

Лекція 5

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЯКОСТІ ОБСЛУГОВУВАННЯ ВИКЛИКІВ У ПОВНІСТЮ ДОСТУПНИХ СРІ

Основні питання

1. Постановка задачі
2. Вирішення задач аналізу СРІ з використанням математичного апарата марківських процесів
3. Застосування процесів загибелі й народження для аналізу СРІ

Постановка задачі

- Будемо вважати, що повністю доступна СРІ з v приладами обслуговує виклики, які утворюють симетричний потік з простою післядією з параметром λ_i , $i = \overline{0, n}$. Тривалість обслуговування виклику приладом СРІ є випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом, і характеризується параметром обслуговування μ .
- Слід визначити ймовірності станів СРІ p_i , $i = \overline{0, n}$, які розрізняються числом зайнятих приладів системи або числом викликів у черзі.

Вирішення задач аналізу СРІ з використанням математичного апарата марківських процесів

- Позначимо через $S(t)$ число викликів, що перебувають у системі в момент часу t . Воно є випадковою величиною, що змінюється у часі. Тому $S(t)$ – випадковий процес із кінцевою множиною значень $S(t) = 0, 1, 2, \dots, n$.
- Таким чином, процес $S(t)$ визначає стан СРІ і приймає $(n + 1)$ -е значення. Можна показати, що процес $S(t)$ є марківським.
- **Марківським** називається такий випадковий процес, у якому для будь-якого моменту часу ймовірність будь-якого значення в майбутньому залежить тільки від значення процесу $S(t)$ в даний момент і не залежить від попередніх значень цього процесу.

- Марківським процес $S(t)$ є тому, що моменти надходження нових викликів визначаються потоком вхідних викликів і не залежать від стану системи в моменти часу, що передують моменту часу t . Крім того, від плину процесу до моменту часу t не залежать і моменти закінчення викликів (властивість експоненціального розподілу тривалості обслуговування).
- При викладенні теорії випадкових процесів з дискретними станами використовуються орієнтовані графи станів процесів (станів систем). На цих графах вершини зображуються кружечками, у які вписуються стани системи, а дуга, проведена з вершини S_i у вершину S_j , означає можливість переходу з одного стану в інший (рис. 1).



Рисунок 1 – Приклад орієнтованого графу станів системи

- Прийнято вважати , що перехід системи зі стану S_i у стан S_j здійснюється під впливом пуассонівського потоку з інтенсивністю $a_{ij}(t)$. Тоді ймовірність переходу зі стану S_j в стан S_i за малий інтервал часу

$$p_{ij}(t, t + \tau) = a_{ij}(t) \cdot \tau + o(\tau) \quad , \quad (1)$$

- де $o(\tau)$ - величина меншого порядку порівняно з τ .

- Марківський випадковий процес с дискретними станами і неперервним часом називається однорідним, якщо ймовірність переходу зі стану S_i в стан S_j за час τ не залежить від того, в який момент часу t система знаходилася в стані S_i , а залежить тільки від величини τ :

$$p_{ij}(t, t + \tau) = p_{ij}(\tau) \quad (2)$$

- Для однорідного процесу Маркова

$$p_{ij}(t, t + \tau) = a_{ij} \cdot \tau + o(\tau).$$

- У цьому випадку можуть використовуватися розмічені орієнтовані графи станів системи (рис. 2).

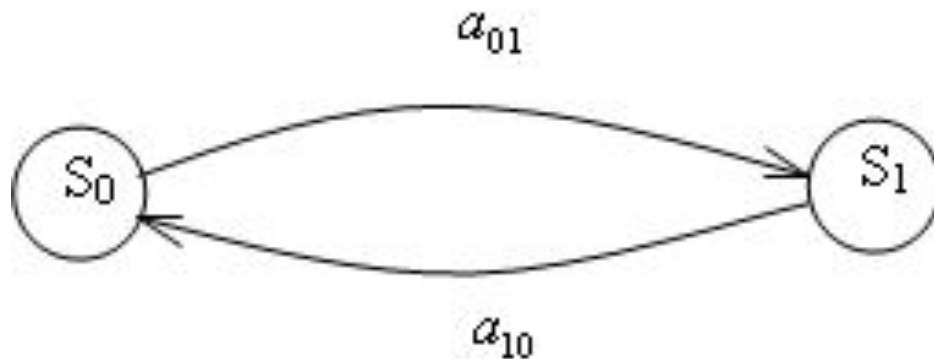


Рисунок 2 – Приклад розміченого орієнтованого графа станів системи

Розглянемо систему, що має $n + 1$ можливих станів

$S_0, S_1, \dots, S_i, \dots, S_n$. Нехай $p_i(t)$ – імовірність того, що в момент часу t система перебуває у стані S_i .

- Можна показати, що якщо ймовірності переходів $p_{ij}(t, t + \tau)$ задовольняють співвідношенню (1), то **ймовірності станів марківського процесу підкоряються системі диференціальних рівнянь Колмогорова**

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n p_j(t) \cdot a_{ji}(t) - p_i(t) \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n a_{ij}(t) \quad , \quad i = 0, \dots, n \quad (3)$$

- При складанні рівнянь Колмогорова по графу станів зручно використовувати поняття потоку ймовірності .

При цьому **поток імовірності**, що переводить систему зі стану S_j у стан S_i , називається добуток імовірності $P_j(t)$ на інтенсивність $a_{ji}(t)$ потоку подій, що переводять систему по цій дузі.

