



Тема 4. Теплопроводность

Лекции 14, 15





§ 1. Основные положения теории теплопроводности



Когда не учитывают зависимость коэффициента теплопроводности λ от температуры, (или, что то же самое, используют среднее для данного температурного интервала значение λ), то говорят о **линейной** теории теплопроводности.

Основной задачей теории теплопроводности является определение распределения температуры в объеме тела, поскольку согласно постулату Фурье, величина и направление теплового потока однозначно определяется температурным полем. Распределение температуры можно найти путем решения уравнения теплопроводности.



В § 3 было получено дифференциальное уравнение энергии для несжимаемой жидкости:

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot \nabla^2 T .$$

Поскольку для твердого тела конвективная производная температуры по времени равна нулю, субстанциальная производная сводится к локальной:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \nabla^2 T , -$$

дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовых координатах при отсутствии в объеме тела внутренних источников теплоты и при постоянном λ .





Наиболее общая форма уравнения теплопроводности для изотропного тела:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\text{div}(\lambda \cdot \text{grad} T)}{\rho \cdot c} + \frac{q_v}{\rho \cdot c}, -$$

дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовых координатах при наличии внутренних источников теплоты и зависящем от температуры λ ,

Здесь $\rho \cdot c$ – объемная теплоемкость материала, Дж/(м³ · К); q_v – мощность внутренних источников теплоты, Вт/м³.

Линейное дифференциальное уравнение теплопроводности в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right).$$



*Монетка для гадания
от Тамары Хенсик
(Tamara Hensick)
со сторонами «risk it /
play it safe» (рисковать /
придерживаться
безопасного пути)*

Чтобы из множества решений выбрать одно, соответствующее единичному явлению данного класса, необходимо задать условия однозначности:

- **геометрические условия**, определяющие форму и размеры тела;
- **физические параметры материала** λ , ρ , c ;
- **начальные условия**, т.е. распределение температуры в объеме тела в начальный момент времени;
- **граничные условия**, характеризующие тепловое взаимодействие окружающей среды с поверхностью тела.

Последние два типа условий объединяются термином «краевые условия».



Граничные условия (г.у.) можно задать разными способами:

- А. Г.у. I рода $T_w = T_w(x, y, z, t)$, т.е. задается распределение температуры по всей поверхности тела и изменение его во времени.
- Б. Г.у. II рода $q_w = q_w(x, y, z, t) = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)$ – известна плотность теплового потока на поверхности и ее изменение во времени.
- В. При г.у. III рода задается температура окружающей среды или внешнего источника (стока) теплоты $T_0(x, y, z, t)$ и закон теплообмена между средой и поверхностью тела. То есть задается связь между известной температурой окружающей среды и неизвестной температурой поверхности тела (градиентом температуры на поверхности).





§ 2. Стационарная теплопроводность в неограниченной пластине (тепловые потери через стены печей)

Стационарное линейное дифференциальное уравнение теплопроводности в декартовых координатах при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид:

$$\nabla^2 T = 0 .$$

Для задач стационарной теплопроводности начальные условия не имеют смысла, задают лишь граничные условия.

Рассмотрим бесконечную пластину, имеющую конечную толщину δ вдоль оси x . Уравнение принимает вид:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 .$$



Интегрируя один раз, получим:

$$\frac{dT}{dx} = C_1.$$



Вторично интегрируя, получим:

$$T(x) = C_1 \cdot x + C_2.$$

А. Г.у. I рода.

Расположив начало координат на одной из поверхностей, имеем:

$$T(0) = T_1, \quad T(\delta) = T_2.$$

Следовательно,

$$C_2 = T_1, \quad C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta}$$

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} \cdot x.$$





$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (T_1 - T_2) = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\delta}{\lambda}},$$

где $\frac{\delta}{\lambda} = R_{\text{вн}}$ – **внутреннее тепловое сопротивление**.

Б. Г.у. II рода.

$$q_w(0) = q_w(\delta) = q = \text{const.}$$

$$C_1 = \frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda}.$$

Константа C_2 может принимать любые значения.

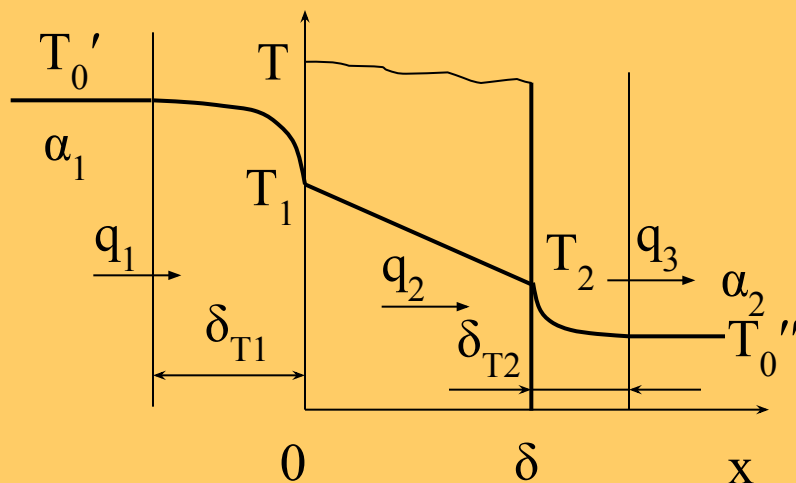
Для нахождения C_2 необходимо задать $T_w(0)$ ($T_w(\delta)$)
либо T_0 и α с любой стороны.





