Тема 2. Линейное программирование

1. Графическое решение ЗЛП
2. Особые случаи решения ЗЛП графическим методом
3. Основы симплекс-метода
4. Транспортная задача

1. Графическое решение задачи линейного программирования

1. Строится многоугольная допустимая область решений (**ОДР**), соответствующая ограничениям

2. Строится **вектор–градиент** линейной формы с координатами

$$\Delta = (\tilde{n}_1 = \frac{\partial f}{\partial \tilde{o}_1}, \tilde{n}_2 = \frac{\partial f}{\partial \tilde{o}_2})$$

3. Строится **прямая** , перпендикулярная вектору-градиенту. Прямая «передвигается» в направлении этого вектора в случае максимизации (в направлении, противоположном вектору - в случае минимизации) до тех пор, пока не покинет пределов многоугольной области.

4. Определяются координаты **предельной точки**.

Подставляются значения координат в выражение целевой функции, тем самым находятся ее экстремальные значения.

Пример решения ЗЛП графическим методом

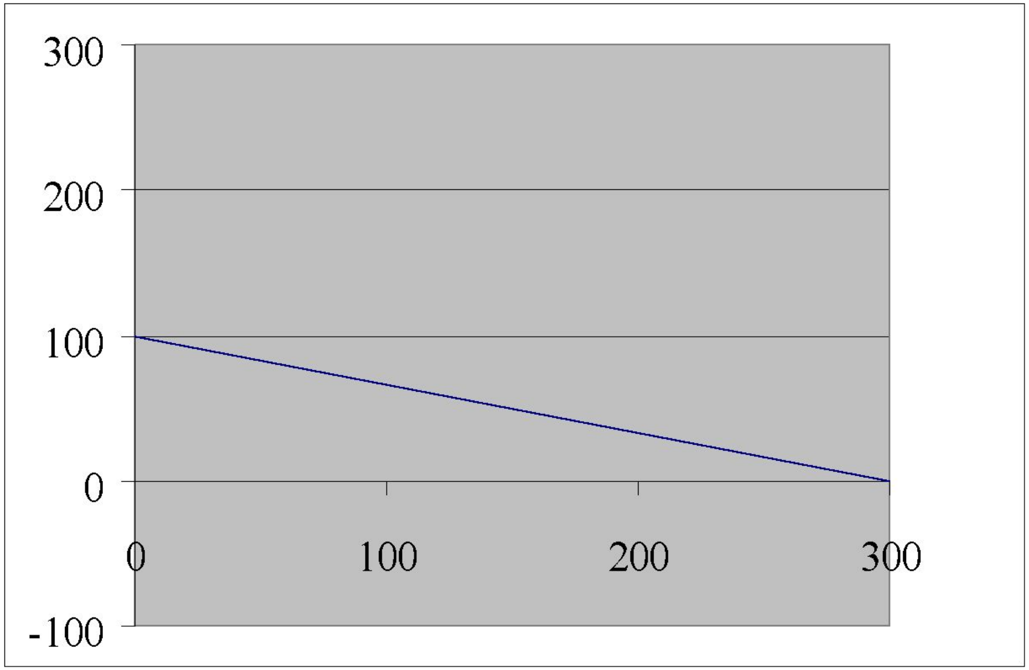
Пример 1.

