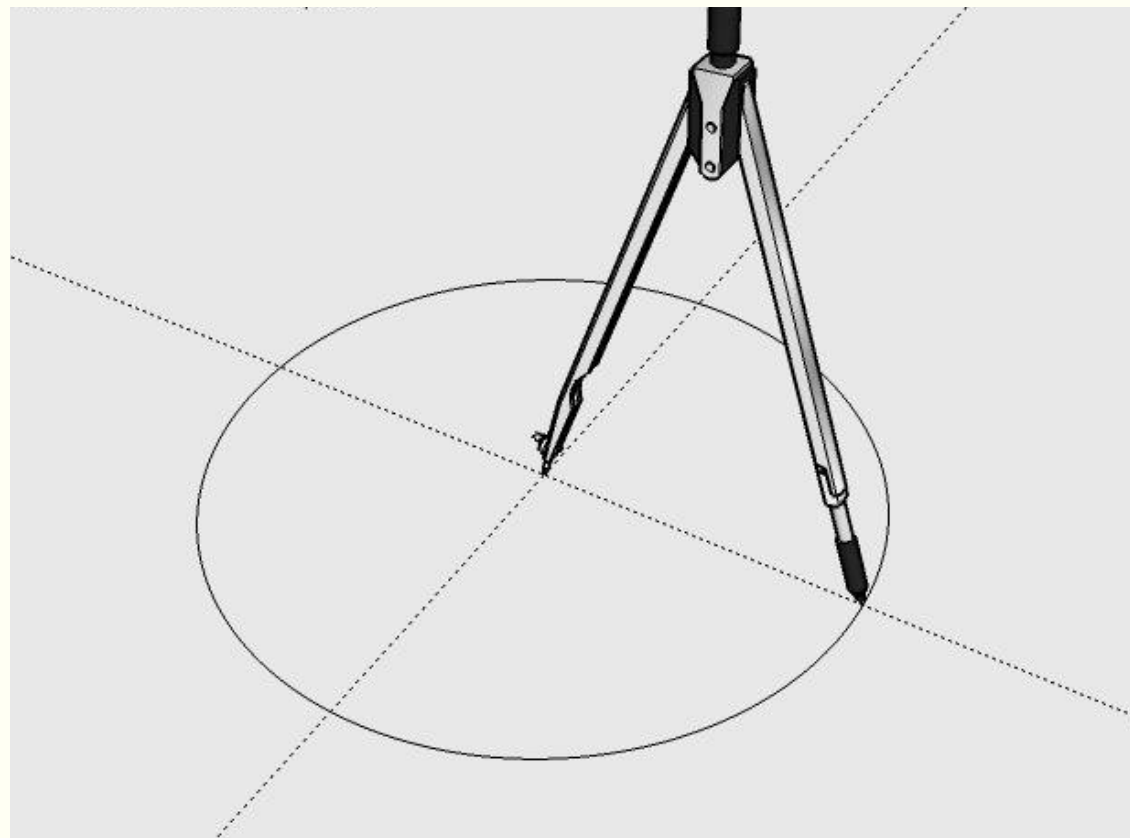


ПРОЕКТ ПО ТЕМЕ “ОКРУЖНОСТЬ”



Проект подготовил ученик класса 10-7 лицея №1502 Научный руководитель Дмитриева Л.Ф.

Семенов Егор

Окружность

- **Окружностью** называется фигура, которая состоит из все точек плоскости, **равноудаленных от** данной **точки**. Эта точка называется **центром** окружности.
- **Расстояние** от точек окружности **до ее центра** **радиусом** окружности.(r)
- **Отрезок**, соединяющий две точки окружности, **хордой**.

