МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКАЯ РЕСПУБЛИКА МАЛАЯ АКАЕМИЯ НАУК УЧАЩЕЙСЯ МОЛОДЕЖИ»

Матричная алгебра в экономике

Работу выполнила:
Антошенко София Сергеевна,
учащаяся 10 класса
МУНИЦИПАЛЬНОГО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ « ШКОЛА № 10 ГОРОДА ТОРЕЗА»

Научный руководитель:
Толмачева Светлана Владимировна,
Учитель математики
МУНИЦИПАЛЬНОГО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ « ШКОЛА № 10 ГОРОДА ТОРЕЗА»

Вступление

Многие не знают, что такое матрица, но еще больше людей не знают, как применять матричный метод при решении экономических задач. Меня заинтересовала эта тема, поэтому я решила посвятить свою работу данному вопросу.

Немного из истории

Матрица представляет собой математический объект, который записывается в формате прямоугольной таблицы с элементами внутри.

Впервые матрица появилась в Древнем Китае и носила название «волшебный квадрат». Чуть позже она стала известна и арабским математикам. В конце XVII века швейцарский ученый Габриэль Крамер разработал свою теорию, а в 1751 году опубликовал один из методов решения систем линейных уравнений «правило Крамера». Также в этот период был создан «метод Гаусса».

Цель исследовательской работы: рассмотреть матричную алгебру в экономике на примере решения задач адаптированных к социально-экономическим реалиям жизни.

Предмет исследования: матрица.

Основными задачами моей исследовательской работы являются:

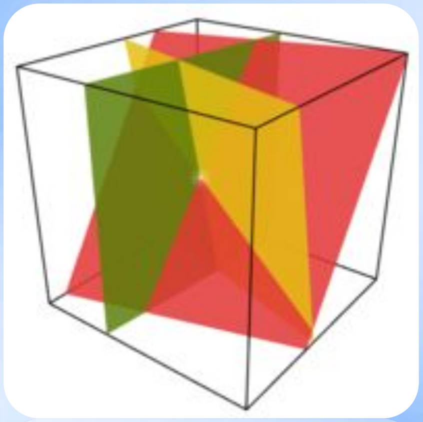
- Научиться применять в экономике матричный аппарат.
- Показать взаимосвязь математики и экономики на примере задач и упражнений.

Линейная алгебра

Линейная алгебра – это раздел математики, в рамках которого изучаются самые разнообразные объекты линейной природы. К числу таких объектов относят линейные уравнения и пространства, отображения и т.д.

Основным объектом линейной алгебры является линейное пространство :

- множество векторов в пространстве;
- множество матриц одного типа с линейными операциями, заданными на этих множествах.



Что такое матрицы и операции над ними?

Прямоугольная таблица A, содержащая m строк и n столбцов, называется матрицей порядка m на n. В развернутом виде матрица A порядка выглядит следующим образом:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если m=n, то матрица называется квадратной, в противном случае,– прямоугольной. В квадратной матрице элементы образуют ее главную диагональ.

Существуют основные операции над матрицами.

- **Сложение (вычитание)**. Эта операция определена для матриц $A=(a_{ij})_{m,n}$ $B=(b_{ij})_{m,n}$ одинаковой размерности. происходит сложение (вычитание) их соответствующих элементов. Так, пусть Тогда $A \pm B = C = (c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

Пример:

Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3 & 2+1 \\ 9+(-3) & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Существуют основные операции над матрицами.

- **Произведение матриц**. Операция обозначается $A \times B$ или просто AB

и определена для матриц, размерность которых удовлетворяет определенным условиям. А именно, число столбцов первого множителя, т.е. матрицы A, равно число строк второго множителя, т.е. матрицы В.

Пример:

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 2 \times (-3) & 4 \times 1 + 2 \times 4 \\ 9 \times 3 + 0 \times (-3) & 9 \times 1 + 0 \times 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 27 & 9 \end{pmatrix}$$

Существуют основные операции над матрицами.

- **Транспонирование**. Для того чтобы транспонировать матрицу A необходимо сформировать новую матрицу, обозначается A^T, столбцами которой являются соответствующие строки исходной.
  Так, если $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$, то $A^T=B=\left(b_{ij}\right)_{n,m}$, где $b_{ij}=a_{ji}$.

