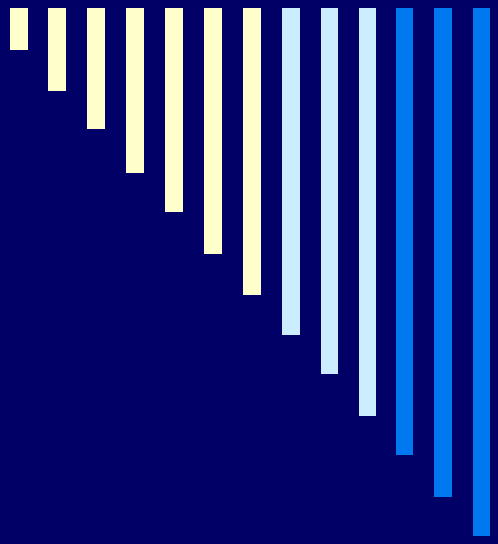


СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема. Дискретные случайные величины (ДСВ)

План:

1. Виды случайных величин.
2. Распределение дискретной случайной величины.
3. Функция распределения.
4. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Контрольные вопросы

1. Что называют случайной величиной?
2. Какие виды случайных величин вы знаете?
3. Что называют дискретной случайной величиной?
4. Что называют законом распределения случайной величины?
5. Как можно задать закон распределения случайной величины?
6. Как можно задать закон распределения ДСВ?
7. Назовите основные числовые характеристики ДСВ, и запишите формулы для их вычисления.

1. Виды случайных величин

Одним из важнейших понятий в теории вероятностей является понятие случайной величины.

Величина называется **случайной**, если в результате опыта она может принимать любые заранее неизвестные значения.

Дискретная случайная величина (ДСВ) – это случайная величина, которая принимает отдельное изолированное, счетное множество значений.

Пример. Число посетителей поликлиники в течение дня.

Непрерывная случайная величина (НСВ) – это случайная величина, принимающая любые значения из некоторого промежутка.

Пример. Масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата.

Случайные величины обозначают заглавными буквами латинского алфавита: ***X, Y, Z*** и т.д.,

а их значения – соответствующими строчными буквами: ***x, y, z*** и т. д.

Пример. Если случайная величина X имеет три возможных значения, то они могут быть обозначены так: x_1, x_2, x_3.

$$X: x_1, x_2, x_3.$$

2. Распределение дискретной случайной величины

Законом распределения ДСВ называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения можно представить в виде таблицы, формулы, графически.

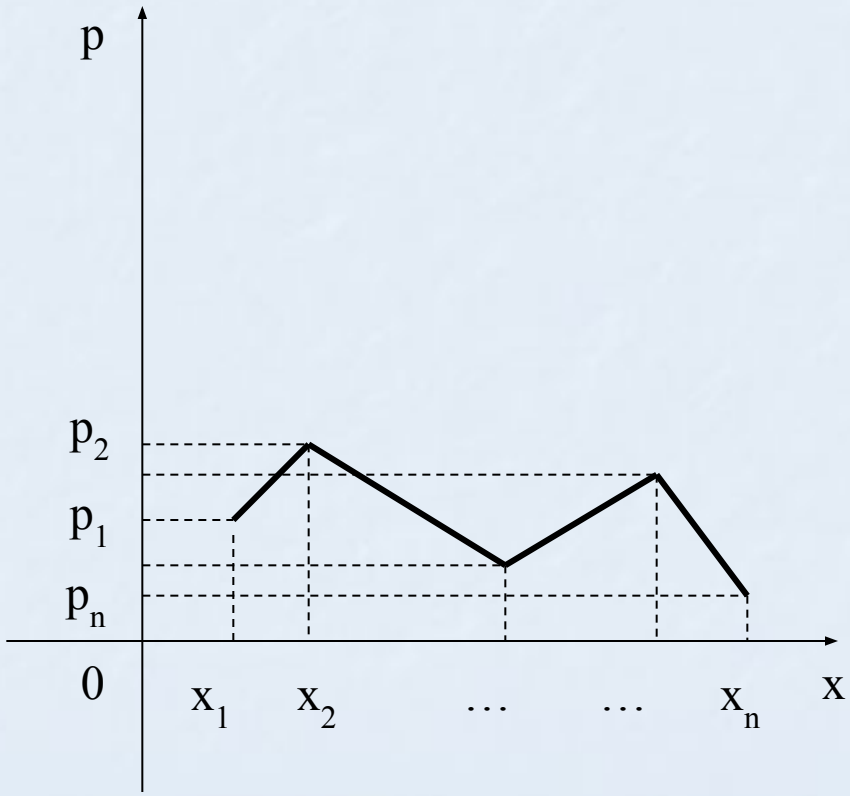
При табличном задании закона распределения ДСВ первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая – их вероятности:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Приняв во внимание, что в одном испытании СВ принимает одно и только одно возможное значение, получаем, что события