Хорда, проходящая **через центр**, называется **диаметром**.(d)



Диаметр и радиус окружности

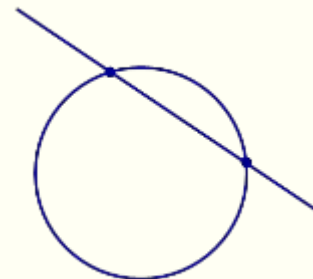
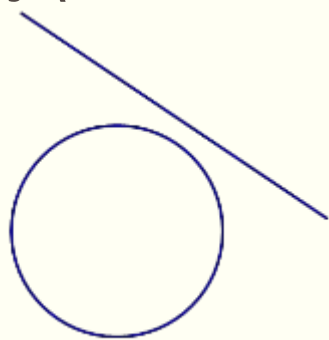
- Формулы:

$$D=2R$$

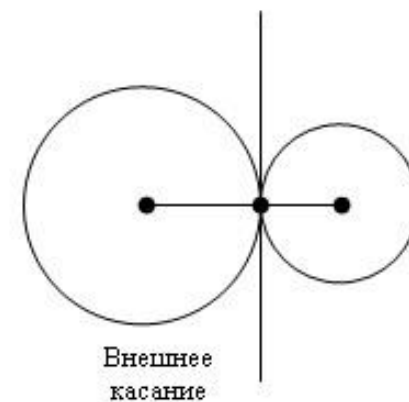
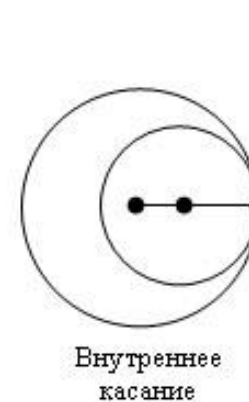


Окружность и ее свойства

- Прямая может не иметь с окружностью общих точек; иметь с окружностью **одну** общую точку (**касательная**); иметь с ней **две** общие точки (**секущая**).

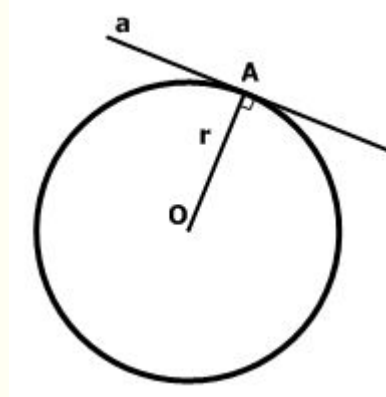


- Через **три точки**, не лежащие на одной прямой, можно провести **окружность**, и притом **только одну**.
- **Точка касания** двух окружностей лежит на **линии**, соединяющей их **центры**.

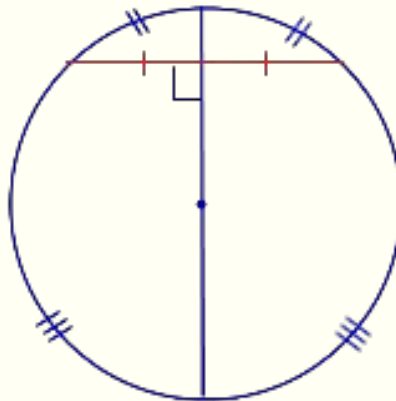


Свойства радиуса окружности

- **Радиус**, проведённый в точку A окружности, **перпендикулярен** касательной к окружности в этой точке.



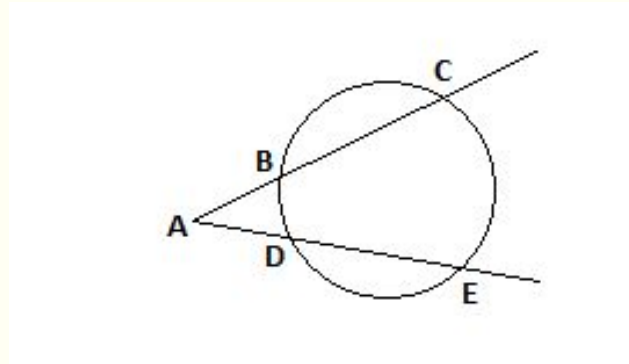
- **Радиус**, перпендикулярный **хорде**, делит её на две **равные** части.



Теорема о секущей

- Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть.

