

Кратні інтеграли

1. Подвійний інтеграл і його властивості
2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових і полярних координатах
3. Застосування подвійного інтеграла до розв'язування геометричних задач
4. Потрійний інтеграл і його властивості
5. Обчислення потрійного інтеграла в декартових, циліндричних і сферичних координатах
6. Застосування потрійного інтеграла до розв'язування геометричних задач

1. Подвійний інтеграл і його властивості

Розглянемо функцію двох змінних $f(x, y)$, що визначена в деякій області D на площині, і будемо вважати, що ця область має площу. Розіб'ємо довільним чином D на n частинних областей D_k ($k = 1, 2, \dots, n$) з площами ΔS_k та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$ (рис 1).

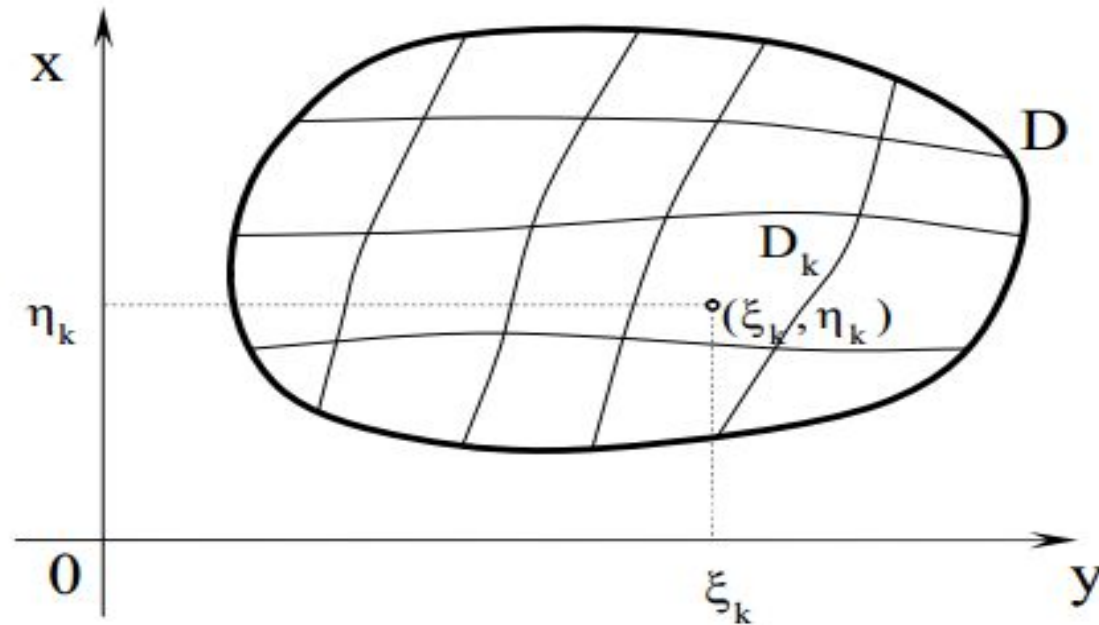


Рис. 1

Утворимо суму виду $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k$, яка називається *інтегральною сумою*, складеною для функції $f(x, y)$ при даному розбитті D на D_k та при даному виборі точок $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$. Введемо позначення $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{d_k\}$, де

d_k визначається формулою

$$d_k = \sup_{(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D_k} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

та називається *діаметром* частинної області D_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Якщо існує скінченна границя при $\lambda \rightarrow 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття D на D_k , ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, то ця границя і називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ по області D та позначається символом $\iint_D f(x, y) dx dy$. При цьому кажуть, що $f(x, y)$ є **інтегрованою** в D . Отже згідно з означенням маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta S_k.$$

Зауважимо, що коли $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , то вона буде і інтегрована в цій області.

Властивості подвійного інтеграла

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими відповідних областях, що мають площу

a) $\iint_D dx dy = S$, S – площа D ,

b) $\iint_D C f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy$, C – стала,

c) $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$,

d) Якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy,$$

е) Якщо в області D виконується умова $f(x, y) \leq g(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy,$$

ф) $\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |g(x, y)| dx dy,$

г) Теорема про середнє. Якщо $f(x, y)$ неперервна в замкненій, зв'язній області D , то знайдеться принаймні одна точка $(x_0, y_0) \in D$ така, що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S, \text{ де } S - \text{площа } D.$$

Властивості б) – г) часто називають властивостями *лінійності* подвійного інтеграла, а властивість д) – властивістю *адитивності*.

1.2. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах

а) Випадок прямокутної області.

Нехай область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$

має вигляд $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ (рис. 2)

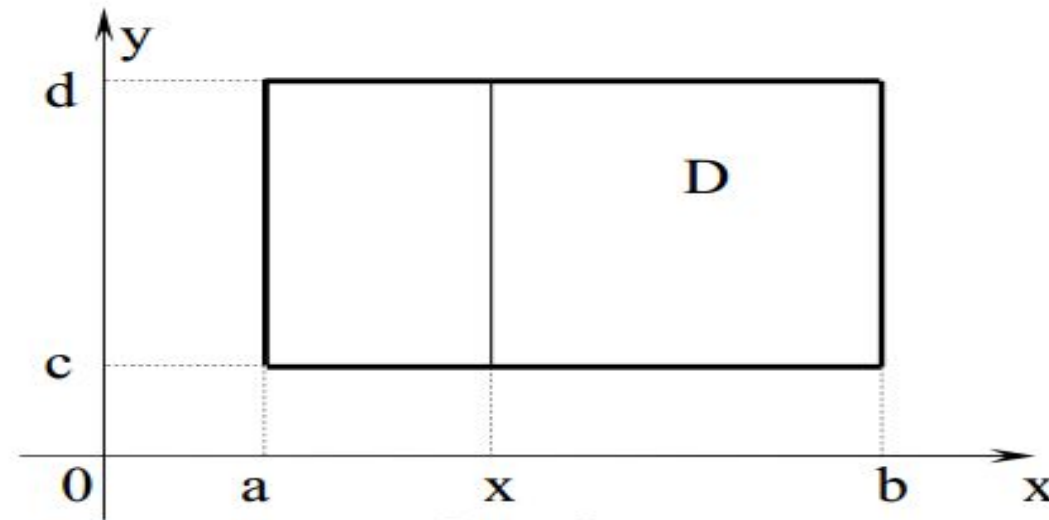


Рис. 2

В цьому випадку даний інтеграл обчислюється згідно з формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx .$$

інтегралом, його обчислюють наступним чином:

Спочатку при фіксованому $x \in [a, b]$ інтегрують по змінній y від c до d (тобто по прямій, що зображена на рис. 2 суцільною лінією всередині області D) функцію $f(x, y)$. Після підстановки меж інтегрування c та d одержують функцію, залежну лише від змінної x , яку й інтегрують на відрізку $[a, b]$, що є проекцією D на вісь OX . Використовуючи позначення

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad \text{попередню формулу записують в}$$

$$\text{простішому вигляді} \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad \text{Аналогічно,}$$

проектуючи область D на вісь OY , тобто інтегруючи $f(x, y)$ спочатку по змінній x а потім по y на відповідних відрізках, даний інтеграл обчислюють

за формулою $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$. Слід відзначити, що вибір

порядку інтегрування в повторному інтегралі може суттєво вплинути на складність його обчислення.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\iint_D y \sin 2x y dx dy$, де область D обмежена

прямими $y = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ (рис. 3).

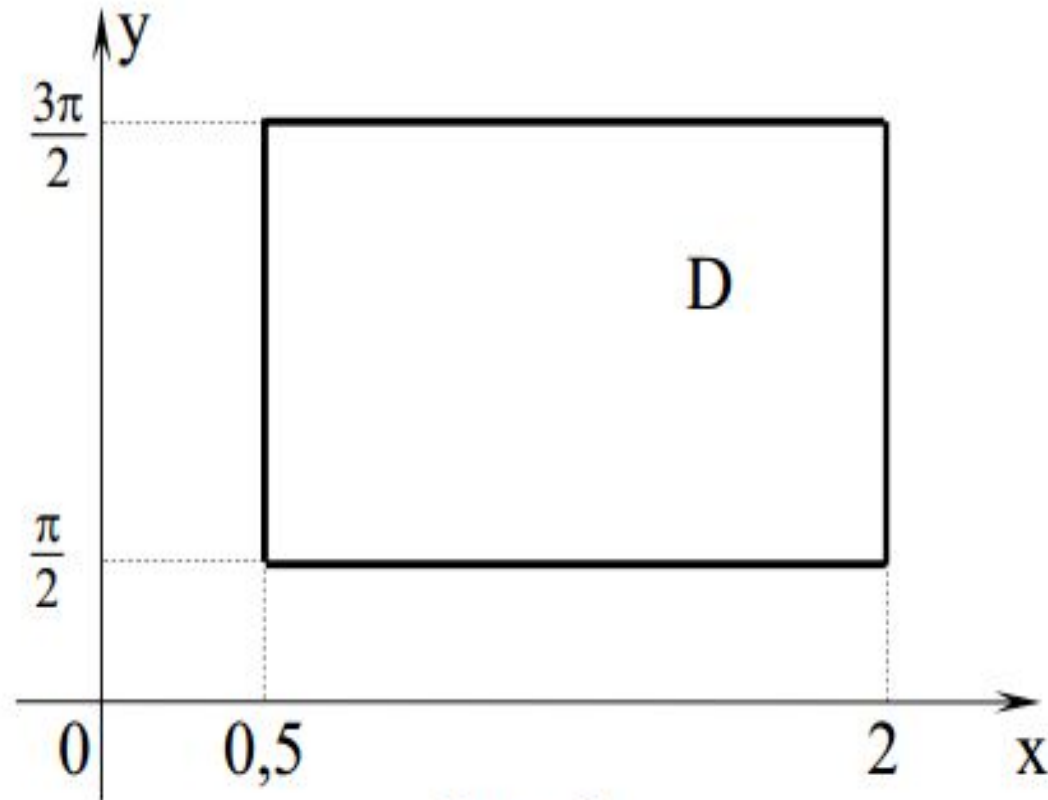


Рис. 3

Тут зручно область D , що має вигляд прямокутника, проектувати на вісь OY . При цьому підінтегральна функція, інтегруючись спочатку по змінній x від $x = \frac{1}{2}$ до $x = 2$ при фіксованому $y \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, значно спрощується (внаслідок скорочення на $y \neq 0$). Маємо:

$$\begin{aligned}\iint_D y \sin 2xy dx dy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^2 y \sin 2xy dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} y \left. \frac{-\cos 2xy}{2y} \right|_{\frac{1}{2}}^2 dy = \\&= -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2xy \Big|_{0,5}^2 dy = -\frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos 4y - \cos y) dy = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 4y}{4} - \sin y \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6\pi}{4} - \sin \frac{3\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} (0 + 1 - 0 + 1) = -1.\end{aligned}$$

б) Випадок криволінійної області.

