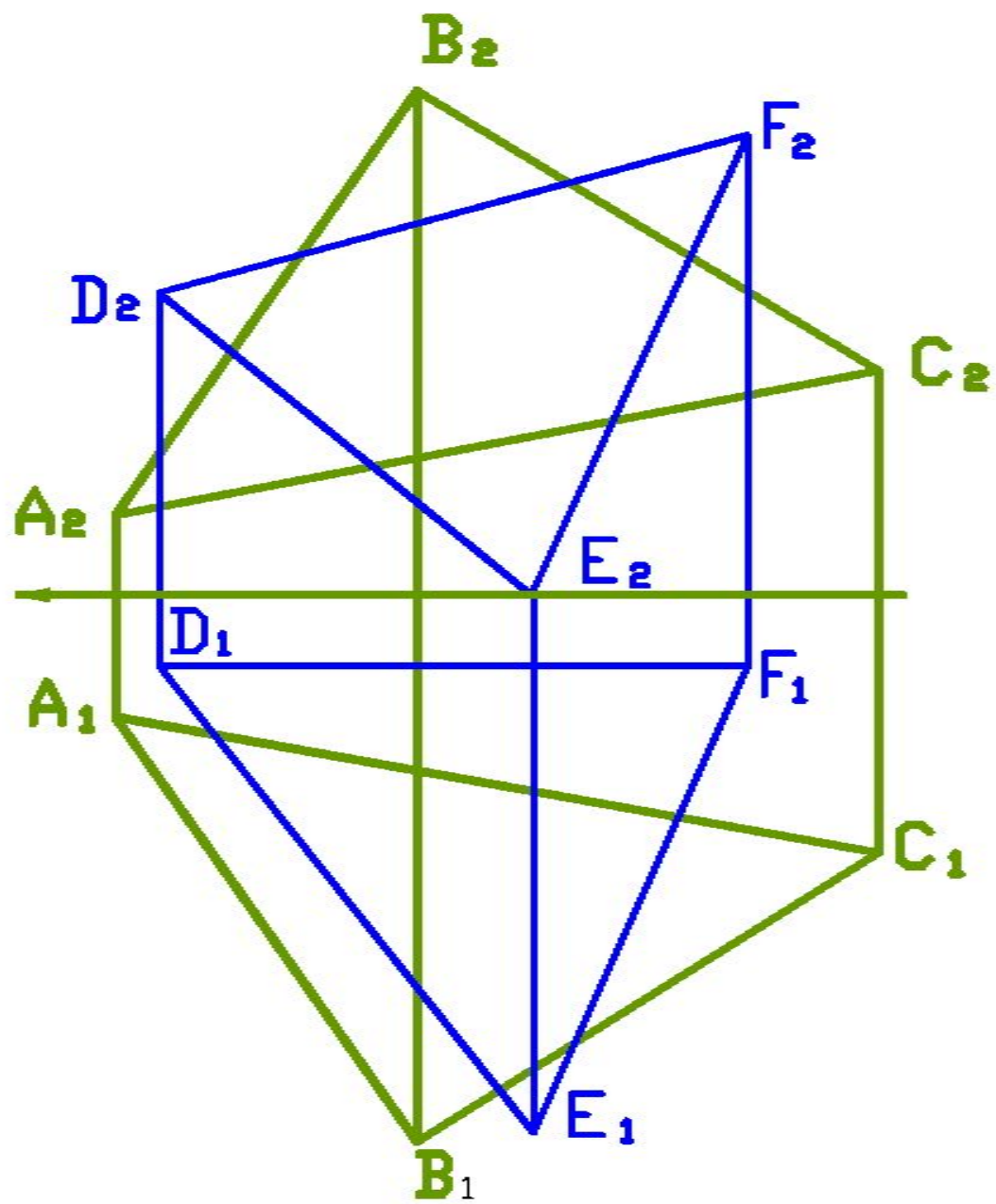
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

*Для построения линии пересечения
плоскостей достаточно определить
две общие точки заданных плоскостей*

Задача

Построить линию пересечения
треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$.