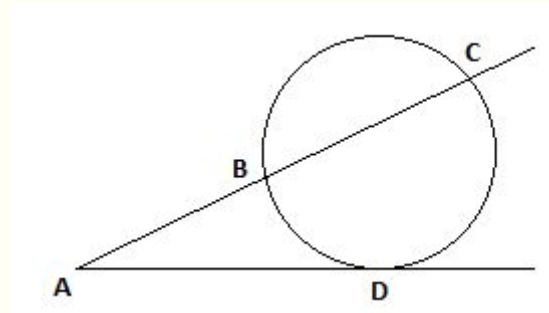
$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$



Теорема о касательной и секущей

- Если из **одной точки** проведены к окружности **касательная и секущая**, то произведение **всей секущей** на её **внешнюю часть** равно **квадрату касательной**.

$$AD^2 = AB \cdot AC$$



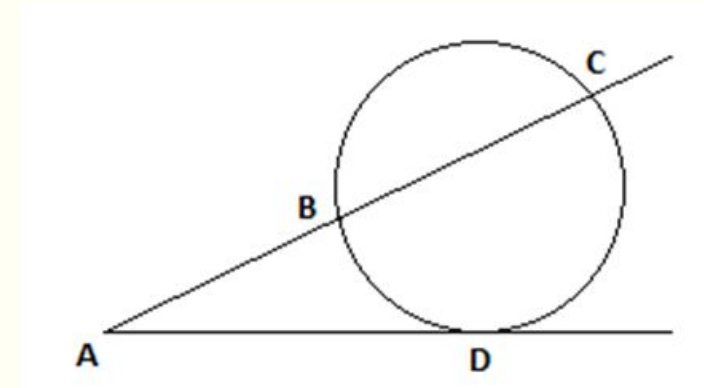
Через точку A проведены две прямые. Одна из них касается некоторой окружности в точке D, а вторая пересекает эту окружность в точках B и C, причём $BC = 7$ и $BA = 9$. Найдите DA.

Пусть точка B лежит между точками A и C. По теореме о касательной и секущей:

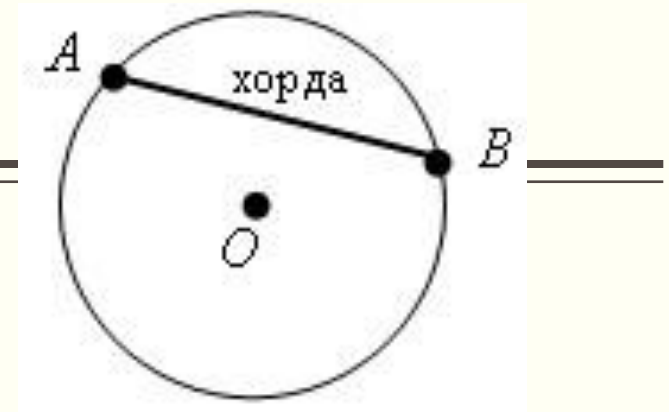
$$AD^2 = AB \cdot AC$$

$$AM^2 = 9(7+9) = 144$$

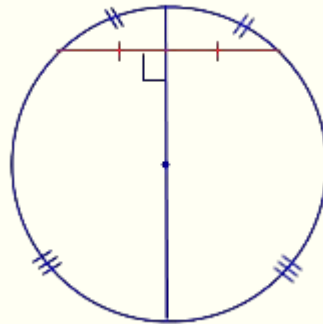
Следовательно, $AM = 12$.



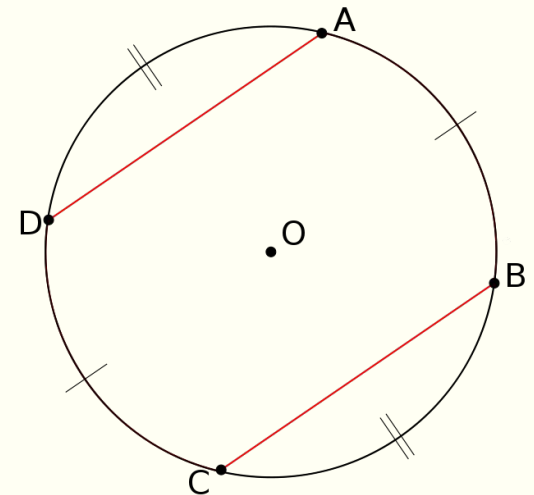
Хорда и ее свойства



- Хорда АВ - отрезок, соединяющий две точки окружности.
- Свойства:
- Диаметр, перпендикулярный** к хорде, делит эту **хорду** и обе стягиваемые ею **дуги пополам**. Верна и обратная теорема: если диаметр делит пополам хорду, то он перпендикулярен этой хорде.