Якщо область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$

має вигляд $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ (рис. 4), де функції

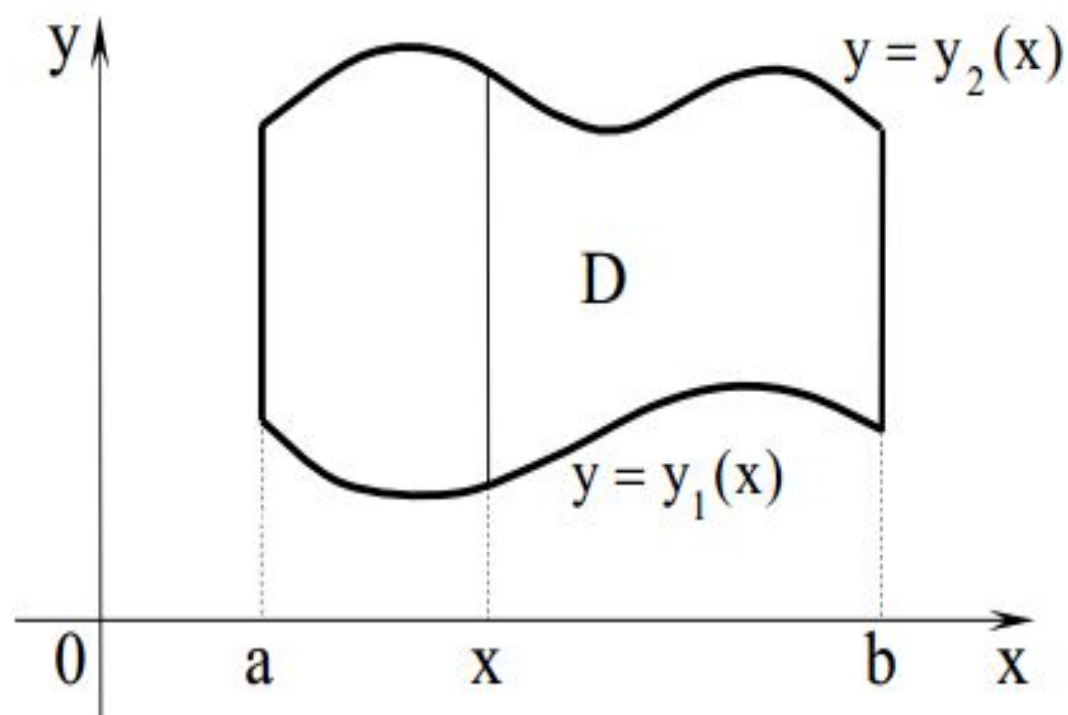


Рис. 4

$y = y_1(x)$ та $y = y_2(x)$ неперервні на $[a, b]$, проекцією D на вісь OX є відрізок $[a, b]$, то обчислення $\iint_D f(x, y) dx dy$ здійснюється за допомогою

формули $\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$. Тут, як і в попередньому

випадку, спочатку виконується інтегрування $f(x, y)$ по змінній y (x розглядається як параметр) та підстановка згідно з формулою Ньютона-Лейбніца у вираз для знайденої первісної замість аргумента y виразів $y_1(x)$, $y_2(x)$. Після цього обчислюється визначений інтеграл на відрізку $[a, b]$ від одержаної функції, залежної лише від x .

Аналогічно відбувається обчислення $\iint_D f(x, y) dx dy$ і тоді, коли область інтегрування D в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ має вигляд $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$. Тут функції $x = x_1(y)$ та $x = x_2(y)$ неперервні на $[c, d]$, проекцією D на вісь OY є відрізок $[c, d]$. Дана область показана на рис. 5.

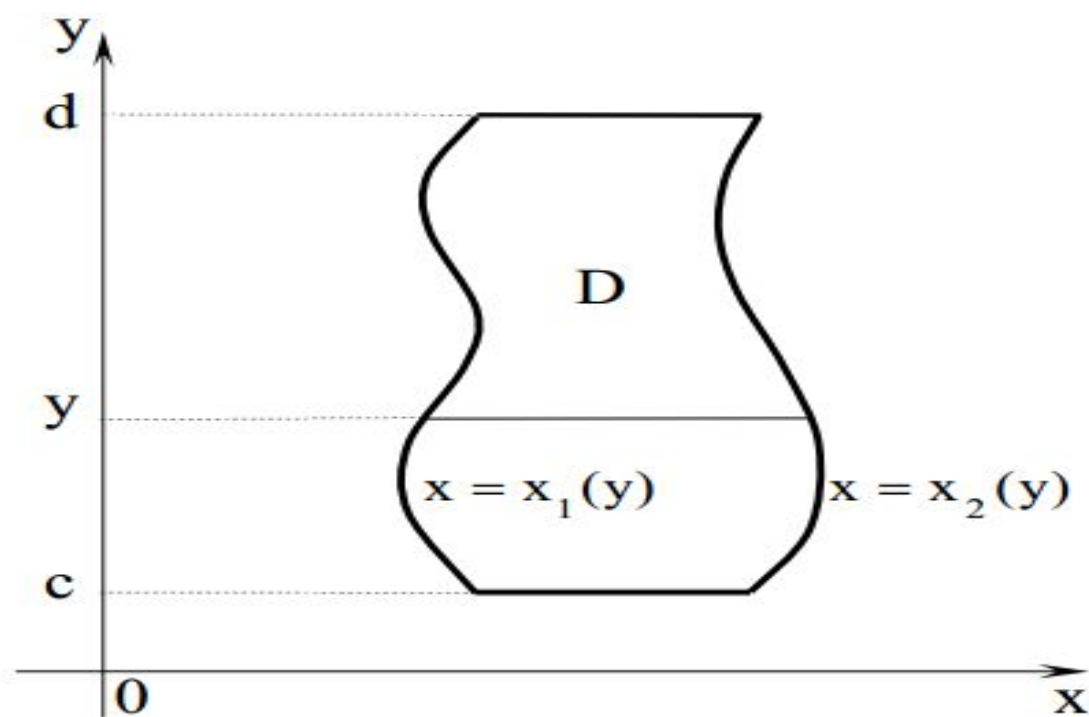


Рис. 5

Для такої області на відміну від попередньої, що зображена на рис 4, міняється порядок інтегрування в повторному інтегралі, формула для обчислення $\iint_D f(x, y) dx dy$ набуває наступного вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dx \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dy.$$

Зауважимо, що коли маємо довільну

область D , то її слід розбити на частини, подібні до зображених на рис. 4 та рис. 5, після чого для обчислення застосувати властивість адитивності подвійного інтеграла.

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

В першому доданку в повторному інтегралі розставлені межі інтегрування для області D_1 , а в другому – для D_2 , які обмежені лініями

$$D_1: \begin{cases} x = -\sqrt{3}, & y = \sqrt{4-x^2}, \\ x = -2, & y = 0, \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} x = 0, & y = 2 - \sqrt{4-x^2}, \\ x = -\sqrt{3}, & y = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що рівняння $y = \sqrt{4-x^2}$ описує верхню половину кола

$x^2 + y^2 = 4$, рівняння $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$ – нижню половину кола

$x^2 + (y-2)^2 = 4$, а всі інші рівняння описують прямі лінії, зображуємо D_1 та D_2 на координатній площині (рис. 6).