$X=x_1$, $X=x_2$,..., $X=x_n$ образуют полную группу, следовательно сумма вероятностей этих событий, то есть сумма вероятностей второй строки таблицы, равна единице:

$$p_1+p_2+...+p_n=1.$$



Для наглядности закон распределения ДСВ можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки с координатами $(x_i ; p_i)$, а затем соединяют их отрезками прямых.

Полученную фигуру называют **многоугольником распределения**.

3. Функция распределения

Функцией распределения случайной величины X называется функция действительной переменной x, определяемая равенством $F(x)=P(X<x)$.

Ее также называют интегральной функцией распределения ДСВ и НСВ.

Так как до значения x_1 случайная величина X не встречалась, то и вероятность события $X< x_1$ равна нулю.

Для всех значений $x_1<x \leq x_2$ вероятность события $X<x$ совпадает с вероятностью значения x_1, т. е. p_1.

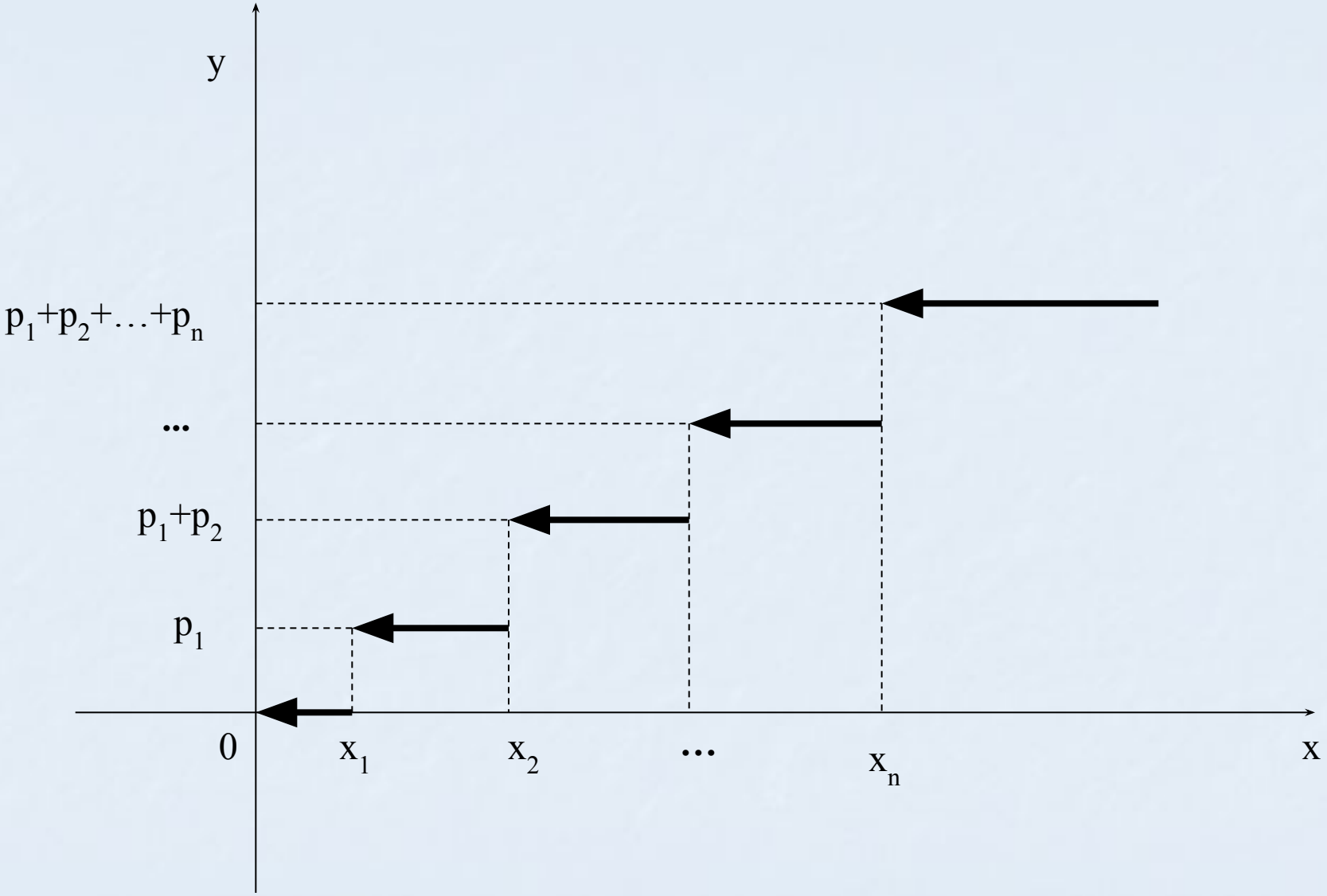
Но при $x>x_2$ СВ уже может принимать два возможных значения x_1 и x_2 , поэтому вероятность события $X<x$ для $x_2<x \leq x_3$ будет равна сумме вероятностей p_1+p_2 и т.д.