- **Умножение на число.** Для того, чтобы умножить матрицу $A=\left(a_{ij}\right)_{m,n}$ на число C необходимо на это число умножить все её элементы. Т.е. $CA=\left(Ca_{ij}\right)_{m,n}$

- **Обращение матриц**. Матрица B называется **обратной** к матрице A, если $AB=BA=E$, где E является единичной матрицей. Матрица обратная к данной, обычно, обозначается $B=A^{-1}$. Обратная матрица определена только для квадратных матриц.

Ранг матрицы

Рангом матрицы А называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Обозначается ранг матрицы: r(A) или rang(A).

Существует два метода нахождения ранга матрицы:

1. Метод элементарных преобразований нахождения ранга матрицы заключается в том, что матрицу А приводят к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований; количество ненулевых строк полученной ступенчатой матрицы есть искомый ранг матрицы А.
2. Метод окаймляющих миноров.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right| = 0 \qquad \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\right) = 2$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\right| = 27 \qquad \mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$$

Определитель матрицы

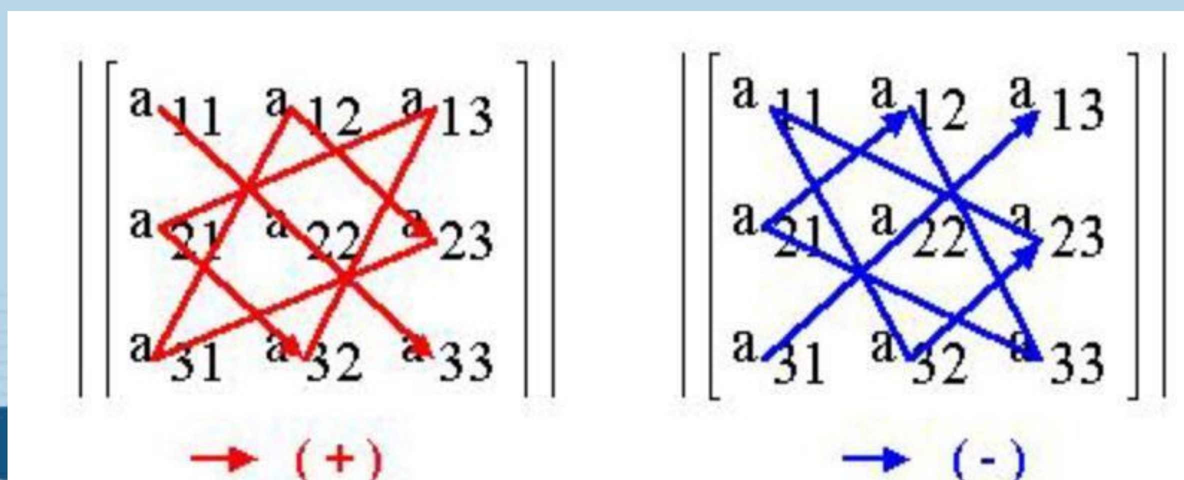
Определитель матрицы или детерминант матрицы - это одна из основных численных характеристик квадратной матрицы, применяемая при решении многих задач.

Определителем матрицы n×n будет число:

det(A) $= \Sigma(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)} \cdot a_{\alpha 11} \cdot a_{\alpha 22} \cdot ... \cdot a_{\alpha nn} (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$

где (α1,α2,...,αn) - перестановка чисел от 1 до n, N(α1,α2,...,αn) - число инверсий в перестановке, суммирование идёт по всем возможным перестановкам порядка n.

Определитель матриц A обычно обозначается det(A), |A|, или Δ (A) .



Метод Крамера

Метод Крамера предназначен для решения тех систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), у которых определитель матрицы системы отличен от нуля. Естественно, при этом подразумевается, что матрица системы квадратна (понятие определителя существует только для квадратных матриц). Решение системы уравнений методом Крамера проходит за три шага простого алгоритма:

1. Составить определитель матрицы системы (его называют также определителем системы), и убедиться, что он не равен нулю, т.е. $\mathbf{\Delta \neq 0}$.

