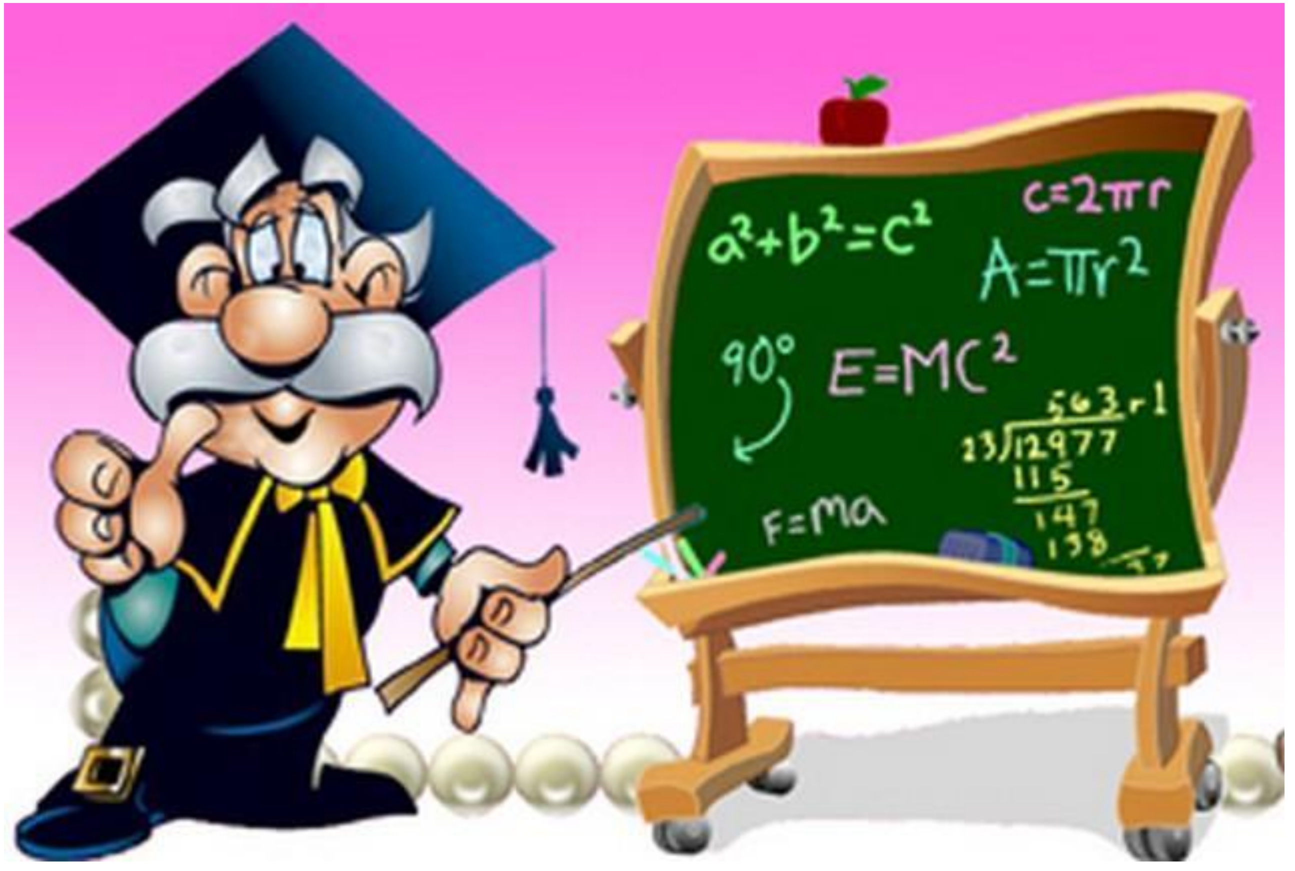
Логарифмические уравнения



mathvideourok.moy.su

!!! !!!

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x),$$

$$f(x) > 0; g(x) > 0; a > 0; a \neq 1$$

потенцируя, получаем

$$f(x) = g(x)$$

!!! !!!