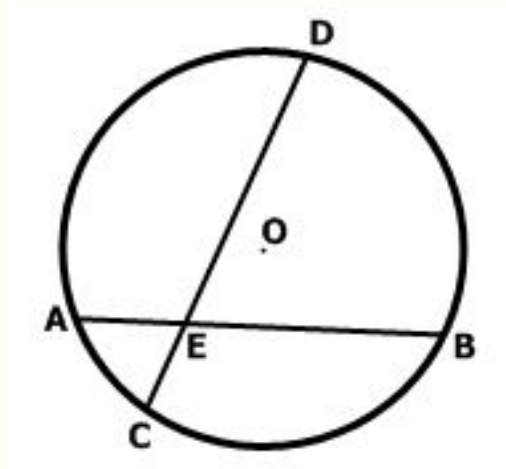
- Дуги**, заключенные между **параллельными** хордами, **равны**.



Теорема об отрезках пересекающихся хорд

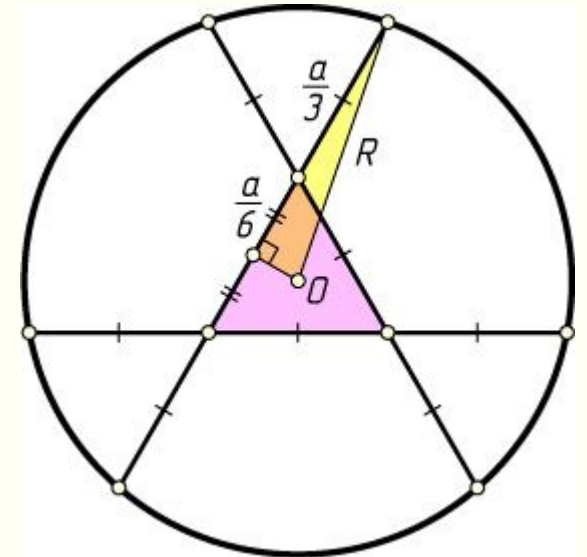
- Если **две хорды** окружности, АВ и CD **пересекаются** в точке Е, то
произведение **отрезков одной хорды** равно произведению **отрезков**
другой хорды:

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$



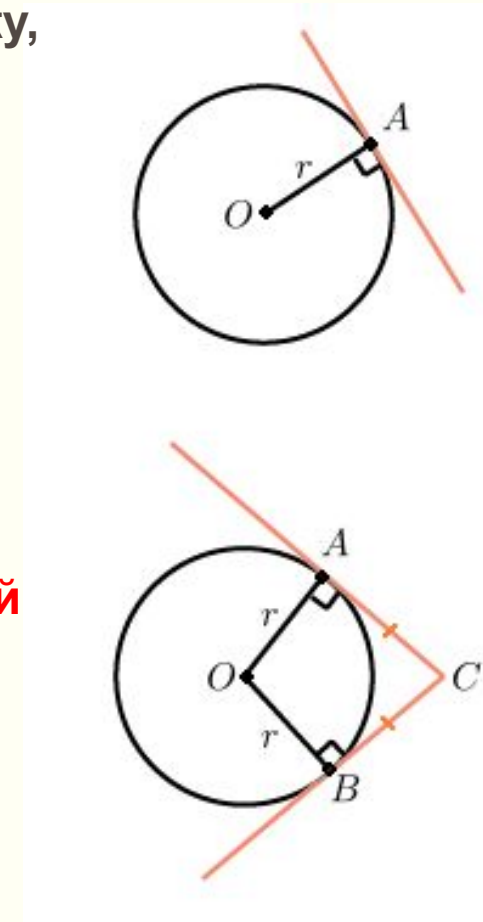
В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a .