$f(x_1,x_2) = (2x_1+3x_2) \rightarrow \max$

$x_1+3x_2 \le 300$

$x_1+x_2 \le 150$

$x_{1,2} \ge 0$



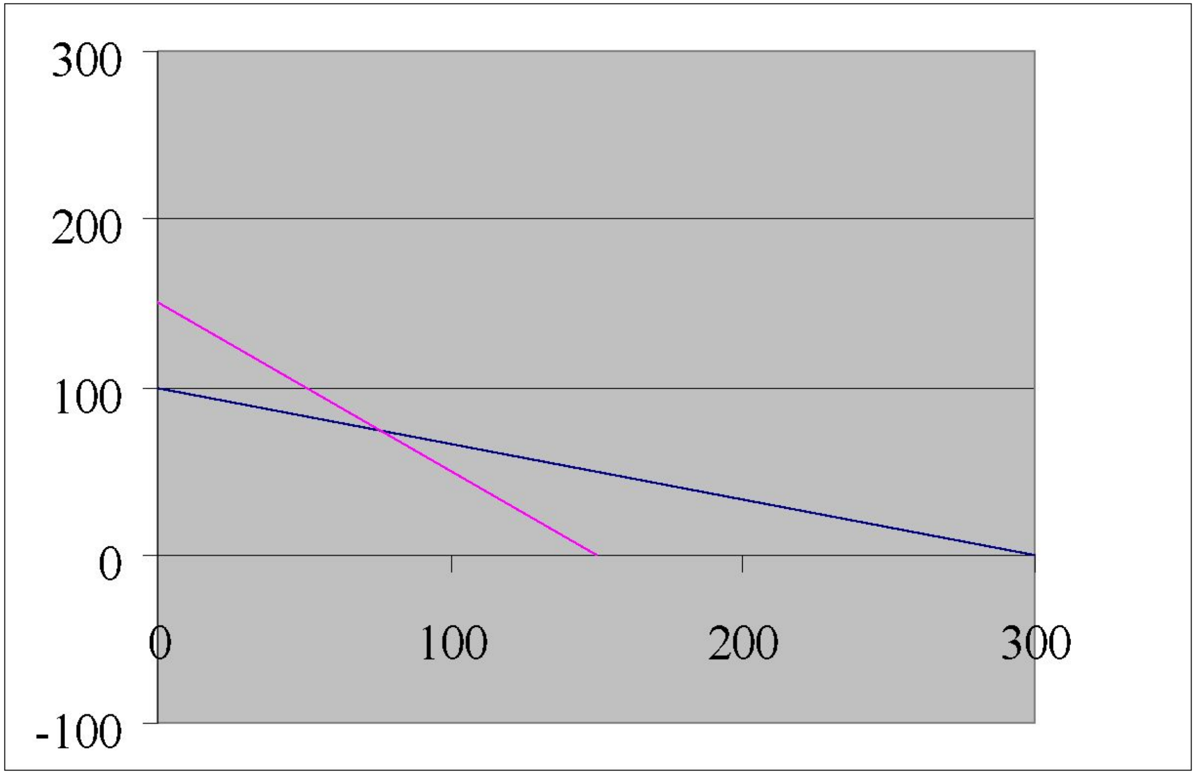
<u>**1 этап.**</u>

$x_1+ 3x_2 =300$

(0;100) и (300;0).

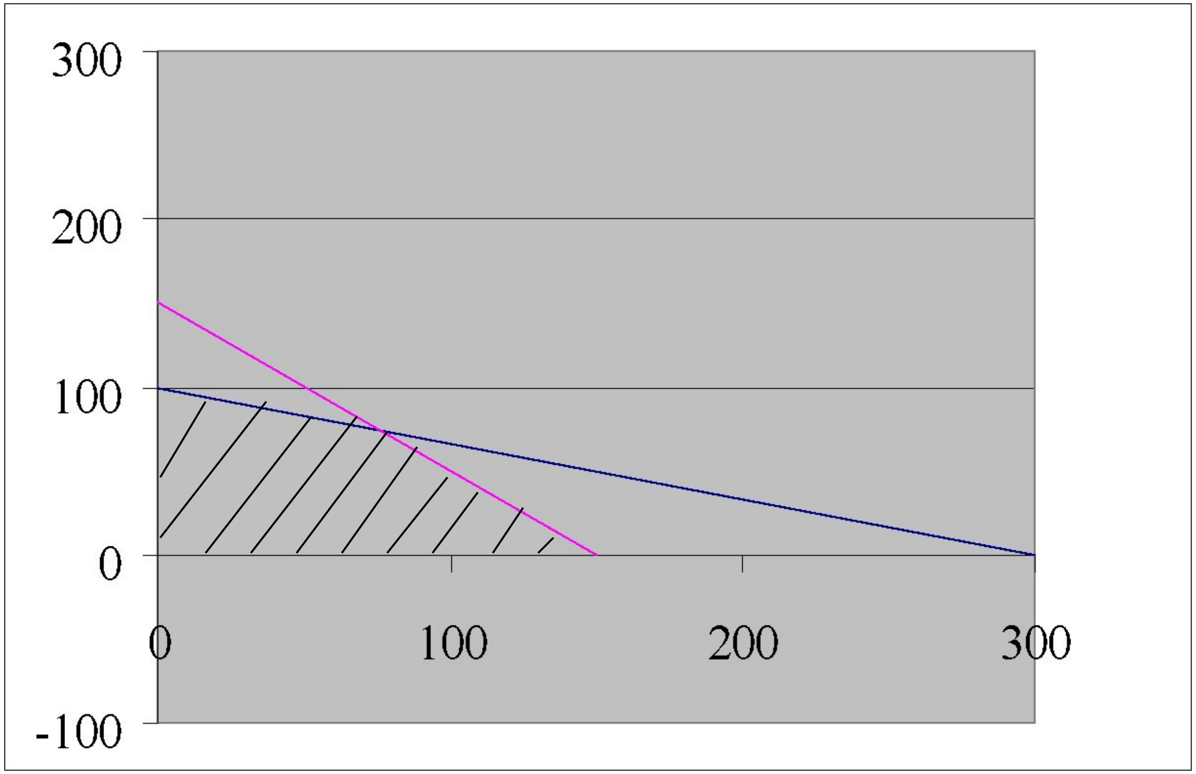
$x_1+x_2 = 150$

(0;150) и (150;0).