В. Г.у. III рода.

Рассмотрим случай конвективной теплоотдачи:



Дано: T'_0, T''_0 ,
 α_1, α_2 .

Ввиду стационарности процесса $q_1 = q_2 = q_3 = q$.

$$\begin{cases} q_1 = \alpha_1 \cdot (T'_0 - T_1) \\ q_2 = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (T_1 - T_2) \\ q_3 = \alpha_2 \cdot (T_2 - T''_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'_0 - T_1 = \frac{1}{\alpha_1} \cdot q, \\ T_1 - T_2 = \frac{\delta}{\lambda} \cdot q, \\ T_2 - T''_0 = \frac{1}{\alpha_2} \cdot q. \end{cases}$$



Суммируя, получим:

$$T'_0 - T''_0 = q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \cdot (T'_0 - T''_0) = k \cdot (T'_0 - T''_0),$$

где k – коэффициент теплопередачи.



Величина $\frac{1}{\alpha} = R_H$ – **наружное тепловое сопротивление.**

Для многослойной стенки

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$



*Многослойные теплоизоляционные системы в строительстве:
 А – утеплитель – внутри ограждающей конструкции (ISOVER);
 Б – система «мокрого» типа («Опытный завод сухих смесей»);
 В – вентилируемый фасад (PAROC).*



§ 3. Стационарная теплопроводность в цилиндрической стенке (изоляция трубопроводов)

Для цилиндрической стенки, неограниченно простирающейся вдоль оси x , в осесимметричном случае, (т.е. при неизменных по граничным поверхностям стенки условиям) уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0.$$

Используя подстановку $\frac{dT}{dr} = u$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{dr}{r} = 0.$$



Интегрируя, имеем:

$$\ln u + \ln r = \ln C_1 .$$



После потенцирования получаем:

$$u \cdot r = C_1 .$$



Переходя к переменной T и выполняя разделение переменных, имеем уравнение:

$$\frac{dT}{dr} \cdot r = C_1 \Rightarrow dT = C_1 \cdot \frac{dr}{r} ,$$

интегрируя которое, находим искомое решение:

$$T(r) = C_1 \cdot \ln r + C_2 .$$

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot \frac{C_1}{r} .$$





А. Г.у. I рода.

$$T(r_1) = T_1, \quad T(r_2) = T_2.$$

$$T_1 = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2, \quad T_2 = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2.$$

$$T_1 - T_2 = C_1 \cdot (\ln r_1 - \ln r_2) \Rightarrow C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

$$C_2 = T_1 - \frac{(T_1 - T_2) \cdot \ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

$$T(r) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \ln \frac{r}{r_1}.$$





Плотность теплового потока, проходящего через любую цилиндрическую поверхность внутри стенки с текущим радиусом r :

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda \cdot (T_1 - T_2)}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}},$$

откуда тепловой поток, проходящий через трубу длиной L , получается постоянным по толщине и равным, Вт:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot q = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$





Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку единичной длины, называется **линейной плотностью теплового потока**, Вт/м:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \pi \cdot \frac{T_1 - T_2}{R_{LВН}},$$

где $R_{LВН}$ — **внутреннее линейное тепловое сопротивление** цилиндрической стенки.

$$R_{LВН} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2 \cdot \lambda}.$$

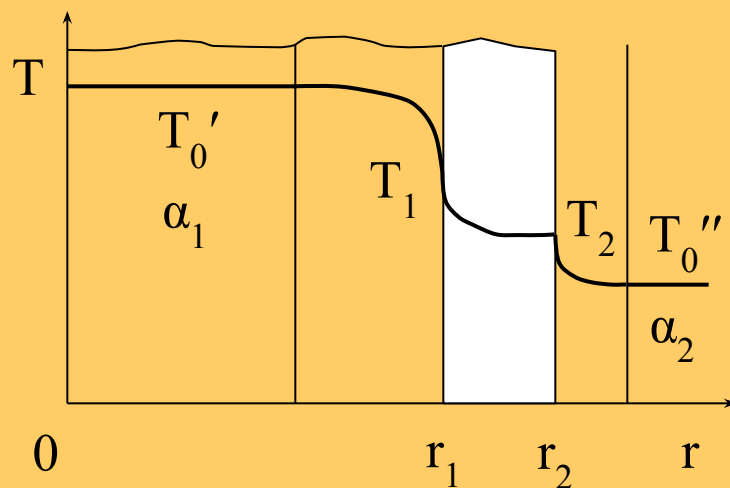
Б. Г.у. II рода.

Как и для плоской стенки, задача не имеет единственного решения.