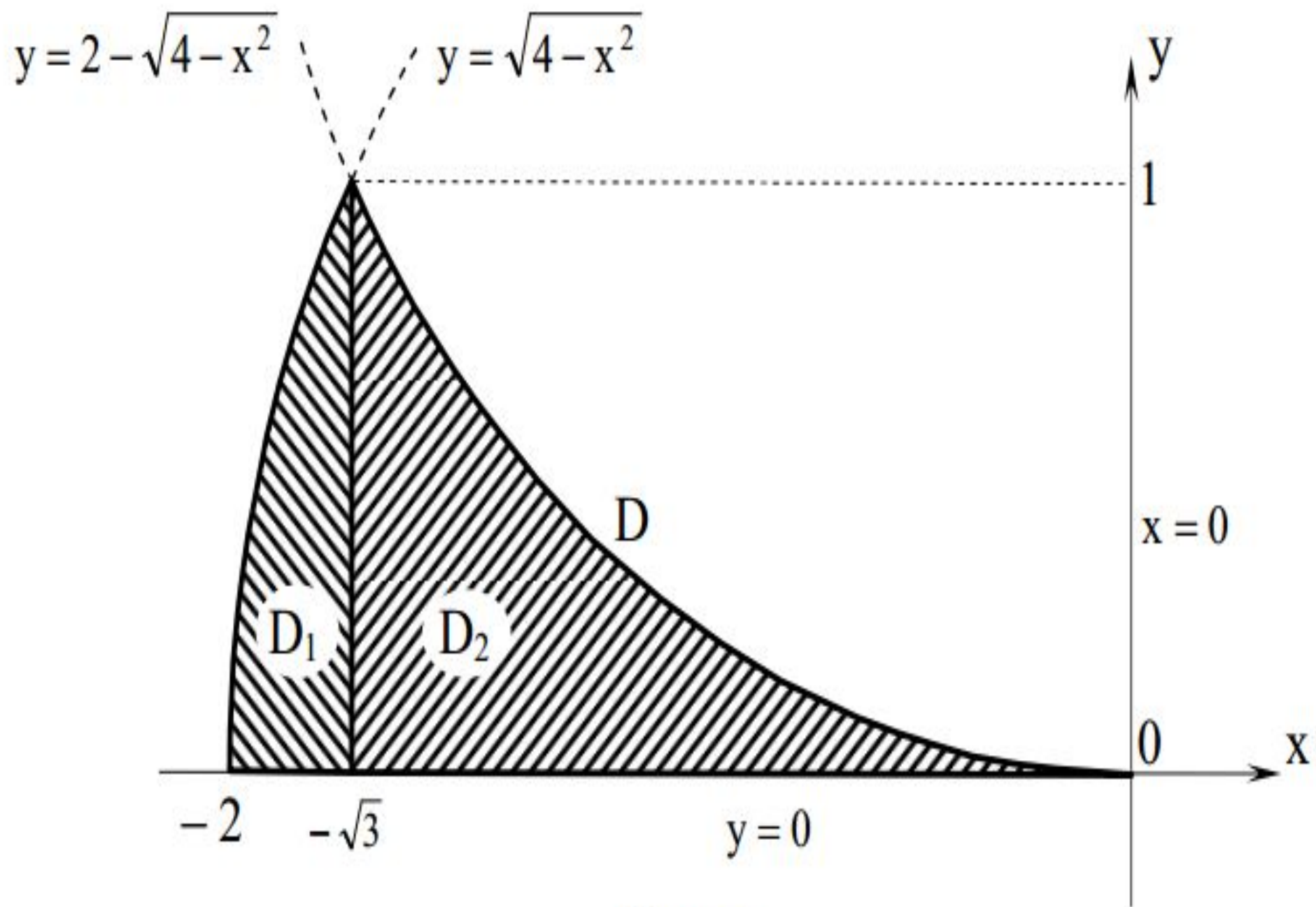


Рис. 6

D_1 та D_2 утворюють одну область D , яка проектується на вісь OY від $y = 0$ до $y = 1$. Ці значення й будуть межами інтегрування по змінній y . При кожному фіксованому значенні $y \in [0, 1]$, розв'язуючи рівняння $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, одержуємо відповідно нижню та верхню межі інтегрування по змінній x :

$$x = -\sqrt{4 - y^2} \quad (\text{ліва половина кола } x^2 + y^2 = 4),$$

$$x = -\sqrt{4 - (y - 2)^2} = -\sqrt{4y - y^2} \quad (\text{ліва половина кола } x^2 + (y - 2)^2 = 4).$$

Остаточно маємо

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x, y) dy.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint_D x dx dy$, де область D обмежена лініями

$$y = x + 2, \quad y = 2x + 4 - x^2.$$

Починаємо з рисунка області D , знайшовши абсциси $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ точок перетину M_1 , M_2 параболи $y = 2x + 4 - x^2$ та прямої $y = x + 2$ як розв'язки рівняння $x + 2 = 2x + 4 - x^2$. При цьому $y_1 = 1$, $y_2 = 4$ і отже парабола та пряма перетинаються в точках $M_1(-1, 1)$, $M_2(2, 4)$ (рис. 7).

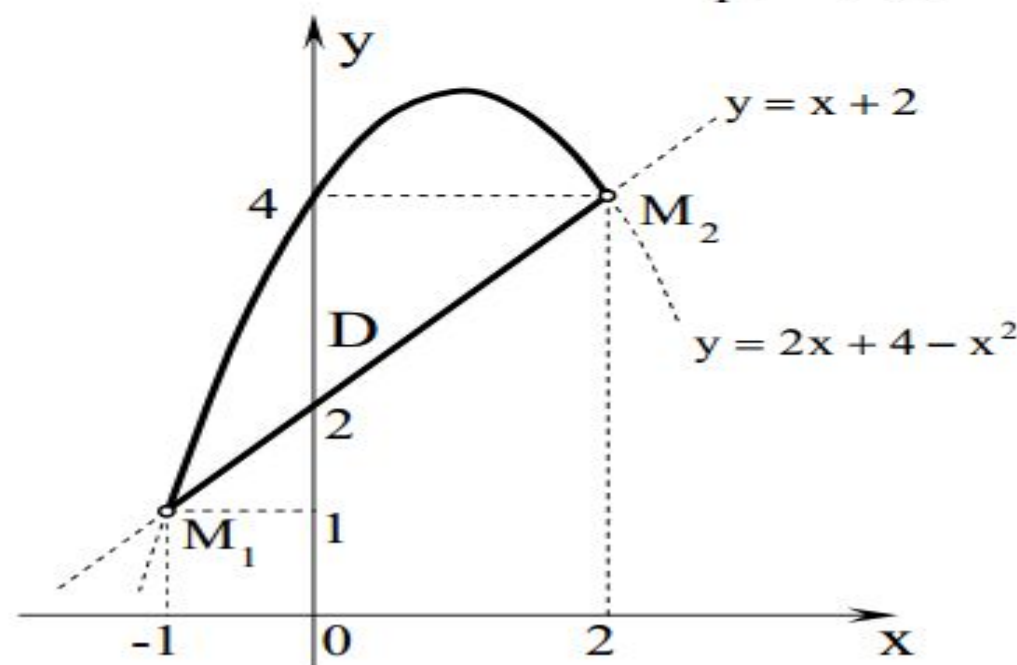


Рис. 7

Проекцією області D на вісь OX буде відрізок $[-1, 2]$, при цьому при фіксованому $x \in [-1, 2]$ інтегрування по змінній y здійснюється від $y = x + 2$ до $y = 2x + 4 - x^2$. Враховуючи це, маємо

$$\iint_D x dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_{x+2}^{2x+4-x^2} x dy = \int_{-1}^2 xy \Big|_{x+2}^{2x+4-x^2} dx = \int_{-1}^2 x(2x + 4 - x^2 - x - 2) dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (x^2 + 2x - x^3) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{8}{3} + 4 - 4 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}.$$

2.2 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Якщо область D обмежена колами або їх частинами та променями, що виходять з початку координат, то тоді обчислення інтеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ може бути простішим, коли від декартових координат x, y перейти до полярних ρ, φ (рис. 8) за допомогою формул

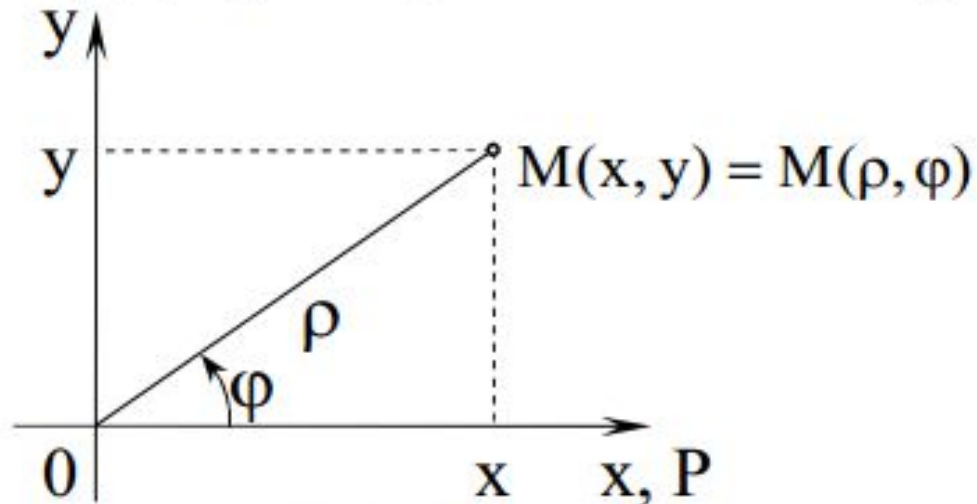


Рис. 8

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

При цьому $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi =$

$$\left[\begin{array}{ll} -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \end{array} \right.$$

а сама *формула переходу від прямокутних декартових координат до полярних* має вигляд

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Тут G – область, на яку відображається D за допомогою формул переходу від декартових координат до полярних і яка обмежена променями $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$ та кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, на які відображається границя D . Зображати область G не потрібно, можна обмежитись лише рисунком D та геометричною інтерпретацією полярних координат, даною на рис. 8

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iint_D y dx dy$, де область D обмежена лініями

$$y = x, y = 0, y = \sqrt{2x - x^2}, y = \sqrt{4x - x^2}.$$

Враховуючи, що криві $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = \sqrt{4x - x^2}$ описують верхні половини кіл $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, зображуємо область D на координатній площині XOY (рис. 9).

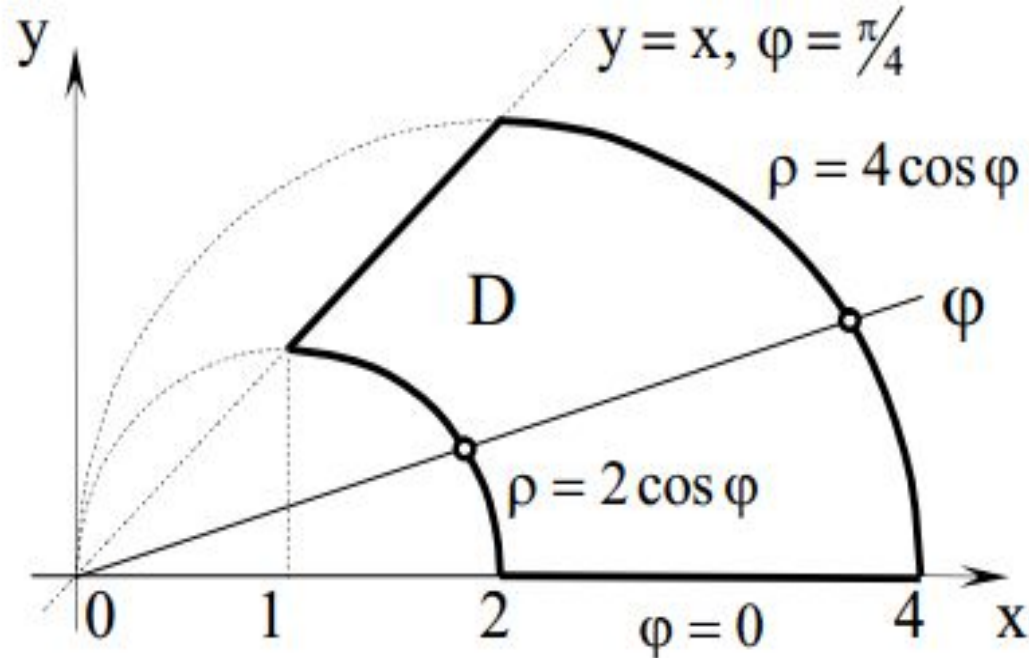


Рис. 9

Ця область розміщена між променями $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$ та частинами кіл $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, що в полярних координатах мають рівняння $\rho = 2 \cos \varphi$, $\rho = 4 \cos \varphi$. Отже, при кожному $\varphi \in [0, \pi/4]$ інтегрування по змінній ρ здійснюється від $\rho = 2 \cos \varphi$ до $\rho = 4 \cos \varphi$. Маємо

$$\iint_D y dx dy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho \sin\varphi \rho d\rho = \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \frac{\rho^3}{3} \Big|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \sin\varphi (64\cos^3\varphi -$$

$$- 8\cos^3\varphi) d\varphi = \frac{56}{3} \int_0^{\pi/4} \sin\varphi \cos^3\varphi d\varphi = -\frac{56}{3} \int_0^{\pi/4} \cos^3\varphi d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{14}{3} \cos^4\varphi \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{14}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - 1 \right) = -\frac{14}{3} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = \frac{7}{2}.$$

3. Застосування подвійного інтеграла до розв'язування геометричних задач

а) Обчислення площ плоских фігур.