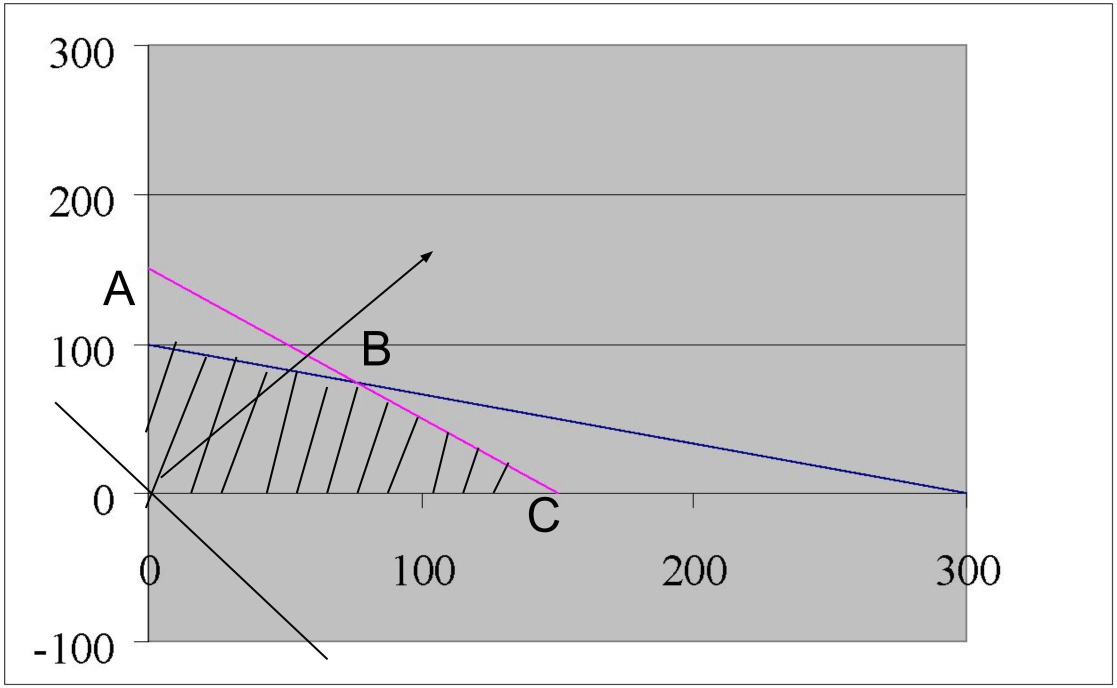
$x_1+x_2 = 150$

(0;150) и (150;0).



2 этап. Строится вектор-градиент с координатами $\Delta(100;150)$.

3 этап. Строится прямая , перпендикулярная вектору-градиенту.
Прямая «передвигается» до момента покидания ОДР.
Предельная точка – точка В.



4 этап.

$$\begin{cases} x_1+3x_2 = 300 \\ x_1+x_2 = 150 \end{cases} \qquad 2x_2 = 150$$

$x_1 = 75 \qquad x_2 = 75$

Т.к. координаты точки В равны $x_1 = 75$ и $x_2 = 75$, то максимум ЦФ равен 375.

$f = 2x_1+3x_2 = 2\cdot75 + 3\cdot75 = 375$

Пример № 2 .

Совхоз для кормления животных использует два вида корма. В дневном рационе животного должно содержаться не менее 6 единиц питательного вещества А и не менее 12 единиц питательного вещества В.

Какое количество корма надо расходовать ежедневно на одного животного, чтобы затраты были минимальными? Использовать данные таблицы:

Питательные вещества	Кол-во питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
А	2	1
В	2	4
Цена 1 кг корма	0,2	0,3

Пример 2 .

Питательные вещества	Кол-во питательных веществ в 1 кг корма	
	1	2
A	2	1
B	2	4
Цена 1 кг корма	0,2	0,3

x_1 - кол-во корма 1 вида

x_2 - кол-во корма 2 вида

$F(X) = 0{,}2\,x_1 + 0{,}3x_2 \to \min$

$2\,x_1 + x_2 \geq 6$

$2\,x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1\ , x_2 \geq 0$

Пример 2 .

