ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

Пусть проводятся **n** независимых испытаний, причем вероятность появления события А в каждом испытании равна одному и тому же числу **p**.

Определение 1. Испытания, проводящиеся в одних и тех же условиях и с одинаковой вероятностью наступления события А в каждом испытании, называются **повторными независимыми испытаниями.**

В повторных независимых испытаниях

основным объектом внимания является вероятность числа наступлений события А. Пусть $P(A) = p$.

Вероятность того, что событие А появится **m** раз в **n** независимых испытаниях обозначается $\mathbf{P_{n,m}}$ и определяется формулой **Бернулли**.

Формула Бернулли:

$$\boxed{\mathbf{P_{n,m} = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}},}$$

где $q = 1 - p$,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Формула Бернулли является точной формулой и может применяться при любых **n**, но, как правило, применяется при $\mathbf{n \leq 10}$.

Задача. В некоторой местности вероятность солнечных дней в марте равна 0.6. Найти вероятность того, что на следующей неделе будут:

а) два пасмурных дня;

б) не более двух пасмурных дней.

Дано:	$A = \{\text{пасмурный день}\}$,
$p = P(A) = 0.4$	$\overline{A} = \{\text{солнечный день}\}$.
$q = P(\overline{A}) = 0.6$	*а*) $m = 2$

$n = 7$

$a)\ m = 2$

$b)\ m \leq 2$

$P_{7,2} = ?$

$P_{7,(m \leq 2)} = ?$

$$P_{7,2} = C_7^2 \bullet p^2 q^{7-2} =$$

$$= \frac{7!}{2!5!} \bullet 0.4^2 \bullet 0.6^5 =$$

$$= 21 \cdot 0.16 \cdot 0.07776 = 0.2613$$

$b)\ m \leq 2\ \ (m = 0$ или 1 или $2)$

$$P_{7,(m \leq 2)} = P_{7,0} + P_{7,1} + P_{7,2} = C_7^0 \bullet p^0 q^{7-0} +$$

$$+ C_7^1 \bullet p^1 q^{7-1} + C_7^2 \bullet p^2 q^{7-2} = \frac{7!}{0!7!} \bullet 1 \bullet 0.6^7 +$$

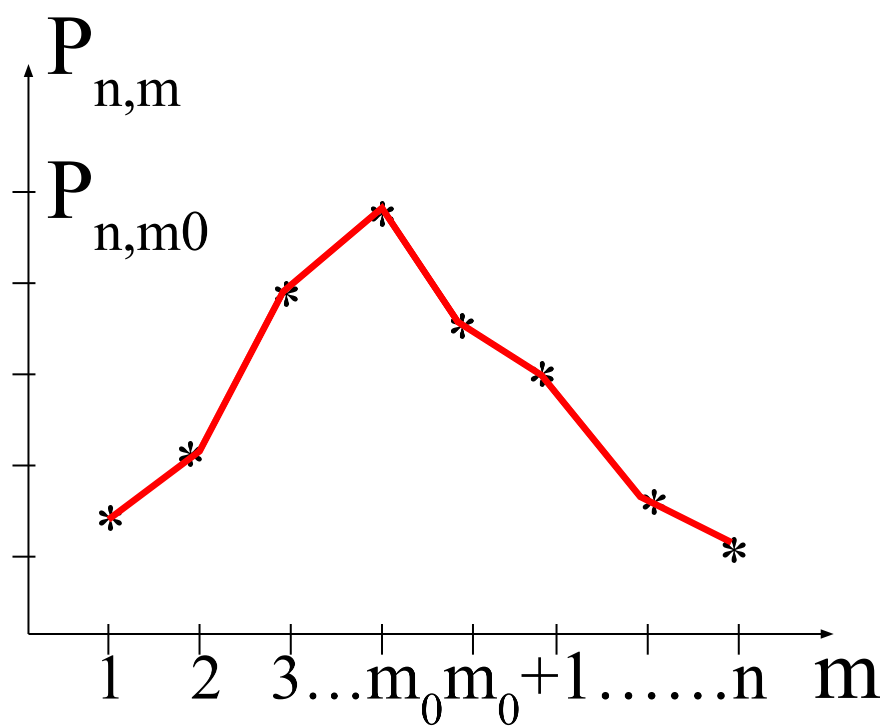
$$+ \frac{7!}{1!6!} \bullet 0.4 \bullet 0.6^6 + \frac{7!}{2!5!} \bullet 0.4^2 \bullet 0.6^5 =$$

$$= 0.02799 + 0.13064 + 0.26127 = 0.4199$$

Наивероятнейшее число наступлений события

Пусть проводятся **n** независимых испытаний. Событие А может появиться в **n** испытаниях 1 раз с вероятностью $P_{n,1}$, 2 раза – с вероятностью $P_{n,2,}$ 3 раза – с вероятностью $P_{n,3}$,…, **m** раз - с вероятностью $P_{n,m}$,…, **n** раз - с вероятностью $P_{n,n}$. Вычислив все эти вероятности, можно найти наибольшую вероятность числа наступлений события А.