Якщо плоска фігура зображується областю D на координатній площині XOY , то її площу S , як випливає з властивостей подвійного інтеграла, можна обчислити за допомогою формули $S = \iint_D dx dy$.

Приклад 5. Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена кривою $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

Запишемо рівняння кривої в полярних координатах

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = x^2 + y^2, \quad \rho^4 - 2\rho^4 \cos^2 x \sin^2 x = \rho^2,$$

$$\rho^2 (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi) = 1, \quad \rho^2 (1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\varphi)) = 1, \quad \rho^2 (3 + \cos 4\varphi) = 4,$$

$$\rho^2 = \frac{4}{3 + \cos 4\varphi}, \quad \rho = \frac{2}{\sqrt{3 + \cos 4\varphi}}.$$

Враховуючи періодичність з періодом $\frac{\pi}{2}$ функції $\cos 4\varphi$, будуємо графік заданої кривої в полярних координатах (рис. 10)

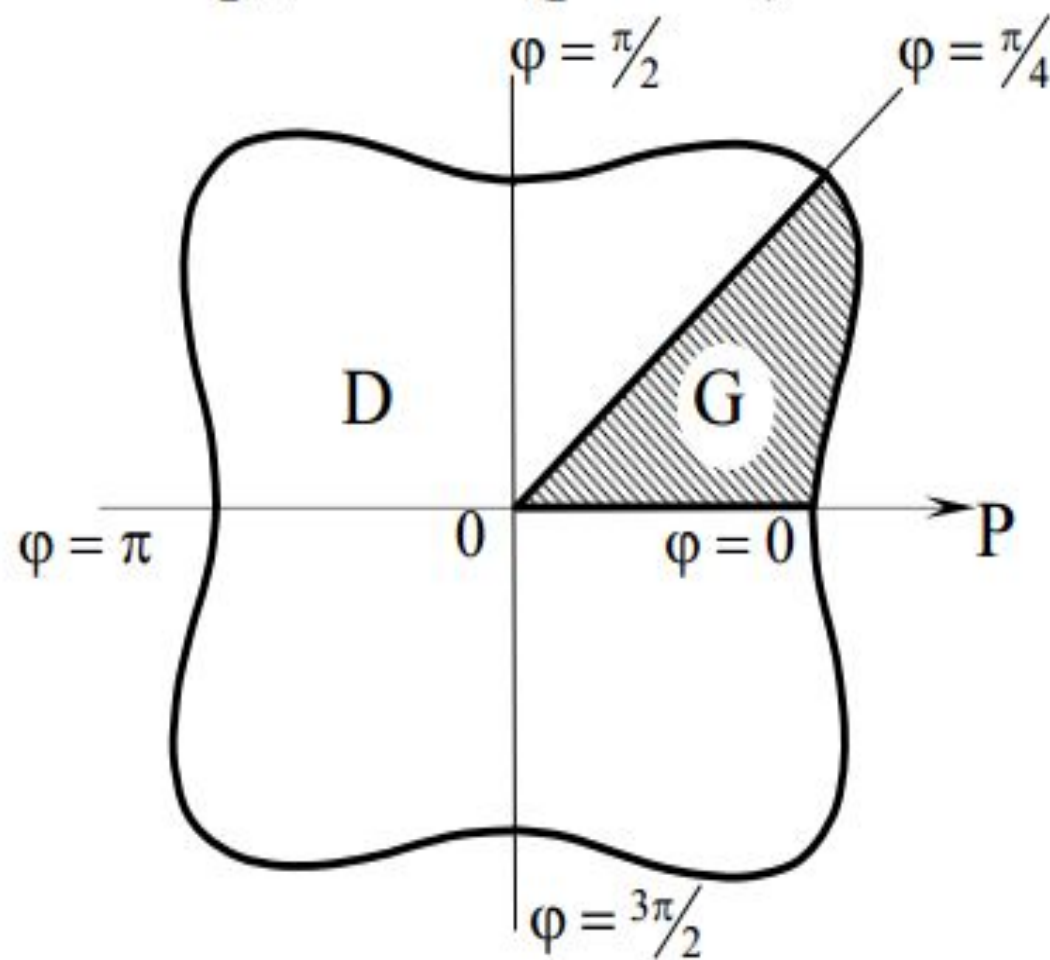


Рис. 10

Використовуючи симетричність фігури, зображеної на рис. 10, будемо обчислювати не всю її площу S , а лише восьму частину цієї площі (на рис. 10 – заштрихована), що допоможе уникнути труднощів при обчисленні відповідного інтеграла (доведеться робити заміну $t = \operatorname{tg} 2\varphi$, яка коректна

$$\begin{aligned} \text{при } \varphi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right). \text{ Отже, маємо } \frac{S}{8} &= \iint_G dx dy = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}} \rho d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \rho^2 \Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{4}{3+\cos 4\varphi} d\varphi = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\varphi = t, \quad d\varphi = \frac{dt}{2(1+t^2)}, \\ \varphi = \frac{\operatorname{arctg} t}{2}, \quad \cos 4\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot 2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ S &= 8 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}. \end{aligned}$$

б) Обчислення об'ємів тіл.

Якщо тіло обмежене знизу площиною $z = 0$, зверху – поверхнею $z = f(x, y)$, $f(x, y) > 0$, $(x, y) \in D$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ а напрямною служить границя області D (рис. 11),

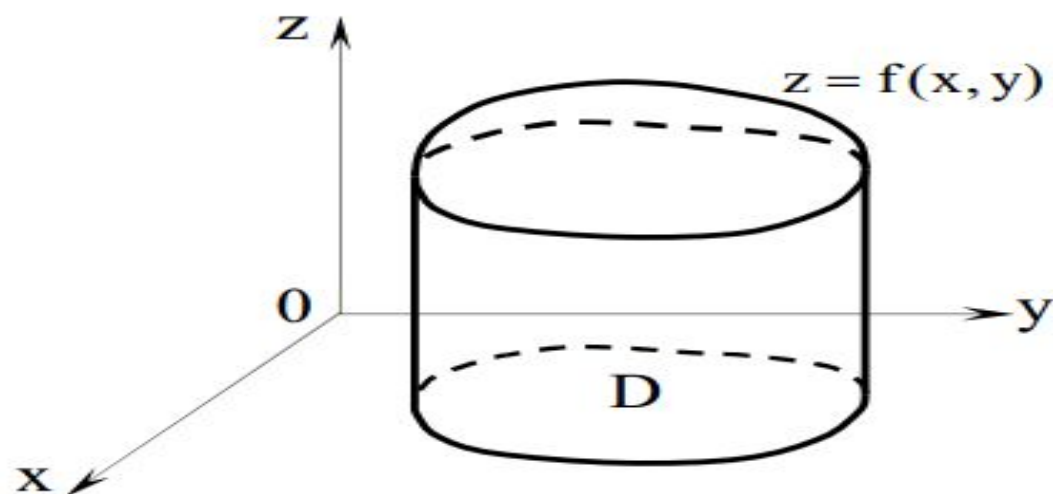


Рис. 11

то, як впливає з геометричної інтерпретації процесу утворення подвійного інтеграла, об'єм V такого тіла обчислюється за формулою $V = \iint_D f(x, y) dx dy$. При цьому область D є проекцією даного тіла на координатну площину XOY .

Приклад 6. Обчислити об'єм тіла, що обмежене поверхнями $x + y = 6$,

$$x = \sqrt{3y}, z = \frac{4x}{3}, z = 0.$$

Дане тіло обмежене зверху площиною $z = \frac{4x}{3}$, знизу – координатною площиною $z = 0$, а з боків – циліндричною поверхнею $x = \sqrt{3y}$ та площинами $x + y = 6$, $x = 0$. Останні три поверхні разом утворюють циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі OZ , та напрямною, яка є границею області D . Тут D – проекція даного тіла на координатну площину XOY , що має рівняння $z = 0$ (рис. 12, 13).