$F(X) = 0{,}2\,x_1 + 0{,}3x_2 \rightarrow \min$

$2\,x_1 + x_2 \geq 6$

$2\,x_1 + 4x_2 \geq 12$

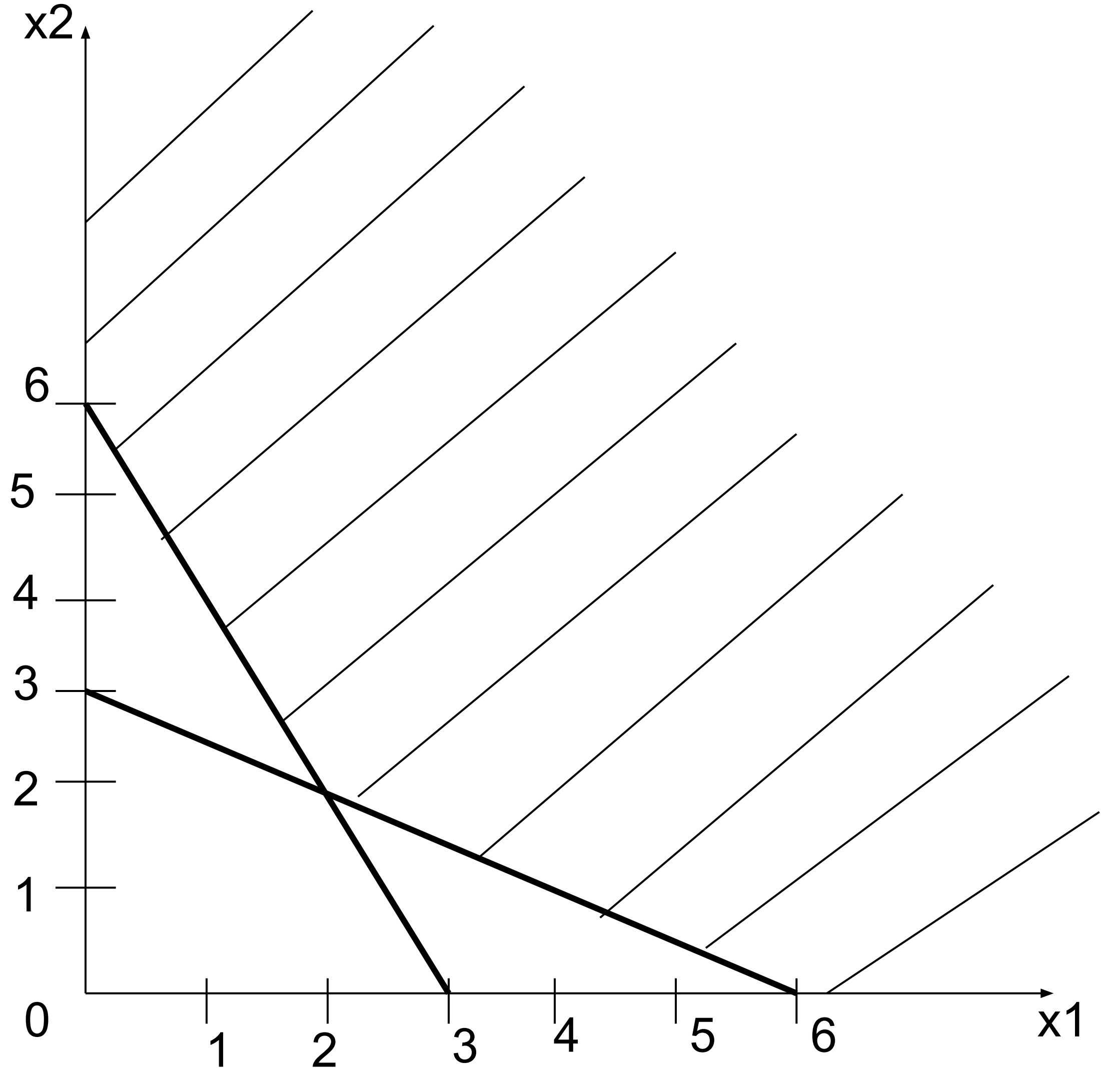
$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$

2 x1 + x2 = 6

x1	0	3
x2	6	0

2 x1 + 4x2 ≥ 12

x1	0	3
x2	6	0



Пример 2 .