2. Для каждой переменной x_j необходимо составить определитель Δ_{x_j}, полученный из определителя $\mathbf{\Delta}$ заменой $\mathbf{j}$-го столбца столбцом свободных членов заданной СЛАУ.

3. Найти значения неизвестных по формуле $x_j = \Delta_{x_j} / \Delta$.

Метод Гаусса

Иногда он также называется **методом исключения**. Условно состоит из двух этапов. Первый из них, – **прямой ход**, заключается в приведении, путем эквивалентных преобразований, системы к, так называемому, **треугольному виду:**

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\quad x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b'_n \end{cases}$$

второй этап – **обратный ход, -** в последовательном нахождении переменных. Из последнего уравнения имеем $x_n = b'_n$,

подставляя, теперь, это значение в предыдущее уравнение, определяем x_{n-1}

и т.д., продвигаясь по системе снизу вверх последовательно находим значения всех переменных.

Пример решения задания методом Крамера

__Пример.__ Решить систему уравнений, используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2*1*4 - 1*2*4 + 1*1*2 - 2*1*4 - 2*2*1 + 1*1*4 = -6$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 4 - 2 + 4 + 8 - 4 = -6$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 32 - 4 + 8 + 8 + 16 = -12$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 - 4 + 16 + 2 - 2 = 12$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-6}{-6} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-12}{-6} = 2,\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{12}{-6} = -2$$

- Выполним проверку:

$$2*1 - 2 + 2*(-2) = -4$$
$$1 + 2 + 2*(-2) = -1$$
$$4*1 + 2 + 4*(-2) = -2$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1,2,-2)$$

Пример решения задания методом Гаусса

***Пример*.** Решить систему уравнений, используя правило Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$2стр. := 2стр. - 1стр. * 2$$
$$3стр. := 3стр. - 1стр. * 4$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ -3x_2 - 2x_3 = -2 \\ -3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2стр. := \frac{2стр.}{}$$
$$3стр. := 3стр. - 2стр. * (-3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ -2x_3 = 4 \end{cases}$$

.

Тогда из

3-го уравнения

$$x_3 = -2$$
$$x_2 = 2$$
$$x_1 = 1$$

Решение задач по экономике с помощью матриц

Типография производит печать продукции трех видов: газеты, журналы, книги. Для их производства используется сырье трех типов: бумага 297×420 мм, краска для печати 1 л., бумвинил 1 м². Нормы расхода каждого из них на одну продукцию и объем расхода сырья на один день заданы таблицей:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одну продукцию, усл. ед.			Расход сырья на один день, усл. ед.
	Газеты	Журналы	Книги	
Бумага 297×420 мм	5	25	150	23750
Краска для печати 1 л.	1,3	2,1	5,4	1715
Бумвинил 1 м^2	0	0	1,2	120

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида продукции.

Решение:

Пусть ежедневно типография выпускает x_1 газет, x_2 журналов и x_3 книг. Тогда в соответствии с расходом материалов каждого вида имеем систему:

$5x_1 + 25x_2 + 150x_3 = 23750$

$1,3x_1 + 2,1x_2 + 5,4x_3 = 1715$

$1,2x_3 = 120$

$\Delta = -26,4$

$\Delta_1 = -13200$

$\Delta_2 = -6600$

$\Delta_3 = -2640$

$x_1 = -13200/(-26,4) = 500$

$x_2 = -6600/(-26,4) = 250$

$x_3 = -2640/(-26,4) = 100$

Ответ: типография выпускает ежедневно 500 газет, 250 журналов и 100 книг.

Выводы

В своей работе я доказала, что матрицы могут быть применимы в обыденной жизни, что алгебра матриц применима к решению большого круга важных задач, она упрощает процедуру решения и облегчает понимание процесса. И хотя в нашей работе этот метод к очень упрощённым, утрированным экономическим решениям, стало ясно, что он может быть использовать и в решении реальных задач экономики и систематики.

Матричный язык, обозначения и матричные вычисления широко используются в различных областях современной математики и ее приложений. Матрицы являются основным математическим аппаратом линейной алгебры и применяются при исследовании линейных отображений векторных пространств, линейных и квадратичных форм, систем линейных уравнений.

Я убедилась, что любую реальную ситуацию можно представить в виде математической модели, а затем найти её решения.

Спасибо за внимание !