Определение. Число $\mathbf{m = m_0}$, при котором вероятность $P_{n,m}$ наступления события A **m** раз в **n** испытаниях – наибольшая, называется **наивероятнейшим числом (или наивероятнейшей частотой) наступлений события.**



Здесь **m** – целое число.

$$\boxed{\mathbf{np - q \le m_0 \le np+p}}$$

В этой формуле

$$(np + p) - (np - q) = p+q = 1.$$

a) если np – целое, то $\mathbf{m_0}$ **–** определяется единственным образом;

b) если np + p не целое, то $\mathbf{m_0}$ **–** определяется единственным образом;

c) если np + p и np – q – целые, то существуют два наивероятнейших числа $\mathbf{m_{01}}$ и $\mathbf{m_{02}}$, отличающиеся на 1, и

$$\mathbf{P_n(m_{01}\ \text{или}\ m_{02}) = P_{n,m01} + P_{n,m02}}.$$

Например:

Если $16,4 \le m_0 \le 17,4$, то $m_0 = 17$.

Если $13 \le m_0 \le 14$, то $m_{01} = 13$, $m_{02} = 14$.

Задача. Вероятность выигрыша на 1 билет лотереи равна 0,3. Определить наивероятнейшее число выигрышей на 8 билетов и вероятность этого числа выигрышей.

Дано:

$p=0,3$; $q=0,7$

$n = 8$

$m_0 = ?$

$P_{n,m0} = ?$

$$np - q \le m_0 \le np + p$$

$$8 \cdot 0.3 - 0.7 \le m_0 \le 8 \cdot 0.3 + 0.3$$

$$1.7 \le m_0 \le 2.7$$

$$m_0 = 2$$

$$P_{n,m0} = C_8^2 \bullet p^2 \bullet q^{8-2} = \frac{8!}{2!6!} * 0.3^2 \bullet 0.7^6 = 0.296.$$

Локальная теорема Лапласа (n > 10)

Теорема. Если вероятность события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 (т. е. $p \neq 0$, $p \neq 1$), то

$$\boxed{P_{n,m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

Здесь

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Отсюда

$$\boxed{P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}}$$

Свойства малой функции Лапласа φ(x).

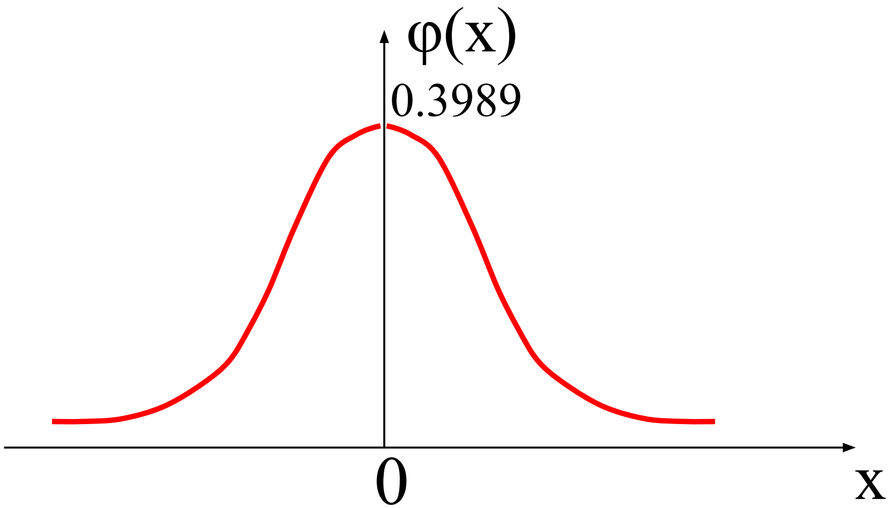
1). Функция $\varphi(x)$ – четна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2). $\max \varphi(x) = \varphi(0) = 0.3989$;

3). $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$;

4) При $x > 4.5$ $\quad \varphi(x) = 0$.

5) Значения функции φ(x) табулированы и приведены в **Приложении 1.**



Алгоритм вычисления

Дано:
p; n; m
$P_{n,m}$=?

1. $q = 1 - p$;

2. $\sqrt{npq}$

$$3.\ x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}};$$

4. $\varphi(x)$ – по таблице;

$$5.\quad P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}.$$

Задача. Вероятность того, что посаженное дерево приживется, равна 0.8. Посажено 100 деревьев. Найти количество деревьев, которые приживутся, если вероятность такого числа равна 0.01087.

Дано:

$p = 0.8$

$n = 100$

$P_{n,m} = 0.01087$

$m = ?$

$$q = 1 - 0.8 = 0.2.$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 * 0.8 * 0.2} = 4$$

$$P_{n,m} \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = 0.01087$$

$$\varphi(x) = \sqrt{npq} * 0.01087 =$$

$$= 4*0.01087 = 0.04348.$$

По таблице Приложения 1 находим $x = 2.1$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{m - 100 * 0.8}{4} = 2.1.$$

$$m - 80 = 2.1*4 = 8.4.$$

$$m = 80 + 8.4 = 88.$$

Интегральная теорема Лапласа (n > 10)

Теорема. Если вероятность события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1 ($p \neq 0$, $p \neq 1$), то вероятность того, что в **n** испытаниях событие А появится от ***a*** до ***b*** раз приближенно равна:

$$\boxed{\mathbf{P}(\boldsymbol{a} \le \mathbf{m} \le \boldsymbol{b}) \approx \frac{1}{2}\,(\,\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{\alpha})\,),}$$

где

$$\alpha = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}},$$

Функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Этот интеграл – неберущийся, значения функции

$\Phi(x)$ приведены в таблице **Приложения 2.**

Свойства функции Лапласа $\Phi(x)$.