$F(X) = 0{,}2\ x_1 + 0{,}3x_2 \rightarrow \min$

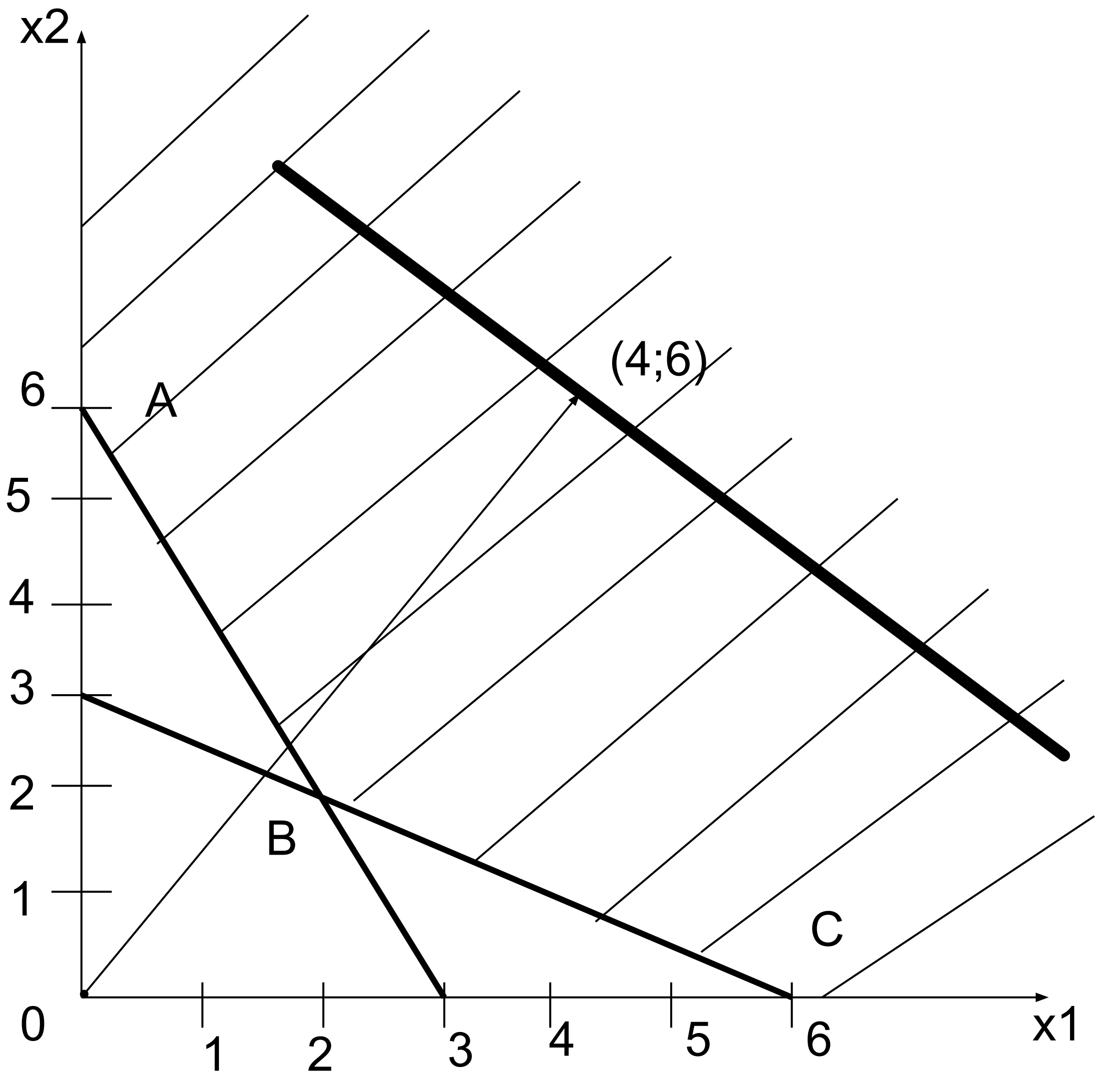
$2\ x_1 + x_2 \geq 6$

$2\ x_1 + 4x_2 \geq 12$

$x_1\ , x_2 \geq 0$

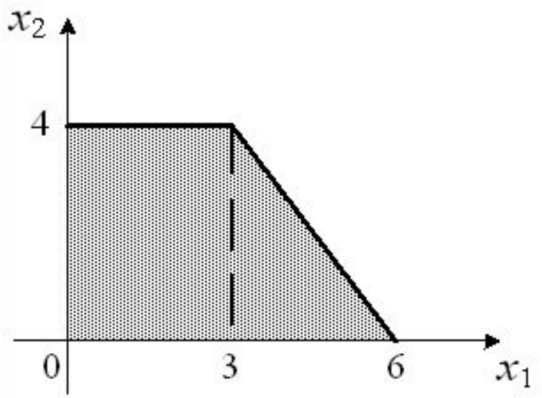
Предельная точка: B(2;2)

min F(X) = 0,2 *2 + 0,3*2 = 1



Задание N 32

Область допустимых решений задачи линейного программирования имеет вид:



Тогда максимальное значение функции $z = 2x_1 + 6x_2$ равно…

Варианты ответов

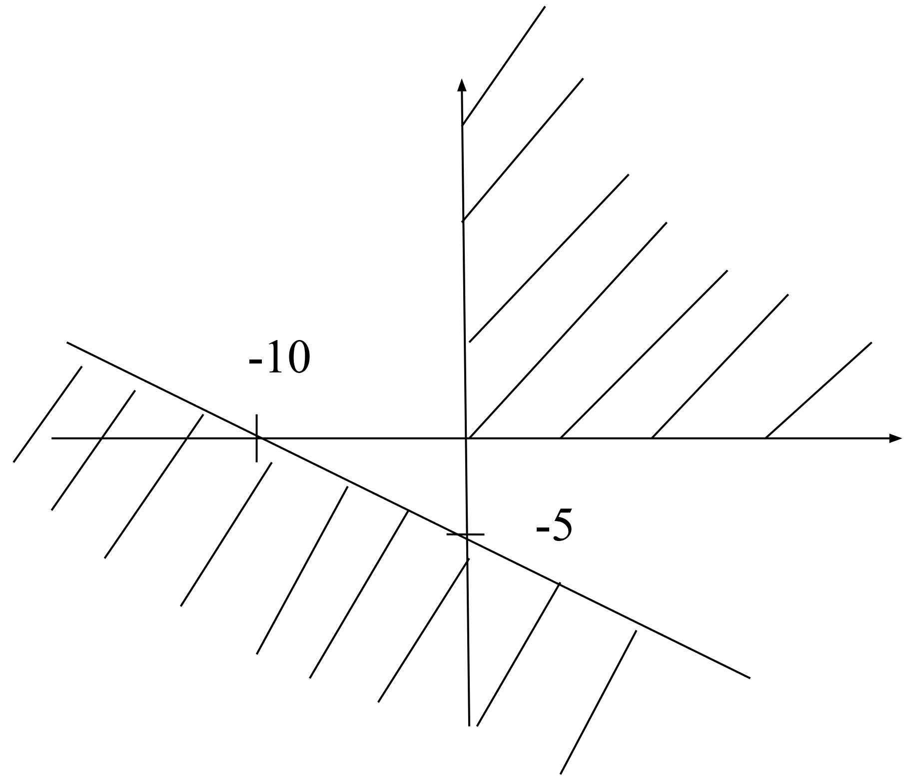
- 26
- 30
- 24
- 32

Особые случаи решения ЗЛП графическим методом

1 случай.

Область допустимых решений **пуста** и ЗЛП **решений не имеет.**

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 + 2\tilde{o}_2 \le -10 \\ \tilde{o}_1 \ge 0 \\ \tilde{o}_2 \ge 0 \end{cases}$$

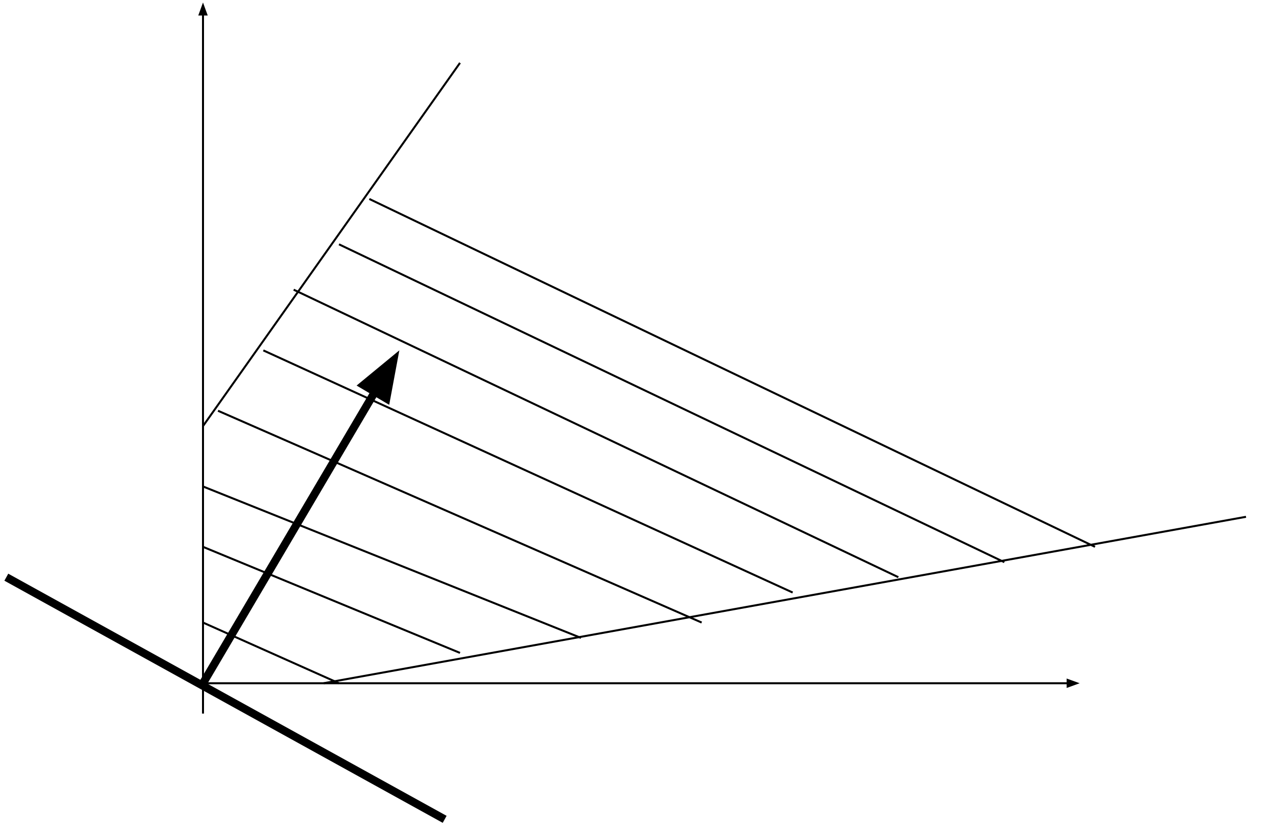


$x_1 + 2x_2 = -10$

(0;-5) и (10;0)