$A(100, 20, 20)$, $B(65, 70, 70)$, $C(10, 30, 25)$,
 $D(90, 10, 55)$, $E(45, 70, 0)$, $F(20, 10, 65)$



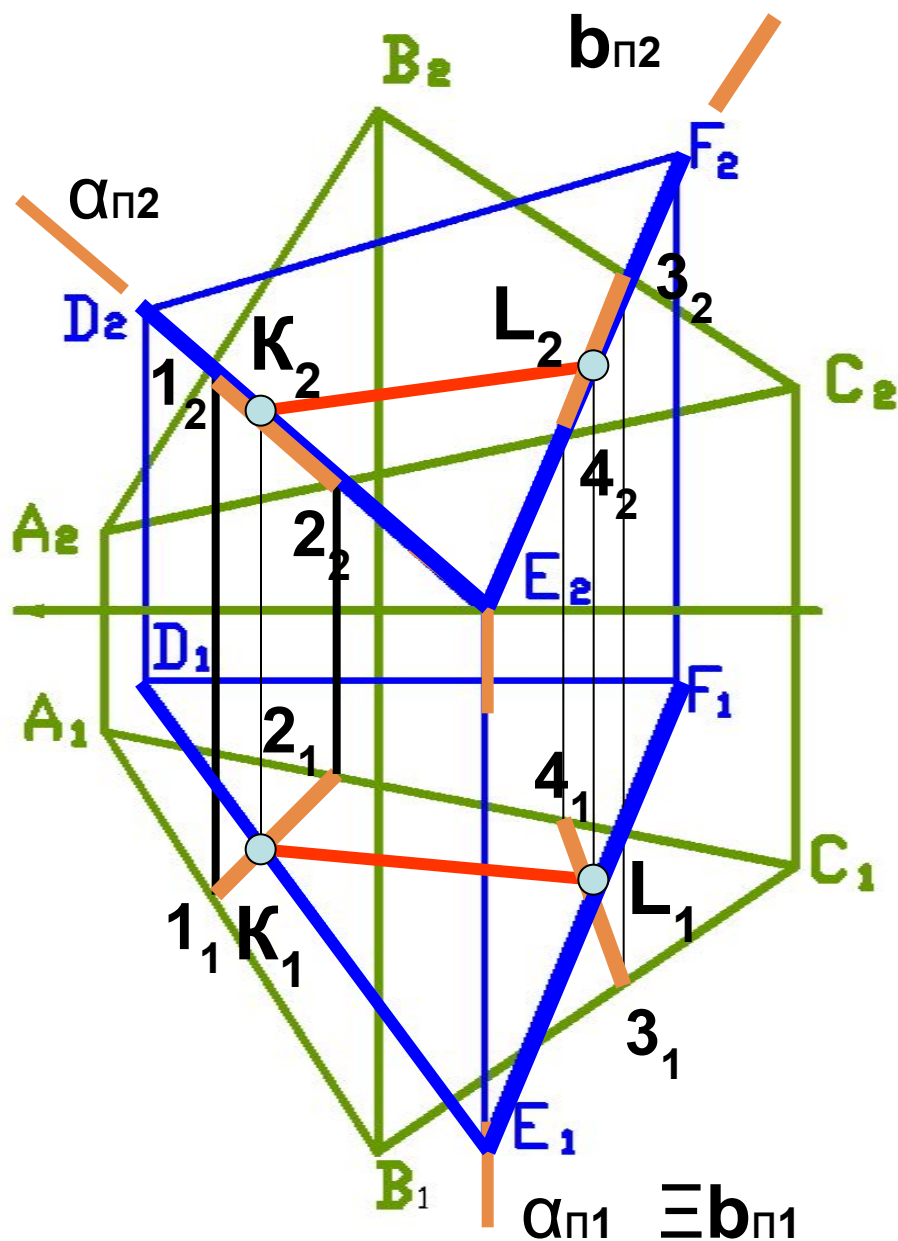
$$1. \quad \square ABC \cap DE = K$$

$$DE \quad \square \quad \square \quad \perp \Pi_2$$

$$2. \quad \square ABC \cap EF = L$$

$$EF \quad \square \quad \square \quad \perp \Pi_2$$

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

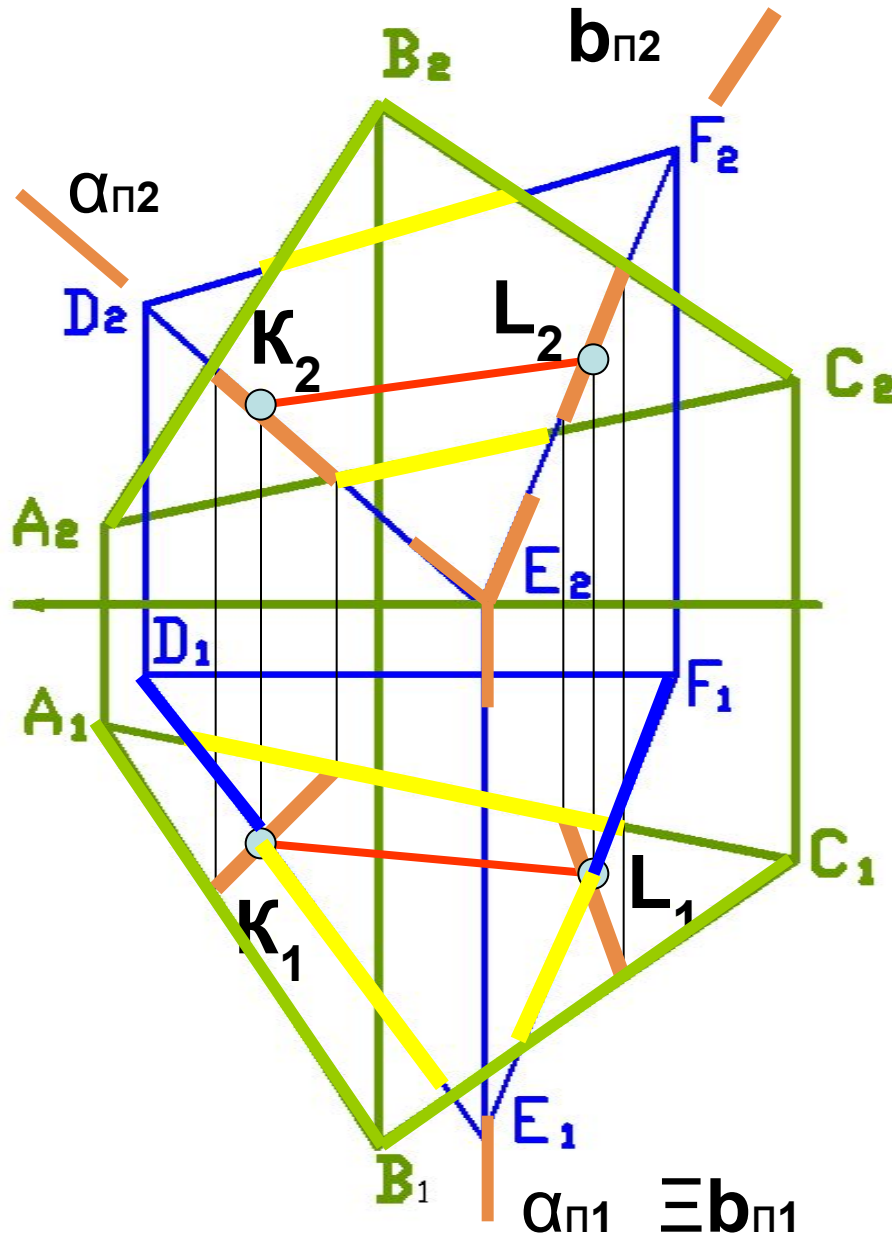


1. $\square ABC \cap \alpha = 1-2$
 $1-2 \cap DE = K$

3. $\square ABC \cap \beta =$
 $3-4 \cap EF = L$

3. Определим видимость
 треугольников.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДИМОСТИ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА



- Видимость определяем по конкурирующим точкам или визуально.
- Вершины треугольников В и F имеют большую координату Z (относит. других вершин).
- В и F видимы на Π_1 .
- Вершины В и Е имеют большую координату У (относит. других вершин).
- В и Е видимы на Π_2 .