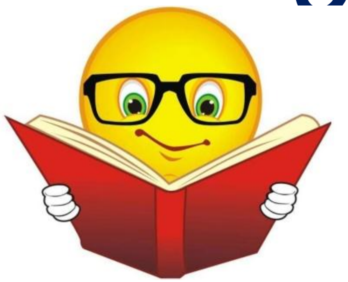
Методы решения уравнений

1. Функционально-графический метод.

Основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функции

2. Метод потенцирования

Он основан на определении.



$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

$$f(x) = g(x)$$

3. Метод введения новой переменной.

$$\textit{вместо}\ \log_a f(x) = m,\ m \in R$$

$$1)\quad \log_{-3} x = 5$$

$$\textit{так как } -3 < 0, \textit{ то корней нет}$$

$$\textit{Ответ}: \textit{корней нет}$$

$$2)\quad \log_1 (x^2 + 5) = 8$$

$$\textit{так как основание равно } 1, \textit{ то корней нет}$$

$$\textit{Ответ}: \textit{корней нет}$$

$$3)\quad \log_x (-5) = 8$$

$$\textit{так как } -5 < 0, \textit{ то корней нет}$$

$$\textit{Ответ}: \textit{корней нет}$$

$$4)\quad \log_2 x = -3$$

$$\textit{ОДЗ}: x > 0, \textit{ то } x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\textit{Ответ}: \frac{1}{8}$$

$$5)\quad \log_2(x^2+4x+3)=3$$

$$ОДЗ: x^2+4x+3>0, то\ x^2+4x+3=2^3$$

$$x^2+4x+3=8$$

$$x^2+4x-5=0$$

$$x_1=-5; x_2=1$$

$$Проверка:$$

$$если\ x=-5, то\ (-5)^2+4(-5)+3>0 - верно$$

$$если\ x=1, то\ 1^2+4\cdot 1+3>0 - верно$$

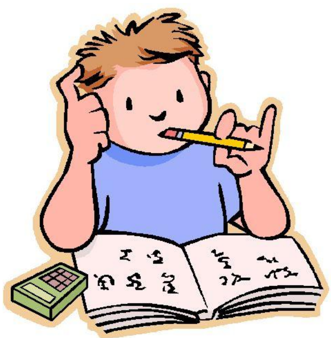
$$-5;1 - корни\ уравнения$$

$$Ответ: -5;1$$

$$6)\ \log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$$

$$ОДЗ:\begin{cases}2x+3>0\\x+1>0\end{cases}\quad\begin{cases}2x>-3/:2\\x>-1\end{cases}\quad\begin{cases}x>-1,5\\x>-1\end{cases}$$

$$x\in(-1;+\infty)$$



$$2x+3=x+1$$

$$x=-2$$

$$-2\notin(-1;+\infty)$$

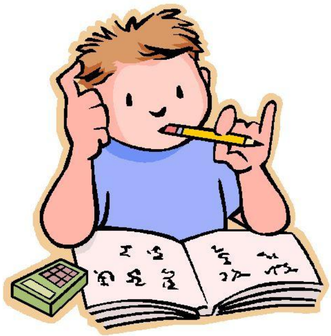
корней нет

Ответ: корней нет

$$7)\quad \log_x(x^2-2x+2)=1$$

$$ОДЗ:\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x^2-2x+2>0\end{cases}$$

$$x^2-2x+2=x$$
$$x^2-3x+2=0$$
$$x_1=2;x_2=1$$



$$если\ x=2,то\ \begin{cases}2>0\\ 2\neq 1\\ 2^2-2\cdot 2+2>0\end{cases}\quad -верно$$

$$2-корень\ уравнения$$

$$если\ x=1,то\ \begin{cases}1>0\\ 1\neq 1\\ 1^2-2\cdot 1+2>0\end{cases}\quad -неверно$$

$$1-не\ является\ корнем$$

$$Ответ:2$$

$$8)\quad \log_2(x+4)+\log_2(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$ОДЗ:\begin{cases}x+4>0\\2x+3>0\\1-2x>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x>-4\\x>-1,5\\x<0,5\end{cases}$$