В. Г.у. III рода.



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{L1} = \alpha_1 \cdot (T_0' - T_1) \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1, \\ Q_{L2} = 2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \frac{T_1 - T_2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \\ Q_{L3} = \alpha_2 \cdot (T_2 - T_0'') \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_0' - T_1 = \frac{Q_{L1}}{2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot \alpha_1}, \\ T_1 - T_2 = \frac{Q_{L2} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \lambda}, \\ T_2 - T_0'' = \frac{Q_{L3}}{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot \alpha_2}. \end{array} \right.$$



Для сохранения стационарного режима необходимо, чтобы

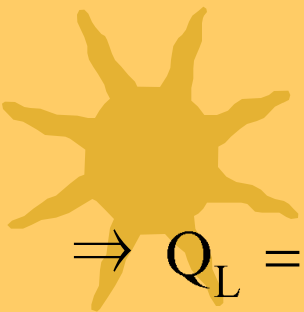
$$Q_{L1} = Q_{L2} = Q_{L3} = Q_L.$$

Суммируя уравнения системы, получим:

$$T'_0 - T''_0 = \frac{Q_L}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot r_1 \cdot \alpha_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{2 \cdot r_2 \cdot \alpha_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_L = \frac{1}{\frac{1}{2 \cdot r_1 \cdot \alpha_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{2 \cdot r_2 \cdot \alpha_2}} \cdot \pi \cdot (T'_0 - T''_0) = k_L \cdot \pi \cdot (T'_0 - T''_0).$$

где k_L – линейный коэффициент теплопередачи.





Металлопластиковые трубы ALuPEX Wavin состоят из 5 слоев алюминиевой фольги и полиэтилена, которые соединены клеем. Сварка обеспечивает монолитность трубы и минимальное температурное удлинение, делает ее газонепроницаемой.

При теплопередаче через многослойную стенку

$$k_L = \frac{1}{\frac{1}{2 \cdot r_1 \cdot \alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}{2 \cdot \lambda_i} + \frac{1}{2 \cdot r_2 \cdot \alpha_2}},$$

где $R_{LH} = \frac{1}{2 \cdot r \cdot \alpha}$ — **наружное линейное тепловое сопротивление.**

Зная T'_0, T''_0 и определив Q_L , можно найти T_1, T_2 и $T(r)$.



Рассмотрим влияние наружного диаметра однородной цилиндрической стенки на ее суммарное линейное тепловое сопротивление.

$$R_{L\Sigma} = \frac{1}{d_1 \cdot \alpha_1} + \frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{d_2 \cdot \alpha_2}.$$

Считаем, что $d_1 = \text{const}$, тогда при увеличении наружного диаметра d_2 увеличивается внутреннее линейное тепловое сопротивление

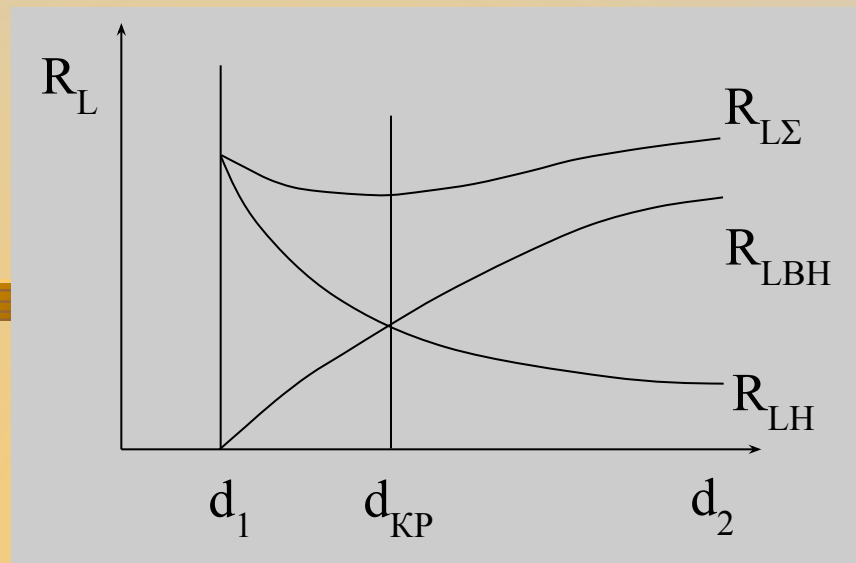
а наружное

$$R_{L\text{BH}} = \frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2 \cdot \lambda},$$

$$R_{L\text{H}} = \frac{1}{d_2 \cdot \alpha_2} -$$

уменьшается.





При $d_2 = d_{KP}$ линейная плотность теплового потока достигает максимума.

Для нахождения d_{KP} продифференцируем по d_2 сумму двух последних слагаемых в уравнении для $R_{L\Sigma}$ и приравняем производную нулю:

$$\frac{1}{2 \cdot \lambda \cdot d_{KP}} - \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_{KP}^2} = 0 \Rightarrow d_{KP} = \frac{2 \cdot \lambda}{\alpha_2}.$$