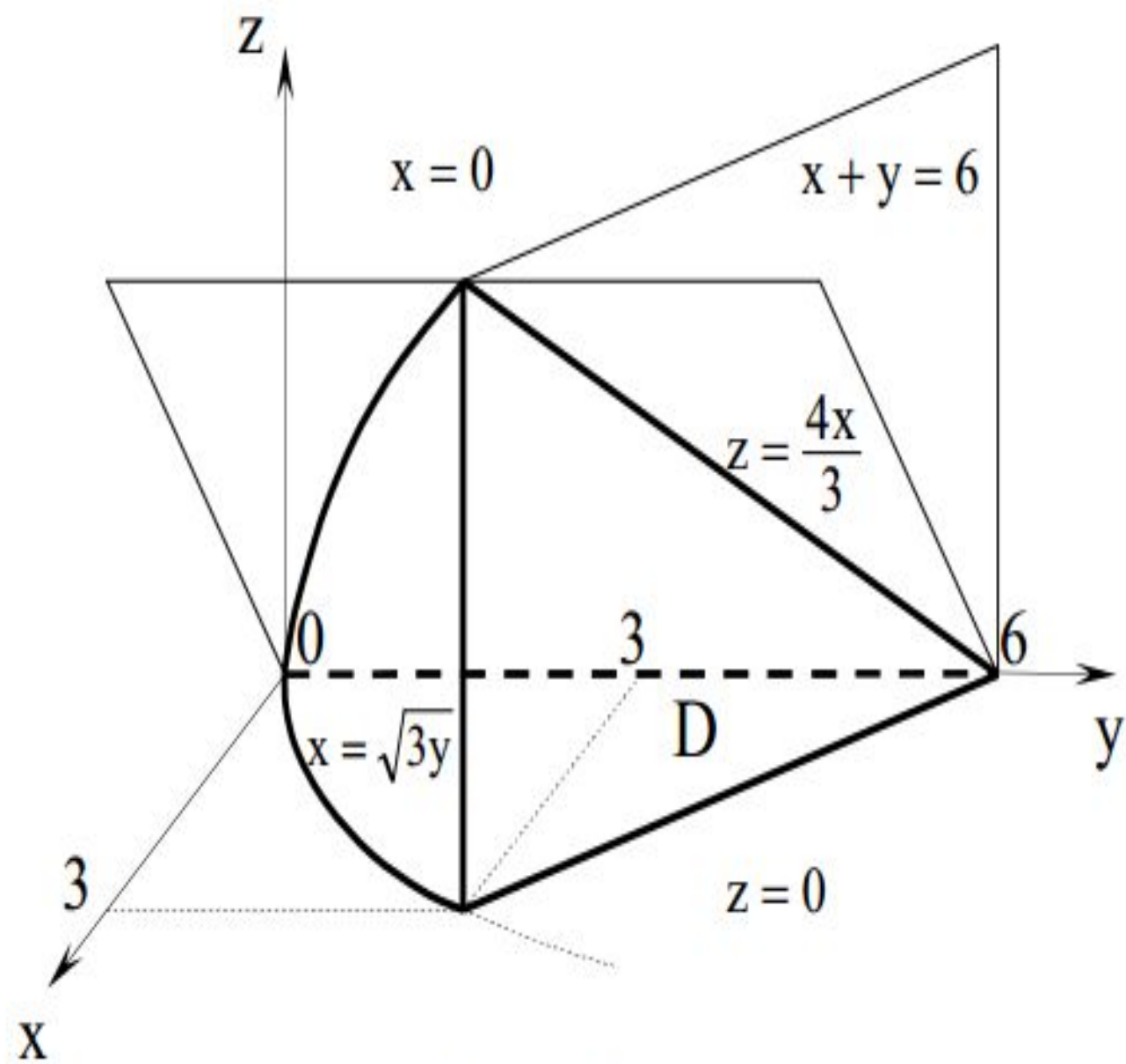


Рис. 12

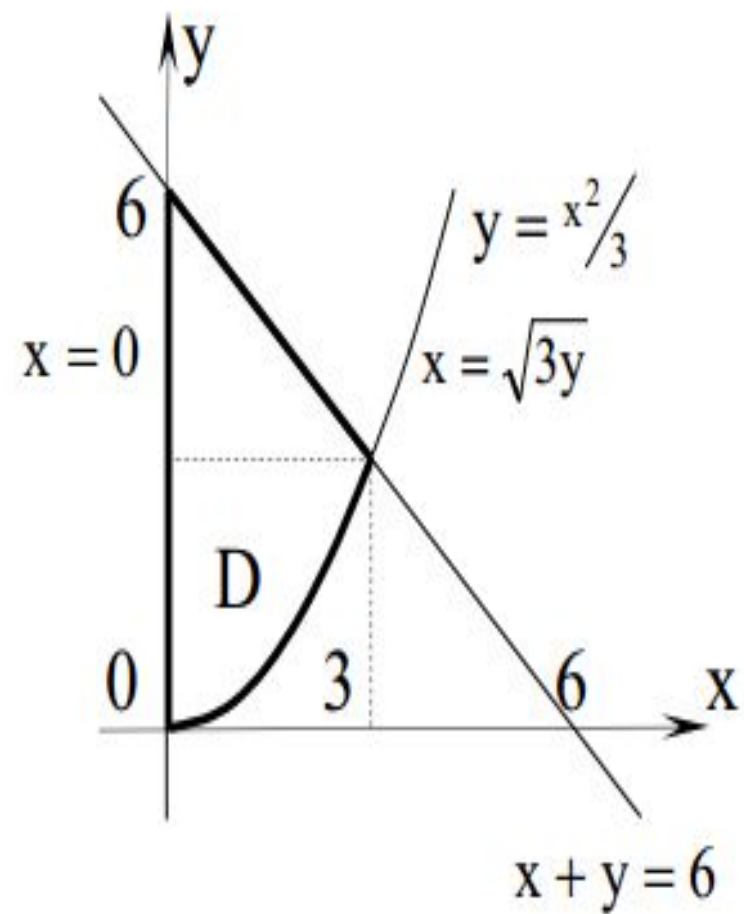


Рис. 13

Слід відзначити, що для обчислення об'єму V цього тіла можна було виконати лише рисунок області D , при достатньо розвиненій просторовій уяві та відповідних знаннях елементів аналітичної геометрії без рис. 12 можна обійтись. Згідно з рис. 13 вибираємо порядок інтегрування та розставляємо межі інтегрування в повторному інтегралі. Маємо,

враховуючи, що $x = \sqrt{3y}$ – рівняння правої частини параболи $y = \frac{x^2}{3}$

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \frac{4x}{3} dx dy = \frac{4}{3} \int_0^3 dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{6-x} x dy = \frac{4}{3} \int_0^3 xy \Big|_{\frac{x^2}{3}}^{6-x} dx = \frac{4}{3} \int_0^3 x \left(6 - x - \frac{x^2}{3} \right) dx = \\ &= \frac{4}{3} \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^3 = \frac{4}{3} \left(27 - 9 - \frac{27}{4} \right) = 24 - 9 = 15. \end{aligned}$$

с) Обчислення площ поверхонь.

Нехай поверхня явно задана рівнянням $z = z(x, y)$, де функція $z(x, y)$ є неперервною разом із частинними похідними $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в деякій області D (область D – проекція даної поверхні на координатну площину XOY). Тоді площа σ цієї поверхні обчислюється за формулою

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Приклад 7. Знайти площу σ частини поверхні $y^2 + z^2 = x^2$, що лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 14).

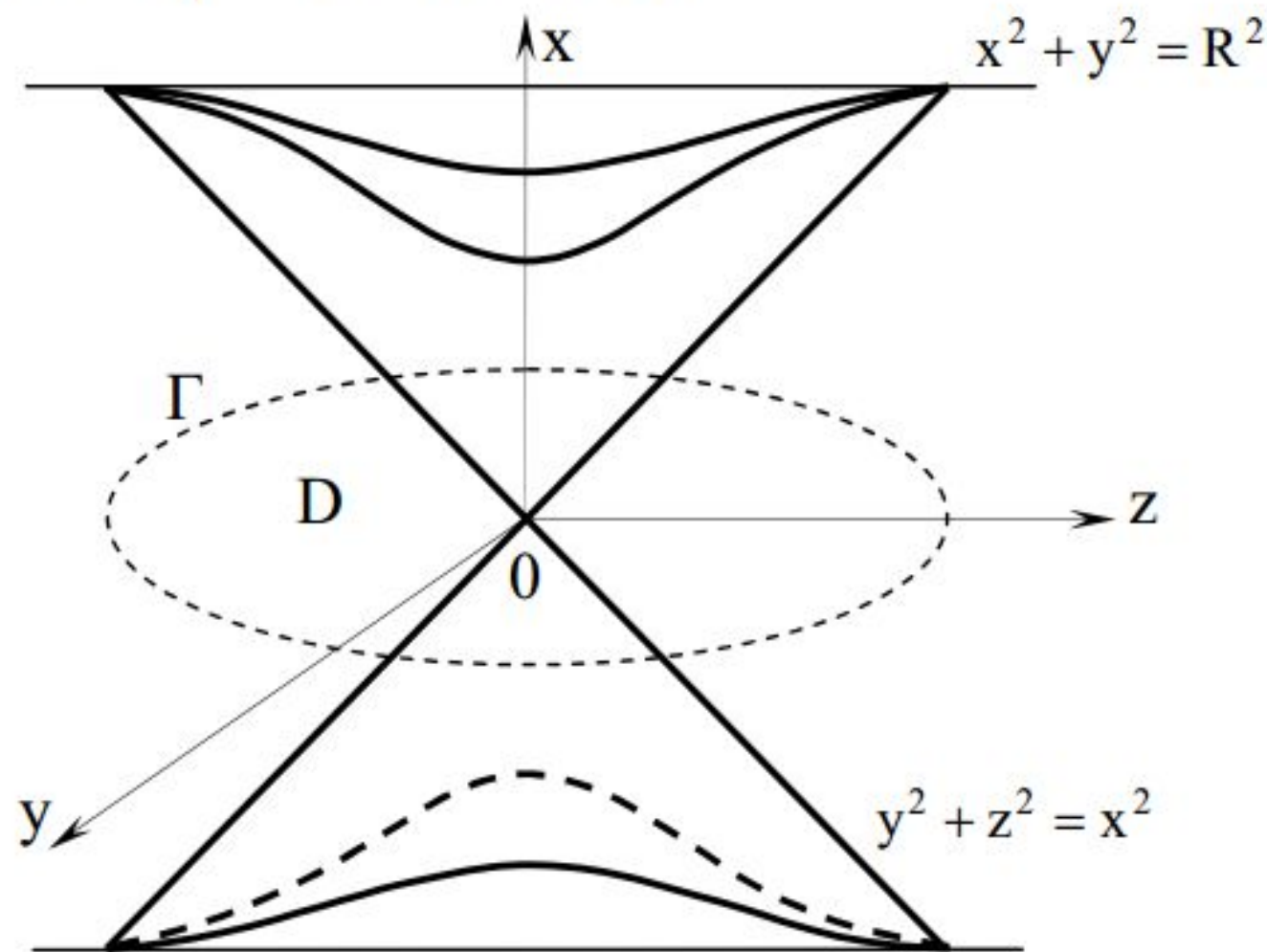


Рис. 14

Спроектуємо вказану частину поверхні на координатну площину YOZ. Цю проекцію позначимо через D, вона буде обмежена границею Γ , яка є проекцією лінії перетину поверхонь $y^2 + z^2 = x^2$, $x^2 + y^2 = R^2$. Криву Γ знаходимо, виключаючи з рівнянь $y^2 + z^2 = x^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ змінну x . В результаті одержуємо рівняння еліпса $z^2 + 2y^2 = R^2$. В просторі – це еліптичний циліндр, він і проектує лінію перетину поверхонь $y^2 + z^2 = x^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ на координатну площину YOZ. На область D з границею Γ проектуються дві однакові за площею частини конуса $y^2 + z^2 = x^2$, кожна з яких описується одним з двох