Если дискретные значения случайной величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ расположены в порядке возрастания, то каждому значению x_i этих величин ставится в соответствие сумма вероятностей всех предыдущих значений и вероятности p_i:

x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_1	$p_1 + p_2$	$p_1 + p_2 + p_3$	...	$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & npu \quad x < x_1; \\ p_1, & npu \quad x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & npu \quad x_2 < x \le x_3; \\ \dots & \dots \quad \dots \\ 1 & npu \quad x > x_n. \end{cases}$$

Нанося на график возможные значения ДСВ X и соответствующие суммы вероятностей, получаем ступенчатую фигуру, которая и является графиком функции распределения вероятностей.


y
$p_1+p_2+\ldots+p_n$
...
p_1+p_2
p_1
0
x_1
x_2
...
x_n
x

Свойства функции распределения случайной величины X

$$1) 0 \le F(x) \le 1;$$

$$2) x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$$

4. Числовые характеристики дискретных случайных величин

1). Математическое ожидание и его свойства

Математическим ожиданием ДСВ X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности.

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Вероятностный смысл математического ожидания:

Математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины. (На числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания, т. е. математическое ожидание больше наименьшего и меньше наибольшего возможных значений).

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной

$$M(C) = C$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания

$$M(CX) = C \cdot M(X)$$

3. Математическое ожидание суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)$$

4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.

(Две случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая величина)

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

2). Дисперсия и ее свойства

Дисперсией (рассеянием) ДСВ называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю

$$D(C) = 0$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X)$$

3. Дисперсия суммы конечного числа независимых СВ равна сумме их дисперсий

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

Теорема. Дисперсия ДСВ равна разности между математическим ожиданием квадрата ДСВ X и квадратом ее математического ожидания

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

3). Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется арифметическое значение корня квадратного из ее дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример.

Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, определяемой как количество студентов в наугад выбранной группе, используя следующие данные:

X	8	9	10	11	12
P	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

$$M(X) = 8 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}3 + 11 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}9 + 3 + 2{,}2 + 2{,}4 = 10{,}1;$$

$$D(X) = 8^2 \cdot 0{,}2 + 9^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}3 +$$

$$+ 11^2 \cdot 0{,}2 + 12^2 \cdot 0{,}2 - (10{,}1)^2 =$$

$$= 103{,}9 - 102{,}01 = 1{,}89;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1{,}89} = 1{,}37.$$

Замечание. Математическое ожидание и дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях

Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания являются независимыми. Пусть эти вероятности одинаковы и равны p.

Тогда вероятность не наступления события A в испытании

$$q=1-p.$$

Теорема. Математическое ожидание числа появлений события A в независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события A в каждом испытании:

$$M(X) = n \cdot p$$

Теорема. Дисперсия числа появлений события A в независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события A в одном испытании:

$$D(X) = n \cdot p \cdot q$$

Пример. В пяти аптеках проверяется годовой баланс. Вероятность правильного оформления баланса в каждой аптеке равна 0,7. Найти математическое ожидание и дисперсию правильно оформленных балансов.

Решение.

По условию $n=5$; $p=0,7$;

$q=1-0,7=0,3$.

$$M(X) = 5 \cdot 0{,}7 = 3{,}5;$$

$$D(X) = 5 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 1{,}05.$$