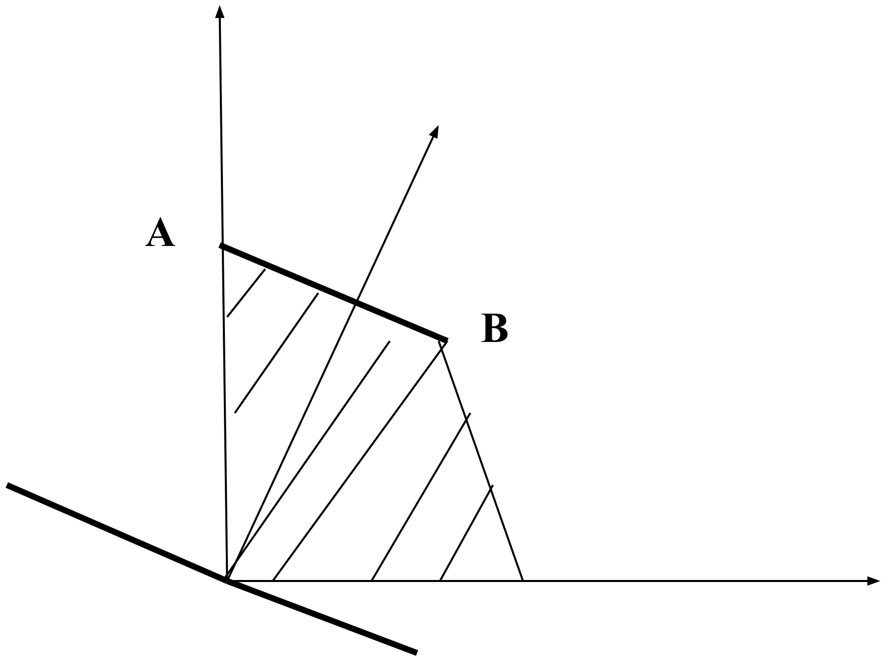
2 случай.

ОДР – незамкнутый многоугольник в направлении оптимизации целевой функции. Задача не имеет решений.



3 случай.

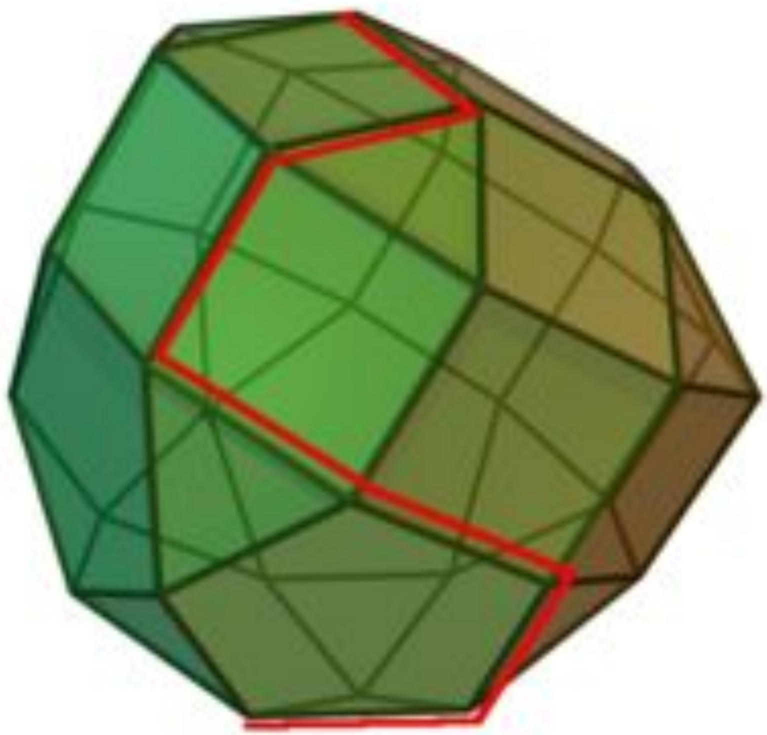
Решений бесконечно много.



2. Основы симплекс-метода

Подобно тому, как графический метод ищет оптимум в вершинах многоугольника,

в симплексном методе оптимум ищется в вершинах n-мерного многогранника, называемого **симплексом**.