- Из теоремы о произведениях отрезков пересекающихся хорд следует, что все три хорды равны между собой.
- Поэтому точки пересечения хорд — вершины правильного треугольника со стороной $a/3$.
- Поскольку равные хорды равноудалены от центра окружности, то центр O этого треугольника совпадает с центром данной окружности. Расстояние от точки O до каждой хорды равно радиусу внутренней окружности, т.е. $b/2\sqrt{3}$, где $b=a/3$.
- Пусть R — искомый радиус. По теореме Пифагора находим, что $R^2 = (a/2)^2 + (a\sqrt{3}/18)^2 = 7a^2/27$
- Отсюда $R = a\sqrt{7/3}\sqrt{3}$



Касательная и ее свойства

- Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.
- **Касательная** к окружности **перпендикулярна** к радиусу, проведенному в точку касания.
- Отрезки касательных к окружности, проведенных из **одной точки**, **равны** и составляют **равные углы** с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.



Дуга и ее свойства

- Любые две **не совпадающие** точки окружности **делят** её на **две** части. **Каждая** из этих частей называется **дугой** окружности. **Дуга** называется **полуокружностью**, если **отрезок**, соединяющий её концы, является **диаметром**.

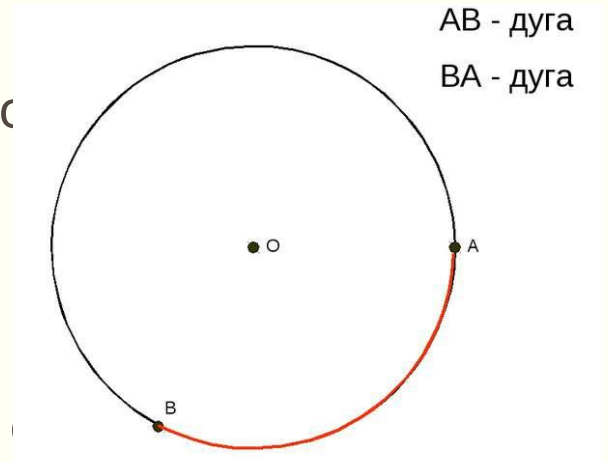
- Длина дуги L , окружности радиуса r ,

$$L = \pi r \alpha^\circ / 180^\circ$$

- Длина хорды m , стягивающей дугу радиуса r , с центральным углом

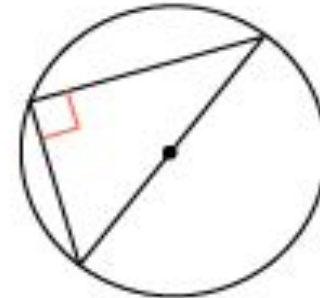
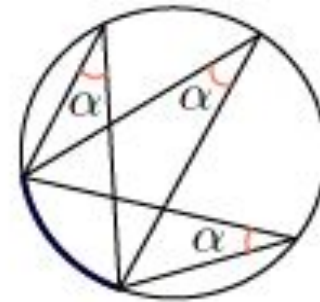
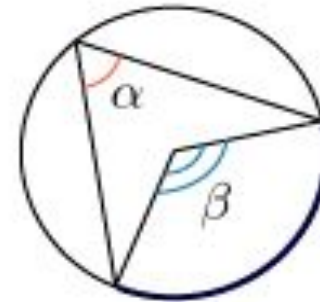
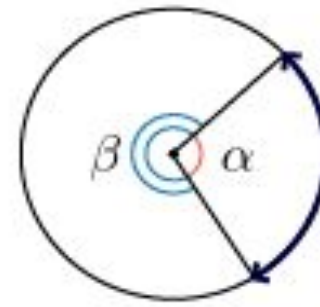
$$m = 2r \sin(\alpha/2)$$