$$x\in(-1,5;0,5)$$

$$\log_2(x+4)(2x+3)=\log_2(1-2x)$$

$$(x+4)(2x+3)=1-2x$$

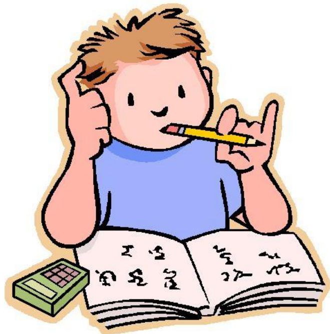
$$2x^2+3x+8x+12-1+2x=0$$

$$2x^2+13x+11=0$$

$$x_1=-5,5;x_2=-1$$

$$-5,5\notin(-1,5;0,5)$$

$$-1\in(-1,5;0,5)$$



$$-1-\textit{корень уравнения}$$

$$\textit{Ответ}:-1$$

$$9)\quad \lg^2 x+\lg x+1=\frac{7}{\lg\frac{x}{10}}$$

$$ОДЗ: x>0$$

$$\lg^2 x+\lg x+1=\frac{7}{\lg x-\lg 10}$$

Пусть $\lg x=n$

$$n^2+n+1=\frac{7}{n-1}\quad /\cdot(n-1)\neq 0$$

$$n\neq 1$$

$$(n-1)(n^2+n+1)=7$$

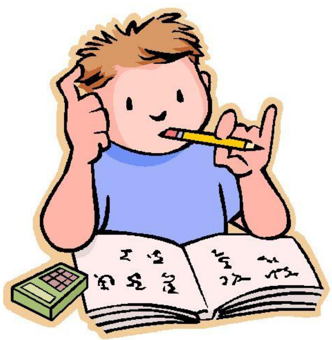
$$n^3-1=7$$

$$n^3=8$$

$$n=2$$

если $n=2$, *то* $\lg x=2$

$$x=100$$



Ответ: 100

$$10)\quad \log_5{}^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0$$

$$ОДЗ: x > 0$$

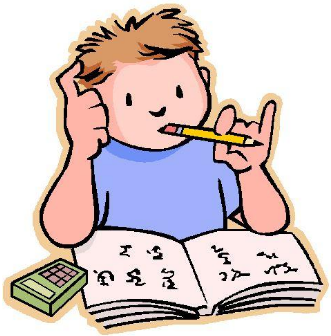
$$\log_5{}^2 x - \log_{5^{\frac{1}{2}}} x - 3 = 0$$

$$\log_5{}^2 x - 2\log_5 x - 3 = 0$$

$$Пусть\ \log_5 = n$$

$$n^2 - 2n - 3 = 0$$

$$n_1 = 3; n_2 = -1$$



$$если\ n = 3, то\ \log_5 x = 3;\ x = 125$$

$$если\ n = -1, то\ \log_5 x = -1;\ x = \frac{1}{5}$$

$$Ответ: \frac{1}{5}; 125$$

$$11)\quad \begin{cases} \lg\left(x^2+y^2\right)=2 \\ \log_2 x-4=\log_2 3-\log_2 y \end{cases}$$

$$ОДЗ: x>0; y>0$$

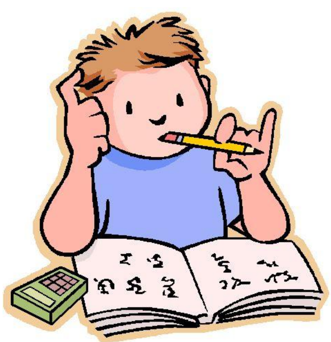
$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ \log_2 x-\log_2 16=\log_2 3-\log_2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ \dfrac{x}{16}=\dfrac{3}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ xy=48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ x=\dfrac{48}{y} \end{cases}$$

$$\left(\frac{48}{y}\right)^2+y^2=100$$



$$\frac{2308}{y^2}+y^2=100 \,/\cdot y^2\neq 0$$

$$y\neq 0$$

$$2308 + y^4 = 100y^2$$

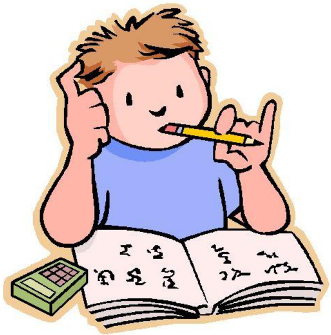
$$y^4 - 100y^2 + 2308 = 0 \qquad \text{Пусть } y^2 = m, m > 0$$