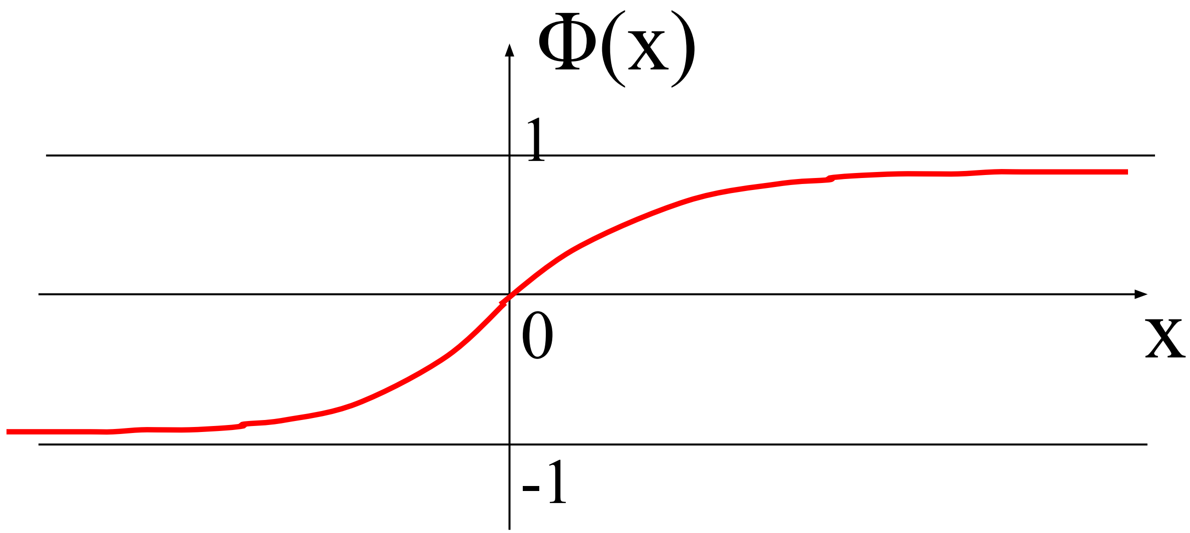
1). $\Phi(x)$ – нечетна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

2). $\Phi(x)$ – возрастает;

3). $\lim\limits_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$;

4). При $x > 4.5$ $\Phi(x) = 1$.

5). $\Phi(2) = 0.9545$, $\Phi(3) = 0.9973$.



Задача. По данным длительной проверки качества продукции брак составляет 8%. Определить вероятность того, что в непроверенной партии из 300 изделий число бракованных изделий будет от 14 до 22 штук.

Дано:

$p = 0.08$

$n = 300$

$a = 14,\ b = 22$

$P(a \le m \le b) = ?$

$$q = 1 - p = 0.92$$

$$\beta = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} =$$

$$= \frac{22 - 300 * 0.08}{\sqrt{300 * 0.08 * 0.92}} = -\frac{2}{4.699} = -0.43$$

$$\alpha = \frac{14 - 300 * 0.08}{\sqrt{300 * 0.08 * 0.92}} = -\frac{10}{4.699} = -2.13$$

$$P(a \le m \le b) = \frac{1}{2}(\ \Phi(-\ 0.43) - \Phi(-2.13)) =$$

$$= \frac{1}{2} (- 0.3328 + 0.9668) = 0.317.$$

Следствие из интегральной теоремы Лапласа

Теорема. С вероятностью, близкой к $\Phi(\varepsilon\sqrt{n/pq})$ можно утверждать, что при достаточно большом числе испытаний **n** абсолютная величина отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ наступления события А от его вероятности **p** не превышает сколь угодно малого, положительного числа **ε**:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/pq}\right)\approx\Phi(\beta)$$

Здесь $\beta=\varepsilon\sqrt{n/pq}$

Задача. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0.2. Какова вероятность того, что среди 10000 покупателей доля тех, кому необходима обувь 41-го размера, отклонится от вероятности $p = 0.2$ (по абсолютной величине) не более, чем на 0.005.

Дано:

$p = 0.2$

$q = 0.8$

$n = 10000$

$\varepsilon = 0.005$

$P(A) = ?$

$$A = \{ \left| \frac{m}{n} - 0.2 \right| \le 0.005 \}$$

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - 0.2 \right| \le 0.005 \right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(0.005 \sqrt{\frac{10000}{0.2 * 0.8}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1.25) \approx 0.7887$$