рівнянь $x = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$, тому
$$\sigma = 2 \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz. \quad \text{Тут}$$

$$x = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \quad \text{і отже}$$

$$\sigma = 2 \iint_D \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} dydz = 2 \iint_D \sqrt{2} dydz = 2\sqrt{2} \cdot S, \text{ де } S - \text{ площа}$$

D , обмеженої еліпсом $z^2 + 2y^2 = R^2$. Приводимо останнє рівняння до

канонічного вигляду $\frac{y^2}{\left(\frac{R^2}{2}\right)} + \frac{z^2}{R^2} = 1$, звідки випливає, що цей еліпс має

півосі $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$, $b = R$. Як відомо, площа S плоскої фігури, обмеженої

еліпсом з півосями a та b , обчислюється за формулою $S = \pi ab$, тому

остаточно одержуємо $\sigma = 2\sqrt{2} \cdot S = 2\sqrt{2}\pi \frac{R}{\sqrt{2}} R = 2\pi R^2$.

4. Потрійний інтеграл і його властивості

Розглянемо функцію трьох змінних $f(x, y, z)$, що визначена в деякій області D в просторі, і будемо вважати, що ця область має об'єм. Розіб'ємо довільним чином D на n частинних областей D_k ($k = 1, 2, \dots, n$) з об'ємами ΔV_k та виберемо в кожній з них довільно точки $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in D_k$.

Утворимо суму виду $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \Delta V_k$, яка називається *інтегральною сумою*, складеною для функції $f(x, y, z)$ при даному розбитті D на D_k та при даному виборі точок $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in D_k$. Введемо позначення $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{d_k\}$, де d_k визначається формулою

$$d_k = \sup_{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in D_k} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

та називається *діаметром* частинної області D_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Якщо існує скінченна границя при $\lambda \rightarrow 0$ утвореної інтегральної суми і ця границя не залежить ні від способу розбиття D на D_k , ні від способу вибору точок $(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \in D_k$, то ця границя і називається **потрійним інтегралом** від функції $f(x, y, z)$ по області D та позначається символом $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$. При цьому кажуть, що $f(x, y, z)$ є **інтегрованою** в D .

Отже згідно з означенням маємо

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \varsigma_k) \Delta V_k.$$

Зауважимо, що коли $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій області D , то вона буде також інтегрована в цій області.

Властивості потрійного інтеграла

Тут всі підінтегральні функції вважаються інтегрованими у відповідних областях, що мають об'єм

$$\text{a) } \iiint_D dx dy dz = V, \quad V - \text{об'єм } D,$$

$$\text{b) } \iiint_D C f(x, y, z) dx dy dz = C \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz, \quad C - \text{стала,}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iiint_D [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dx dy dz &= \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz + \\ &+ \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned}$$

$$\text{d) } \text{Якщо } D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset,$$

$$\text{то } \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz,$$

е) Якщо в області D виконується умова $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$, то

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_D g(x, y, z) dx dy dz,$$

ф) $\left| \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_D |g(x, y, z)| dx dy dz,$

г) Теорема про середнє. Якщо $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій, замкненій, зв'язній області D , то знайдеться принаймні одна точка

$$(x_0, y_0, z_0) \in D \text{ така, що } \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \leq f(x_0, y_0, z_0) \cdot V, \text{ де } V$$

– об'єм D .

Всі ці властивості повністю аналогічні відповідним властивостям подвійного інтеграла. Так само як і для подвійного інтеграла, властивості б) – с) називають властивостями *лінійності потрійного інтеграла*, а властивість д) – властивістю *адитивності*.

5.1. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена і неперервна в області D вигляду $D = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, де $z_1(x, y), z_2(x, y)$ – неперервні в області G , що має площу. В геометричній інтерпретації це означає, що область D обмежена знизу та зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y), (x, y) \in G$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ , а напрямною служить границя Γ області G на координатній площині XOY . Сама область G є проекцією D на координатну площину XOY (рис. 15).

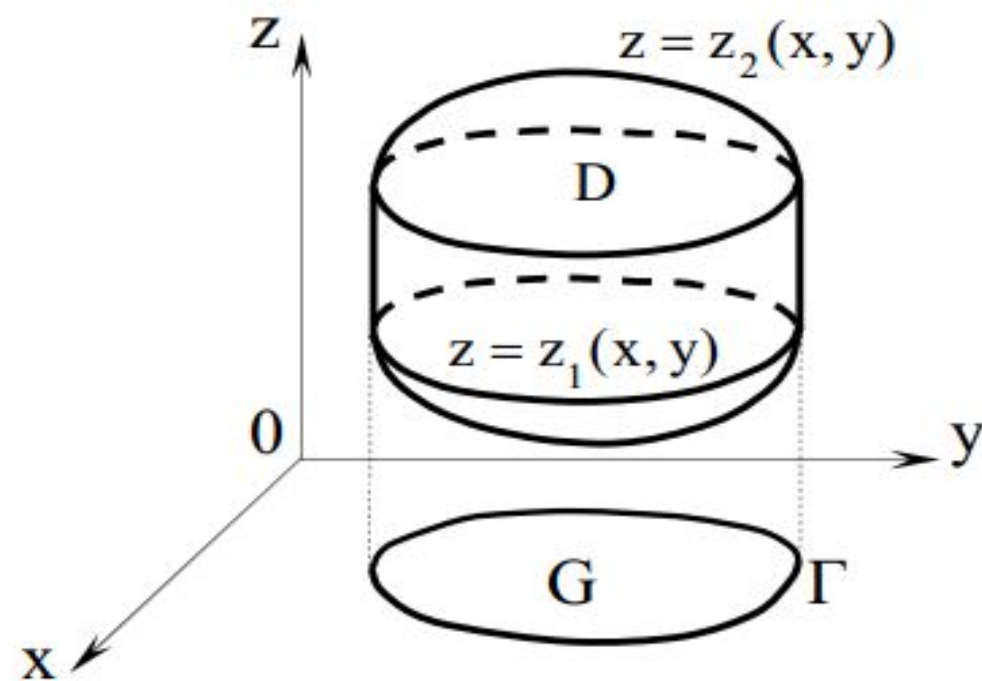


Рис. 15

При цих припущеннях для обчислення потрійного інтеграла

$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ застосовується формула:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Тут інтегрування в правій частині відбувається спочатку по змінній z при фіксованих $x, y \in G$, після чого згідно з формулою Ньютона-Лейбніца виконується підстановка від $z = z_1(x, y)$ до $z = z_2(x, y)$. Одержану таким чином функцію, залежну лише від аргументів x та y , інтегрують по області G згідно з відповідними формулами для обчислення подвійного інтеграла.

Якщо область D має складніший вигляд, ніж зображений на рис. 15, її слід розбити на частини, до кожної з яких можна застосувати наведену формулу, після чого застосувати властивість адитивності потрійного інтеграла.

Приклад 1. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D 21xz dx dy dz$, якщо область

D обмежена поверхнями $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = xy$, $z = 0$.

В даному випадку немає необхідності рисувати область D в просторі, так як очевидно, що вона обмежена знизу поверхнею $z = 0$, зверху – поверхнею $z = xy$, а з боків – циліндричною поверхнею, утвореною площинами $y = x$, $y = 0$, $x = 2$. При цьому за напрямну слід взяти замкнену лінію (контур) Γ на координатній площині XOY , яка утворена лініями перетину даних площин з цією координатною площиною та мають на ній рівняння $y = x$, $y = 0$, $x = 2$. Проекцією D на координатну площину XOY буде область G , що обмежена контуром Γ (рис. 16).

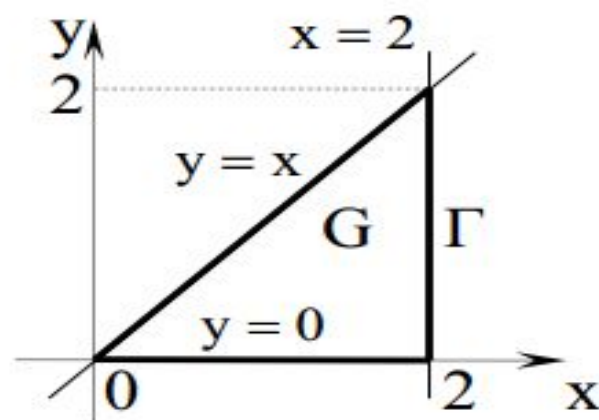


Рис. 16

Враховуючи це, згідно з формулами для обчислення потрійного та подвійного інтегралів, маємо

$$\begin{aligned}
 \iiint_D 21xz dx dy dz &= 21 \iint_G dx dy \int_0^{xy} xz dz = 21 \iint_G x \frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} dx dy = \\
 &= \frac{21}{2} \iint_G x(x^2 y^2 - 0) dx dy = \frac{21}{2} \iint_G x^3 y^2 dx dy = \frac{21}{2} \int_0^2 dx \int_0^x x^3 y^2 dy = \\
 &= \frac{21}{2} \int_0^2 x^3 \frac{y^3}{3} \Big|_0^x dx = \frac{7}{2} \int_0^2 x^3 (x^3 - 0) dx = \frac{7}{2} \frac{x^7}{7} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^7 = 64.
 \end{aligned}$$

5.2. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах

Циліндричні координати ρ , φ , z довільної точки M у просторі зв'язані з її декартовими координатами x , y , z за допомогою співвідношень

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad 0 \leq \rho < +\infty, \varphi \in [0, 2\pi], -\infty < z < +\infty.$$

Геометрична інтерпретація циліндричних координат та їх зв'язок з декартовими показана на рис. 17.