$$m^2 - 100m + 2308 = 0$$

$$m_1 = 64; m_2 = 36$$

$$\text{если } m = 64, \text{ то } y^2 = 64, \ y = 8 \text{ и } x = 6 \ (6;8)$$

$$\text{если } m = 36, \text{ то } y^2 = 36, y = 6 \text{ и } x = 8 \ (8;6)$$



$$\text{Ответ}: (6;8); (8;6)$$

$$12)\ \ 0,5^x = -8$$

$$-8 < 0 - \textit{корней нет}$$

$$\textit{Ответ}: \textit{корней нет}$$

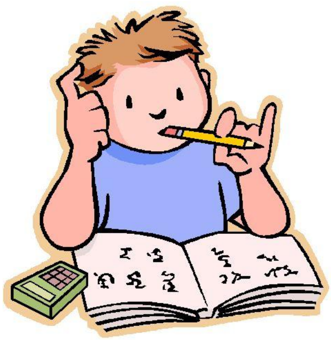
$$13)\ \ 5^{1-3x} = 7$$

$$5^{1-3x} = 5^{\log_5 7}$$

$$1 - 3x = \log_5 7$$

$$3x = 1 - \log_5 7$$

$$x = \frac{1 - \log_5 7}{3}$$

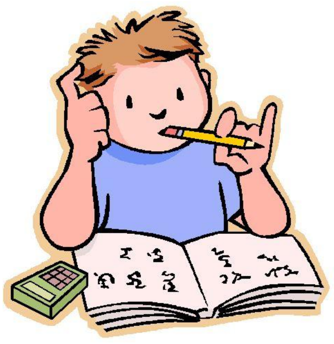


$$\textit{Ответ}: \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\log_5 7$$

Метод логарифмирования

$$14)\ x^{1-\log_5 x} = 0,04 \qquad ОДЗ: x > 0$$

прологарифмируем по основанию 5



$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 \frac{1}{25}$$

$$(1-\log_5 x)\log_5 x - \log_5 5^{-2} = 0$$

$$-\log_5^2 x + \log_5 x + 2 = 0 \qquad Пусть\ \log_5 x = m$$

$$-m^2 + m + 2 = 0 \qquad m_1 = 2; m_2 = -1$$

$$если\ m = 2, то\ \log_5 x = 2,\ x = 25$$

$$если\ m = -1, то\ \log_5 x = -1,\ x = \frac{1}{5}$$

$$Ответ: 25; \frac{1}{5}$$

$15) \quad \log_2 x^2 = 4$ $\qquad$ $ОДЗ: x \neq 0$

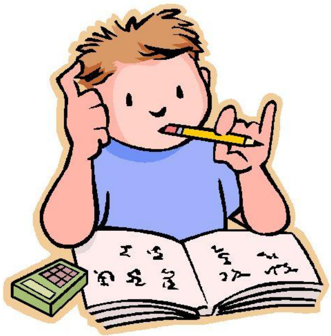
$$2\log_2 |x| = 4$$

$$\log_2 |x| = 2$$

$$|x| = 4$$

$$x = \pm 4$$

$Ответ: \pm 4$



$$16)\quad \log_3(1+\log_3(2^x-7))=1$$

$$1+\log_3(2^x-7)=3$$

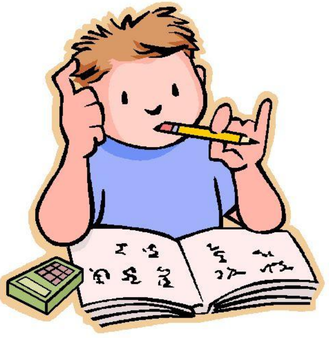
$$\log_3(2^x-7)=2$$

$$2^x-7=9$$

$$2^x=16$$

$$2^x=2^4$$

$$x=4$$



так как $y=2^m$ *– монотонна на* $D(y)=R$

Проверка:

если $x=4$, *то* $\log_3(1+\log_3(2^4-7))=1$ *– верно*

Ответ: 4

$$17)x3\quad^{2}+5^{\log_5 x}=16^{\log_4\sqrt{30}}\qquad ОДЗ: x>0$$

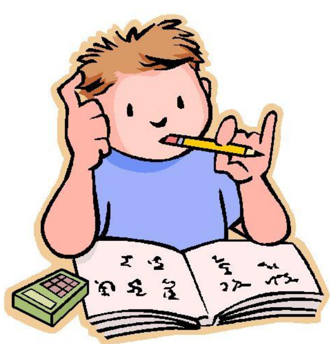
$$3x^2+x=\left(4^{\log_4\sqrt{30}}\right)^2$$

$$3x^2+x=30$$

$$3x^2+x-30=0$$

$$x_1=-\frac{20}{6}<0;\qquad {}_2=3$$

$$Ответ: 3$$



$$18)\ x^{3\lg x-\frac{1}{\lg x}}=\sqrt[3]{10}$$

$$ОДЗ: x>0; x\neq 1$$

Прологарифмируем по основанию 10

$$\lg x^{3\lg x-\frac{1}{\lg x}}=\lg\sqrt[3]{10}$$

$$\left(3\lg x-\frac{1}{\lg x}\right)\lg x=\frac{1}{3}$$

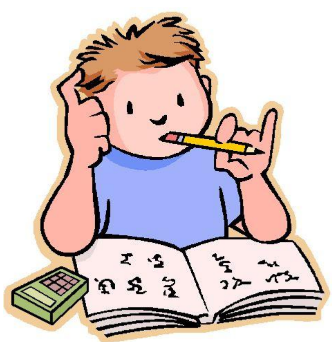
$$3\lg^2 x-1=\frac{1}{3}$$

$$3\lg^2 x=\frac{4}{3}$$

$$\lg^2 x=\frac{4}{9}$$

$$\lg x=\frac{2}{3};\lg x=-\frac{2}{3}$$

$$x=10^{\frac{2}{3}}\qquad x=10^{-\frac{2}{3}}$$



$$Ответ: \sqrt[3]{100};\sqrt[3]{\frac{1}{100}}$$

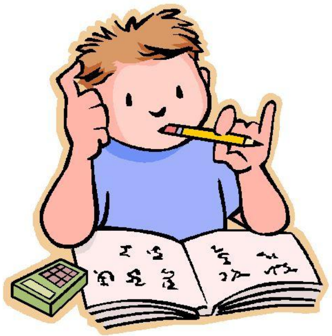
19) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$ $\quad$ $ОДЗ: x > 0$

$$\log_3 \log_2 x = 7^0 = 1$$

$$\log_2 x = 3^1 = 3$$

$$x = 2^3 = 8$$

$Ответ: 8$



20) $\lg(x-5)^2+\lg(x+6)^2=2$

$ОДЗ: x\neq 5;-6$

$$2\lg|x-5|+2\lg|x+6|=2\ /:2$$

$$\lg|x-5|+\lg|x+6|=1$$

$$\lg\left(|x-5||x+6|\right)=1$$

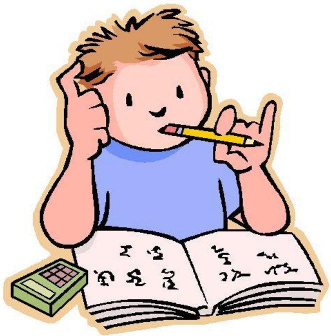
$$|x-5||x+6|=10$$

$$|x^2+x-30|=10$$

$x^2+x-30=10;\qquad x^2+x-30=-10$

$x^2+x-40=0\qquad\qquad x^2+x-20=0$

$x_{1;2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{161}}{2}\qquad\qquad x=-5;4$