- Рівняння Колмогорова складаються за таким правилом: похідна ймовірності будь-якого стану системи дорівнює сумі потоків імовірності, що переводять систему в цей стан, мінус сума всіх потоків імовірності, що виводять систему із цього стану.
- Систему рівнянь Колмогорова вирішують при початкових умовах, що задають ймовірності станів у початковий момент часу $p_0(0)$, $p_1(0)$, , $p_n(0)$ з урахуванням умови нормування

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1 \quad (4)$$

Назвемо марківський процес, що протікає в системі, ергодичним, якщо для усіх перехідних ймовірностей існує межа

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} p_{ji}(t, t + \tau) = p_i \geq 0 \quad , \quad \forall j, i = \overline{0, n} \quad .$$

- Відповідно до теореми Маркова, для того, щоб процес, який відбувається в системі, був ергодичним, необхідно, щоб її граф стану був сильно зв'язаним, а ймовірності переходів задовольняли умові однорідності (2).
- Для систем, що є ергодичними, після проходження деякого часу настає стаціонарний режим, коли ймовірності станів не залежать від часу: $p_i(t) = p_i \quad , \quad i = \overline{0, n} \quad .$ Ймовірності $p_i, \quad i = \overline{0, n}$ називаються фінальними.

- Якщо ергодична система перебуває в стаціонарному режимі, то, як витікає з рівнянь Колмогорова, сума всіх потоків імовірності, що переводять систему з інших станів у стан S_i , дорівнює сумі всіх потоків імовірності, що переводять систему зі стану S_i в інші стани

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n p_j \cdot a_{ji} = p_i \cdot \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \quad , \quad i = 0, \dots, n \quad (5)$$

Застосування процесів загибелі й народження для аналізу СРІ

- Для вирішення задач обслуговування викликів симетричного потоку повністю доступною СРІ зручно використовувати окремий випадок марківських процесів – процес загибелі й народження.
- Процесом загибелі й народження називається такий марківський процес із неперервним часом, який має кінцеву або злічену множину станів, у кожному з яких за нескінченно малий інтервал часу $[t, t + \tau)$ з імовірностями більшими нуля можливі безпосередні переходи тільки в сусідні стани. Іншими словами, зі стану i можливий перехід тільки у стани $i - 1$ або $i + 1$, або ж процес зберігає стан i .

- Якщо на повністю доступну СРІ надходить ординарний потік викликів, то процес обслуговування викликів є процесом народження й загибелі. Граф станів системи для цього випадку наведений на рис. 3.

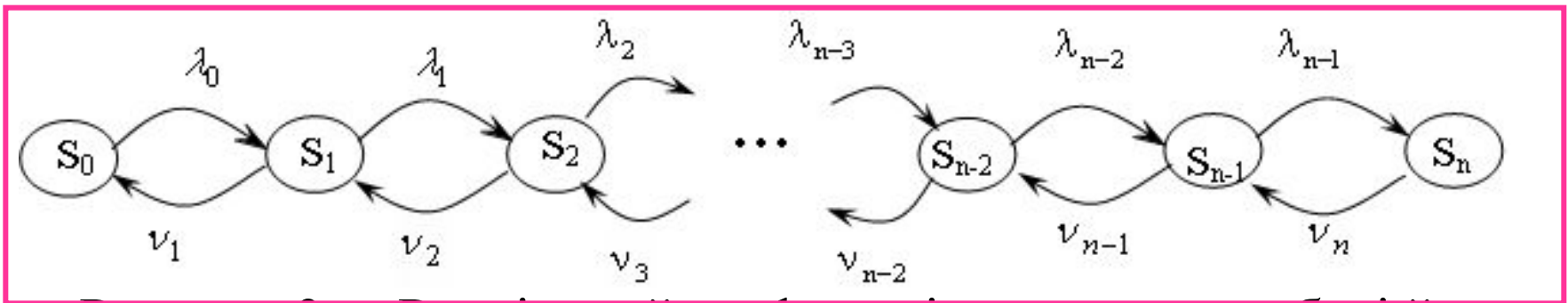


Рисунок 3 – Розмічений граф станів процесу загибелі й народження

- Процес народження в розглянутому випадку ототожнюється з процесом зайняття приладів системи, а процес загибелі – із процесом звільнення приладів. Параметри потоків зайняття і потоків звільнень позначимо відповідно λ_i та ν_i , $i = 1, \dots, n$.

- Для інтенсивностей переходів у процесах народження й загибелі, що описують стани СРІ, справедливі наступні співвідношення

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda_i, & j = i + 1; \\ \nu_i, & j = i - 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (6)$$

- Для процесів народження й загибелі система рівнянь Колмогорова має простий вигляд, до якого можна було б прийти, виходячи з умови рівності потоків імовірності між сусідніми станами процесів

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 p_0 = v_1 p_1; \\ \lambda_1 p_1 = v_2 p_2; \\ \dots \\ \lambda_{i-1} p_{i-1} = v_i p_i; \\ \dots \\ \lambda_{n-1} p_{n-1} = v_n p_n. \end{array} \right. \quad (7)$$

- Систему рівностей (7) можна сформулювати у вигляді такого правила: для процесу загибелі й народження, що описує СРІ, яка перебуває у стаціонарному режимі, потоки ймовірності між будь-якими двома сусідніми станами рівні. Сформульоване правило відбиває такий інтуїтивний принцип: частота переходів СРІ,

що перебувають у стаціонарному режимі, зі стану S_{i-1} у стан S_i , дорівнює частоті переходів зі стану S_i у стан S_{i-1}

Розв'яжемо систему (7) з урахуванням умови нормування

$$\sum_{i=0}^n p_i = 1 .$$

В результаті отримаємо вираз для фінальних станів СРІ

$$p_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^i \nu_k} p_0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

де

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^i \nu_k}} \quad (9)$$

- Вирази для фінальних станів (8, 9) надзвичайно важливі в теорії телетрафіку. З них як окремі випадки випливають конкретні формули, що дозволяють аналізувати характеристики якості СРІ для різних моделей.