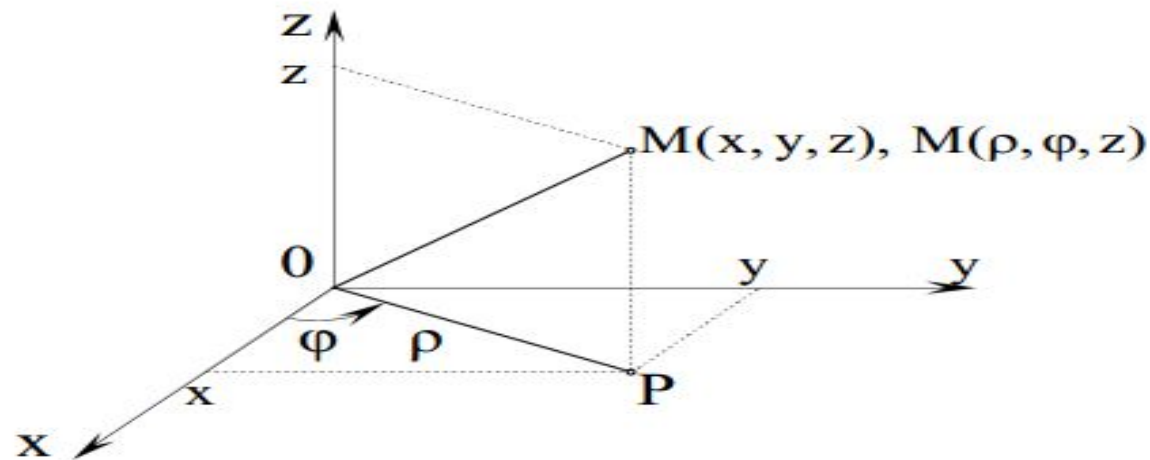


Рис. 17

Перехід від декартових координат до циліндричних полягає в переході до полярних координат на координатній площині XOY для проекції P точки M при незмінній координаті z . Звідси випливає наступна формула переходу від декартових координат до циліндричних для обчислення потрібного інтеграла у випадку, коли область інтегрування D має вигляд, зображений на рис. 15

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \iint_Q \rho d\rho d\varphi \int_{z_1(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}^{z_2(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz. \end{aligned}$$

Тут G – проекція D на координатну площину XOY , Q – область, на яку відображається G при переході від декартових координат до полярних на цій координатній площині. Після інтегрування по змінній z одержуємо подвійний інтеграл у полярних координатах. Зауважимо, що при його обчисленні через повторні інтеграли підінтегральну функцію слід, як правило, спочатку інтегрувати по змінній ρ , а потім після застосування формули Ньютона-Лейбніца завершити інтегрування одержаного виразу по змінній φ . Для спрощення процесу інтегрування перехід до полярних координат на координатній площині XOY слід здійснювати не відразу, а після завершення інтегрування по змінній z та одержання подвійного інтеграла у декартових координатах. В ряді випадків (коли область G є криволінійним сектором, обмеженим променями, що виходять з початку координат, та еліпсами $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ або їх частинами) доцільно переходити

на координатній площині XOY до узагальнених полярних координат

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \rho < +\infty, \varphi \in [0, 2\pi],$$

що рівнозначно переходу в потрібному інтегралі до узагальнених циліндричних координат. При цьому геометрична інтерпретація φ залишається тією ж, рівняння еліпса переходить у рівняння $\rho = 1$, а попередня формула набуває вигляду

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \iint_Q ab\rho d\rho d\varphi \int_{z_1(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi)}^{z_2(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi)} f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi, z) dz. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D x^2 dx dy dz$, якщо область D

обмежена поверхнями $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, $z = 0$, $z = y$.

В даному випадку область D обмежена знизу площиною $z = 0$, зверху – площиною $z = y$, а з боків – циліндричною поверхнею $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$, твірні якої паралельні осі OZ а напрямною служить крива, що має рівняння

$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ на координатній площині XOY . Це – рівняння верхньої половини еліпса $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ з півосями $a = 3$, $b = 1$, отже проекцією D на координатну площину XOY буде область G на цій площині, що обмежена кривою $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ та прямою $y = 0$ – лінією перетину площин $z = 0$ та $z = y$ (рис. 18)

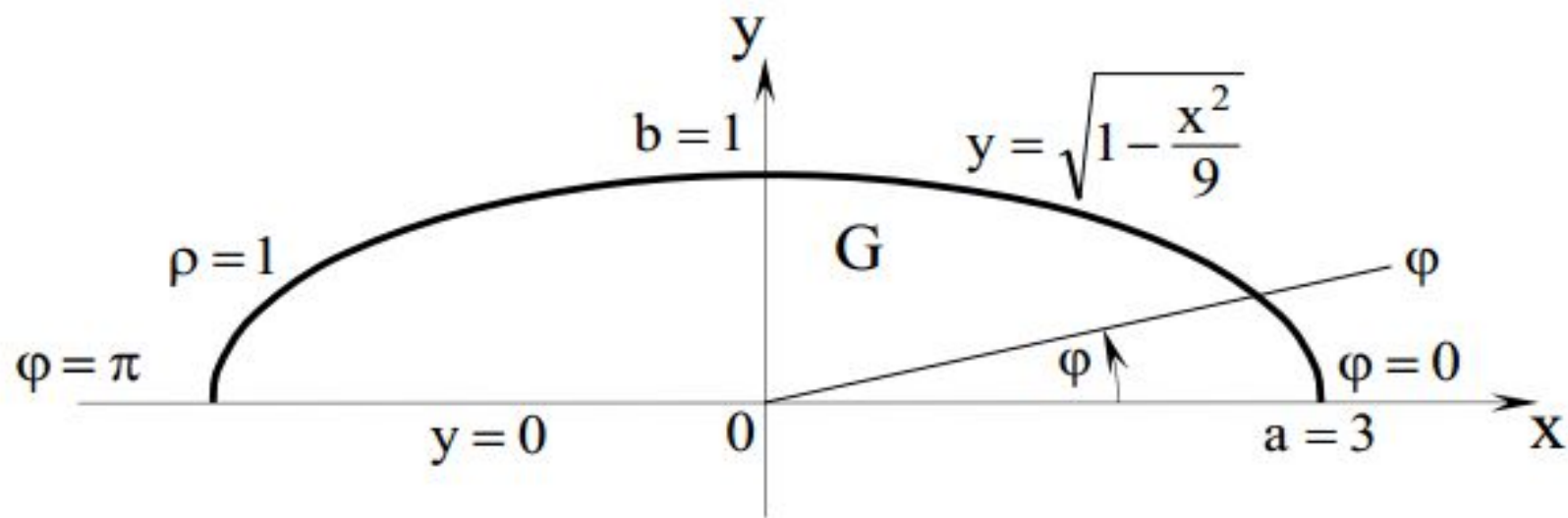


Рис. 18

Так як G обмежена двома променями, що виходять з початку координат під кутами $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$ і верхньою половиною еліпса з півосями $a = 3$ $b = 1$, то при обчисленні даного інтеграла доцільно перейти до

узагальнених циліндричних координат
$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi]. \text{ Для}$$

довільного кута $\varphi \in [0, \pi]$ нижньою межею інтегрування по змінній ρ буде значення $\rho = 0$. Щоб знайти значення верхньої межі інтегрування по цій змінній, слід у канонічному рівнянні еліпса $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ перейти до узагальнених полярних координат ρ та φ у відповідності з формулами
$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi].$$
 Одержимо рівняння еліпса $\rho = 1$ в цих координатах, звідки випливає, що верхньою межею інтегрування по змінній ρ буде значення $\rho = 1$. Враховуючи все це, послідовно одержуємо

$$\begin{aligned} \iiint_D x^2 dx dy dz &= \iint_G dx dy \int_0^y x^2 dz = \iint_G x^2 z \Big|_0^y dx dy = \iint_G x^2 y dx dy = \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 9\rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho \sin \varphi \cdot 3 \cdot 1 \cdot \rho d\rho = 27 \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho = \\ &= -27 \int_0^\pi \cos^2 \varphi d(\cos \varphi) \cdot \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^1 = -\frac{27}{5} \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^\pi = -\frac{9}{5} (-1 - 1) = \frac{18}{5}. \end{aligned}$$

5.3. Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах

У випадках, коли область D обмежена сферичними поверхнями та, можливо, конічними поверхнями і площинами, що проходять через координатні осі, спрощення процесу обчислення потрійного інтеграла можливе за допомогою переходу від декартових координат x, y, z до сферичних ρ, φ, θ , які зв'язані співвідношеннями

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, & 0 \leq \rho < +\infty, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi]. \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

Геометрична інтерпретація сферичних координат та їх зв'язку з декартовими показана на рис. 19.