2. Основы симплекс-метода

Алгоритм симплекс-метода

1. Путем преобразований система ограничений приводится к необходимой, так называемой **базисной**, форме.
2. Находится так называемое **опорное решение**, служащее «точкой отсчета».
3. Последовательно **перебираются вершины** симплекса.

Если в данной точке значение критерия больше (или меньше) предыдущего, то процесс продолжается.

Когда значение критерия уже нельзя улучшить, тогда решение найдено.

- **1 вариант**
- Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна А и строительного предприятия В.
- Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.
- Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%. Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?
- Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

- ***1 вариант.***

$x1$ – тыс. ден. ед. ,вложенных в акции концерна А

x_2 – тыс. ден. ед. , вложенных в акции предприятия В

$F(x) = 0{,}08\, x_1 + 0{,}10\, x_2 \to \max$ - общая прибыль

$x_1 + x_2 \leq 300$

$x_1 - 2x_2 \geq 0$

$x_2 \leq 100$

$x_1, x_2 \geq 0$

1 вариант.

$x1$ – тыс. ден. ед. ,вложенных в акции концерна А

x_2 – тыс. ден. ед. , вложенных в акции предприятия В

$F(x) = 0,08\,x_1 + 0,10\,x_2 \rightarrow \max$ - общая прибыль

$x_1 + x_2 \leq 300$

$x_1 - 2x_2 \geq 0$

$x_2 \leq 100$

$x_1, x_2 \geq 0$

1 вариант.

Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного **концерна А** и строительного **предприятия В.**

Чтобы уменьшить риск, акций А должно быть приобретено по крайней мере в два раза больше, чем акций В,

причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед.

Дивиденды по акциям А составляют 8% в год, по акциям В – 10%.

Какую максимальную прибыль можно получить в первый год?

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на минимум и почему?

- 3 вариант
- Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный.
- В **обычный** набор входит 3 кг азотных,
- 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений.
- Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений.
- Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед.
- Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

- **4 вариант**
- На имеющихся у фермера 400 гектарах земли он планирует посеять кукурузу и сою.
- Сев и уборка кукурузы требует на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед.
- На покрытие расходов, связанных с севом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед..
- Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей – 60 центнеров.
- Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед.
- Однако, согласно этому договору, фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров.
- Фермеру хотелось бы знать, сколько гектар нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль.

- **5 вариант**
- Продукция двух видов (краска для внутренних (I) и наружных (E) работ) поступает в оптовую продажу. Для производства красок используются два исходных продукта A и B. Максимально возможные суточные запасы этих продуктов составляют 6 и 8 тонн, соответственно.
- Расходы продуктов A и B на 1 т соответствующих красок приведены в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на тонну краски, т		Максимально возможный запас, т
	Краска E	Краска I	
A	1	2	6
B	2	1	8

- Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску I никогда не превышает спроса на краску E более чем на 1 т. Кроме того, установлено, что спрос на краску I никогда не превышает 2 т в сутки. Оптовые цены одной тонны красок равны: 3000 ден. ед. для краски E и 2000 ден. ед. для краски I.
- Какое количество краски каждого вида должна производить фабрика, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

- **6 вариант**
- Финансовый консультант фирмы «АВС» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю.
- Клиент хочет вложить средства (не более 25000$) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси».
- Анализируются акции «Дикси –Е» и «Дикси –В». Цены на акции: «Дикси –Е» - 5$ за акцию; «Дикси –В» - 3$ за акцию.
- Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук.
- По оценкам «АВС» прибыль от инвестиций в эти две акции в следующем году составит: «Дикси –Е» - 1,1$; «Дикси –В» - 0,9$.
- Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.

- **7 вариант**
- Завод-производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей X и Y.
- Фонд рабочего времени равен 4000 чел.-ч в неделю.
- Для производства одной детали типа X требуется 1 чел./ч, а для производства одной детали типа Y – 2 чел./ч.
- Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей X и 1750 деталей Y в неделю.
- Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа Y необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла.
- Уровень запасов каждого вида металла составляет 10000 кг в неделю.
- Еженедельно завод поставляет 600 деталей типа X своему постоянному заказчику.
- По профсоюзному соглашению общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.
- Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ден. ед., а от производства одной детали типа Y – 40 ден. ед.?

- **8 вариант**
- Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1 S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице:

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

- Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед.
- Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость.

- **9 вариант**
- При производстве двух видов продукции используется 4 типа ресурсов. Норма расхода ресурсов на производство единицы продукции, общий объем каждого ресурса заданы в таблице

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

- Прибыль от реализации одной единицы продукции первого вида составляет 2 ден. ед., второго вида – 3 ден. ед.
- Задача состоит в формировании производственной программы выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль от ее реализации.

- **10 вариант**
- Фирма производит два безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник».
- Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования.
- Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч.
- Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно.
- Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента.
- Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника».
- Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?