вычис



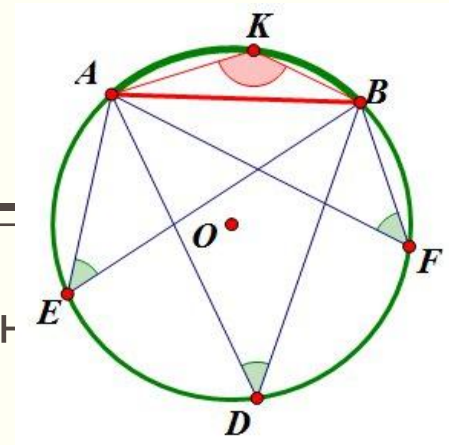
Углы в окружности

- Угол, **вершина** которого лежит в **центре** окружности, называется **центральный**. Величина центрального угла **равна** угловой **величине дуги**, на которую он опирается. (Угол β тоже можно назвать центральным. Только он опирается на дугу, которая больше 180° .)
- Угол, **вершина** которого лежит **на окружности**, а **стороны пересекают** окружность, называется **вписанным**. Величина вписанного угла **равна половине центрального угла**, опирающегося на ту же дугу, или **половине дуги**, на которую он опирается.
- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- **Вписанный угол**, опирающийся на **диаметр**, - **прямой**.



Углы в окружности

- Вписанные углы, опирающиеся на одну хорду **равны** или их сумма равна **180°** . ($\angle ADB + \angle AKB = 180^\circ$; $\angle ADB = \angle AEB = \angle AFB$)

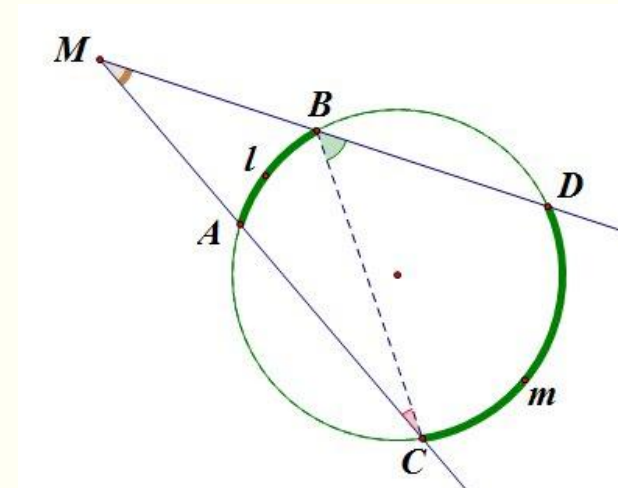
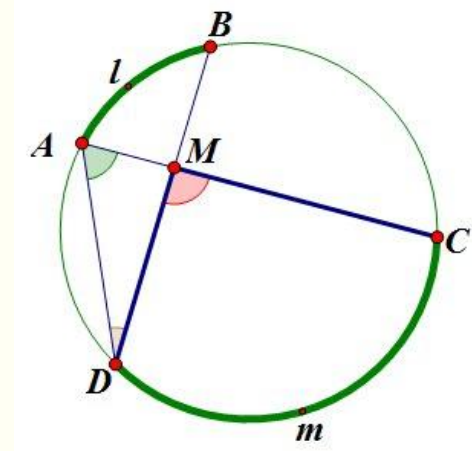


- Угол с вершиной **внутри** окружности **равен полусумме** угловых величин дуг окружности, заключенных внутри данного угла и внутри вертикального угла.

$$\angle DMC = \angle ADM + \angle DAM = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{mC} + \overset{\frown}{AIB})$$

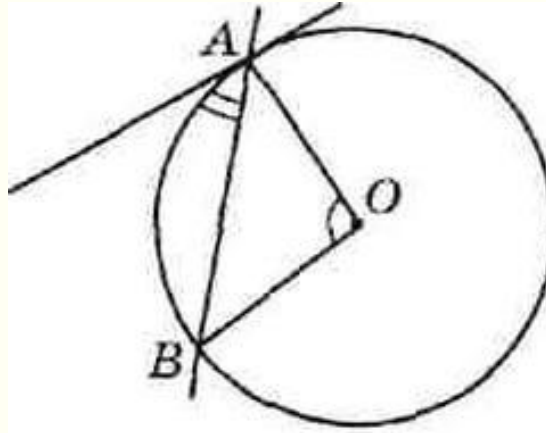
- Угол с вершиной **вне** окружности **равен полуразности** угловых величин дуг окружности, заключенных внутри угла.

$$\angle M = \angle CBD - \angle ACB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{mc} - \overset{\frown}{AIB})$$



Свойства углов, связанных с окружностью

- Угол, образованный касательной к окружности и секущей, проведенной через точку касания, равен половине дуги, заключенной между его сторонами.