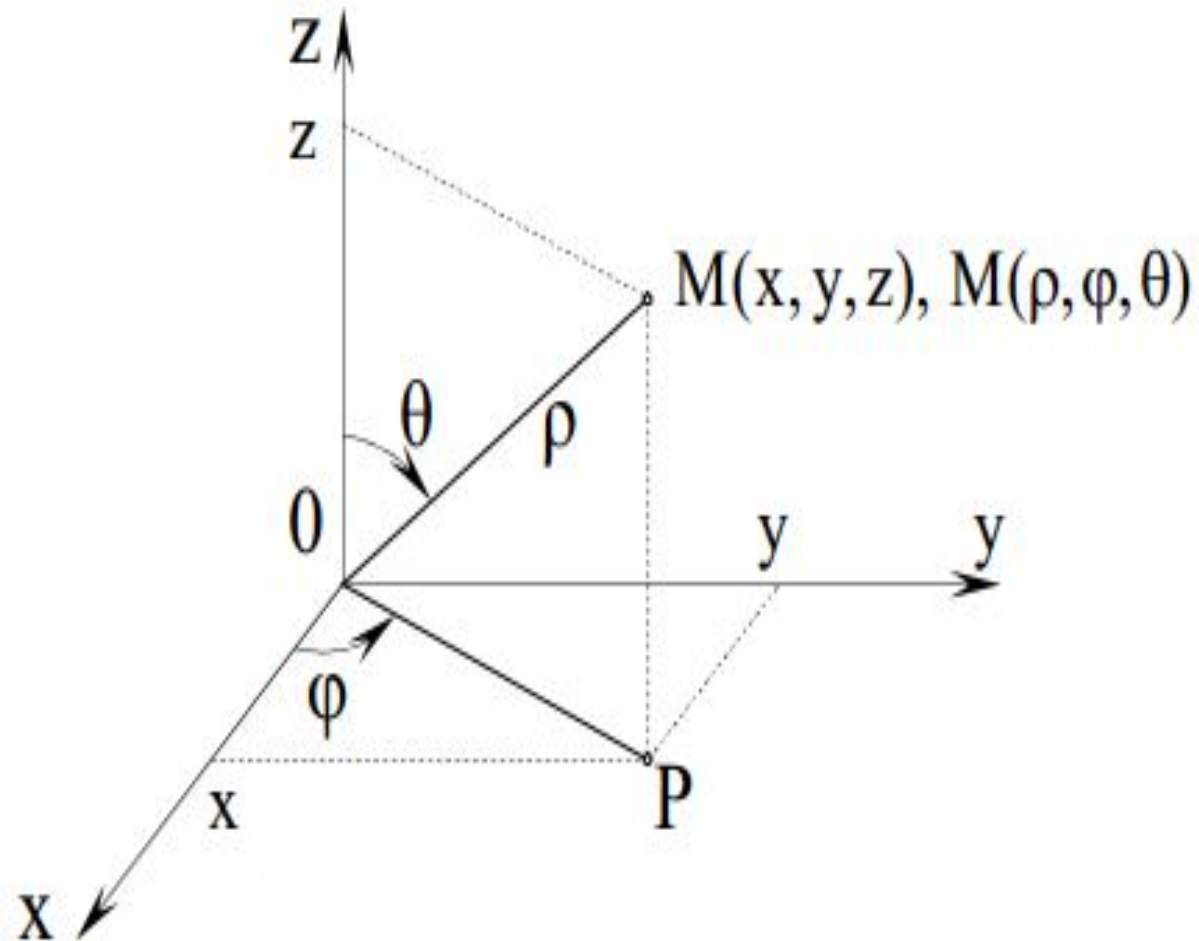


Рис. 19

Перехід від декартових координат до сферичних для обчислення

потрійного інтеграла $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz$ здійснюється у відповідності з

формулою: $\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz =$

$$= \iiint_G f(\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Тут G – область, на яку відображається D при переході від декартових координат до сферичних. Цю область можна не рисувати, а обмежитись зображенням області D та геометричною інтерпретацією сферичних координат.

Приклад 2. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint_D \frac{x^2 + y^2}{z^2} dx dy dz$, якщо

область D обмежена поверхнями $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$ (рис. 20).

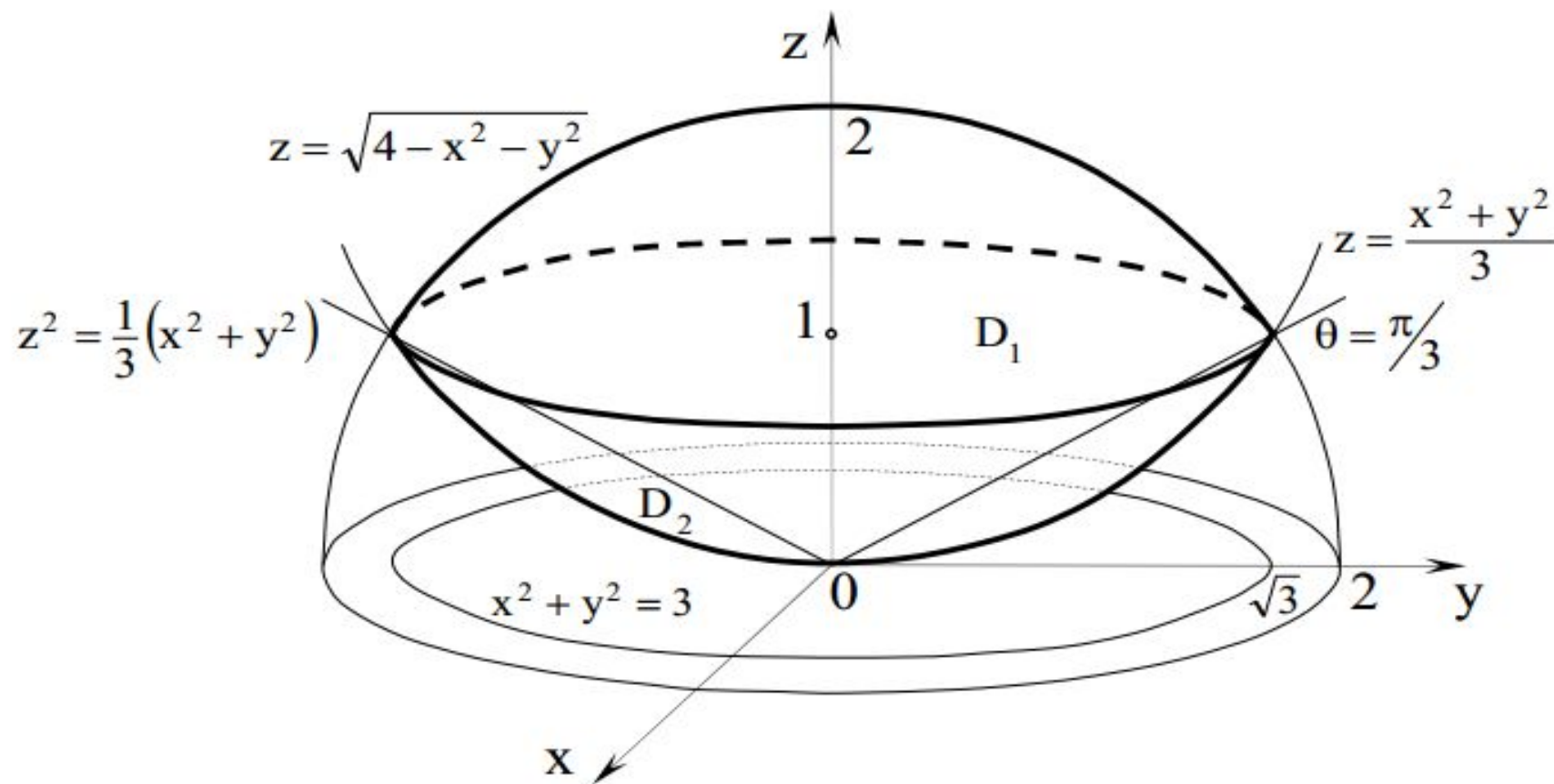


Рис. 20

Знаходимо спочатку лінію перетину верхньої половини сфери

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \text{ та параболоїда обертання } z = \frac{x^2 + y^2}{3}$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \frac{x^2 + y^2}{3}, \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 3z, \\ z \geq 0, \end{cases} \begin{cases} z^2 + 3z - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 = 3z, \\ z \geq 0, \end{cases} \begin{cases} z = 1, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$$

Цю лінію можна розглядати як лінію перетину циліндра з твірними, паралельними осі OZ та напрямною $x^2 + y^2 = 3$, що лежить на координатній площині XOY . Проведемо через кожну з точок $(0, \sqrt{3}, 1)$ і $(0, -\sqrt{3}, 1)$ на знайденій лінії перетину та через початок координат пару прямих $3z^2 = y^2$. Якщо обертати ці прямі навколо осі OZ , одержимо конус обертання, який має рівняння $z^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ і який має зі сферичною поверхнею ту ж саму лінію перетину. В сферичних координатах рівняння конуса набуває вигляду $\rho^2 \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \rho^2 \sin^2 \theta$, або $\theta = \frac{\pi}{3}$. Цей конус ділить область D на дві частини – D_1 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$) та D_2 ($\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), тому внаслідок властивості адитивності ми можемо записати

$$\iiint_D \frac{x^2 + y^2}{z^2} dx dy dz = \iiint_{D_1} \frac{x^2 + y^2}{z^2} dx dy dz + \iiint_{D_2} \frac{x^2 + y^2}{z^2} dx dy dz.$$

Переходимо тепер в правій частині до сферичних координат, враховуючи, що в цих координатах рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ та параболоїда

обертання $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$ матимуть відповідно наступний вигляд: $\rho = 2$,

$\rho = \frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta}$. Тому на основі геометричної інтерпретації сферичних

координат і рис. 20 одержуємо

$$\iiint_D \frac{x^2 + y^2}{z^2} dx dy dz = \int_0^{\pi/3} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta} \rho^2 \sin \theta d\rho +$$

$$+ \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta}} \frac{\rho^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta} \rho^2 \sin \theta d\rho = 2\pi \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho +$$

$$+ 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \int_0^{\frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta}} \rho^2 d\rho = -2\pi \int_0^{\pi/3} \frac{(1 - \cos^2 \theta) d(\cos \theta)}{\cos^2 \theta} d\theta \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 +$$

$$+ 2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\frac{3 \cos \theta}{\sin^2 \theta}} d\theta = -\frac{16\pi}{3} \left(-\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) \Big|_0^{\pi/3} +$$

$$+ \frac{2\pi}{3} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{27 \cos^3 \theta}{\sin^6 \theta} d\theta = -\frac{16\pi}{3} \left(-2 - \frac{1}{2} + 1 + 1 \right) + 18\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{d(\sin \theta)}{\sin^3 \theta} d\theta =$$

$$= \frac{8\pi}{3} + 18\pi \frac{1}{-2 \sin^2 \theta} \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \frac{8\pi}{3} - 9\pi \left(1 - \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{3} + 3\pi = \frac{17\pi}{3}.$$