$Ответ: \dfrac{-1\pm\sqrt{161}}{2};-5;4.$

$$21)\quad 3^{x+1}=5^{x-2}$$

Прологарифмируем по основанию 10

$$\lg 3^{x+1}=\lg 5^{x-2}$$

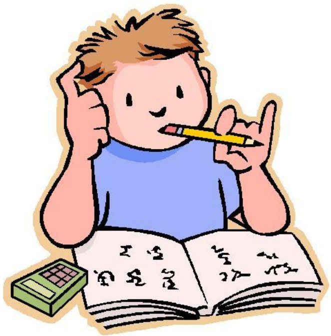
$$(x+1)\lg 3=(x-2)\lg 5$$

$$x\lg 3+\lg 3=x\lg 5-2\lg 5$$

$$x\lg 3-x\lg 5=-2\lg 5-\lg 3$$

$$x(\lg 3-\lg 5)=-(\lg 25+\lg 3)$$

$$x=\frac{-\lg 75}{\lg 0,6}$$



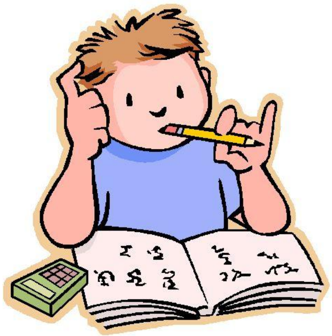
$$\textit{Ответ}:-\frac{\lg 75}{\lg 0,6}$$

22) $x^{\log_3 x} = 81$ $\quad$ $ОДЗ: x > 0$

Прологарифмируем по основанию 3

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$$

$$\log_3 x \cdot \log_3 x = 4$$



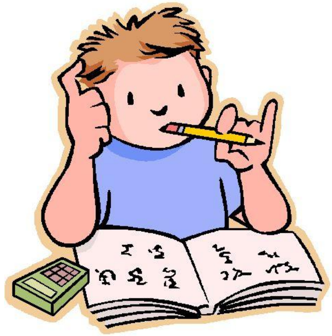
$$\log_3{}^2 x = 4$$

$$\log_3 x = 2; \quad \log_3 x = -2$$

$$x = 9 \qquad x = \frac{1}{9}$$

$$Ответ: 9; \frac{1}{9}$$

$$23)\quad \log_9(3^x+2x-20)=x(1-\log_3 9)$$



$$\log_9(3^x+2x-20)=x\cdot(1-0,5)$$

$$\log_9(3^x+2x-20)=0,5x/\cdot 2$$

$$2\log_9(3^x+2x-20)=x$$

$$(3^x+2x-20)^2=9^x$$

$$(3^x+2x-20)^2=3^{2x}$$

$$(3^x+2x-20)^2=\left(3^x\right)^2$$

$$3^x+2x-20=3^x$$

$$2x-20=0$$

$$2x=20$$

$$x=10$$

$$\textit{Проверка}:$$

$$\textit{если } x=10, \textit{то } \log_9(3^{10}+2\cdot 10-20)=10(1-\log_3 9)$$

$$\log_9 3^{10}=5-\textit{верно}$$

$$\textit{Ответ}:10$$

$$24)\ \ 3\log_2^2 \sin x + \log_2(1-\cos 2x) = 2$$

$$3\log_2^2 \sin x + \log_2 2\sin^2 x = 2$$

$$3\log_2^2 \sin x + \log_2 2 + \log_2 \sin^2 x = 2$$

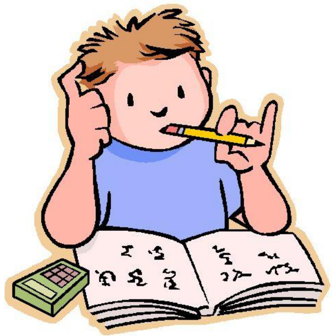
$$3\log_2^2 \sin x + 1 + 2\log_2 \sin x = 2$$

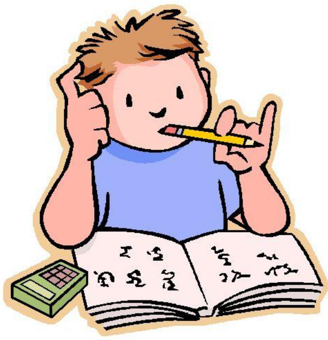
$$3\log_2^2 \sin x + 2\log_2 \sin x - 1 = 0 \qquad \text{ОДЗ}: \sin x > 0$$

Пусть $\log_2 \sin x = m$

$$3m^2 + 2m - 1 = 0$$

$$m_1 = -1; m_2 = \frac{1}{3}$$





$$1)\textit{если}\ \ m=-1,\quad \log_2 \sin x=-1$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$$

$$2)\textit{если}\ \ m=\frac{1}{3},\quad \log_2 \sin x=\frac{1}{3}$$

$$\sin x=\sqrt[3]{2} \qquad \left|\sqrt[3]{2}\right|\le 1-\textit{неверно}$$

$$\textit{корней нет}$$

$$\textit{Ответ}:(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$$