Длины и площади в круге

- Длина окружности C радиуса R вычисляется по формуле πR .

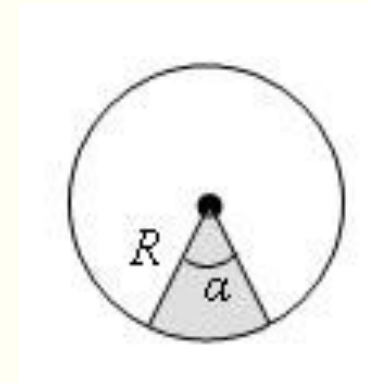
$$C = 2$$

- Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле πR^2

$$S =$$

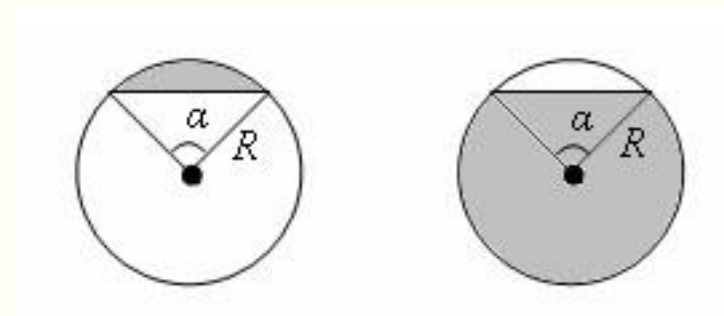
- Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha$$



- Площадь кругового сегмента вычисляется по формуле

$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha \pm S_{\Delta}$$



Каждая из трёх окружностей радиуса r касается двух других.
Найдите площадь фигуры, расположенной вне окружностей и
ограниченной их дугами, заключёнными между точками касания.

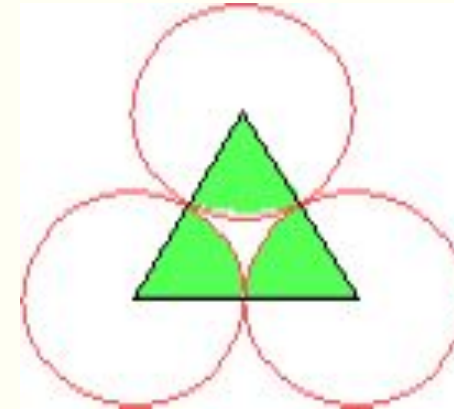
Искомая площадь равна разности площадей
равностороннего треугольника с вершинами в центрах
окружностей и трёх секторов данных окружностей.
Стороны треугольника равны $2r$.
Из формулы

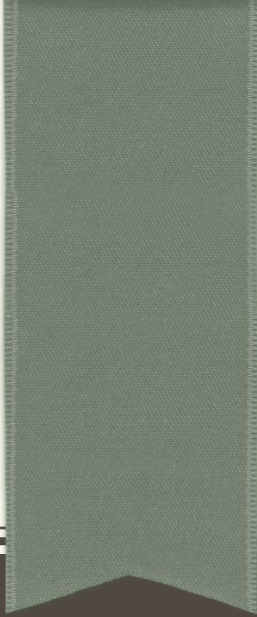
$$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \alpha$$

площадь каждого сектора составляет шестую часть
площади круга.

Следовательно, искомая площадь равна:

$$r^2\sqrt{3} - (3\pi r^2)/6 = r^2(\sqrt{3} - \pi/2)$$





ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ОКРУЖНОСТИ

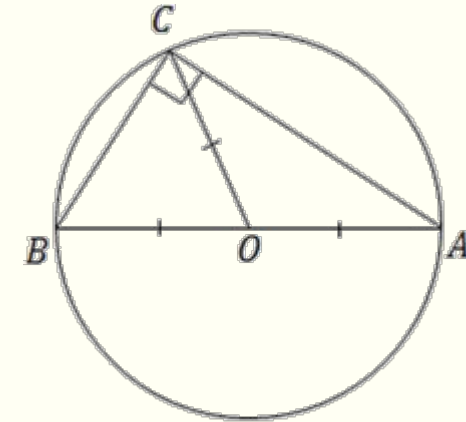
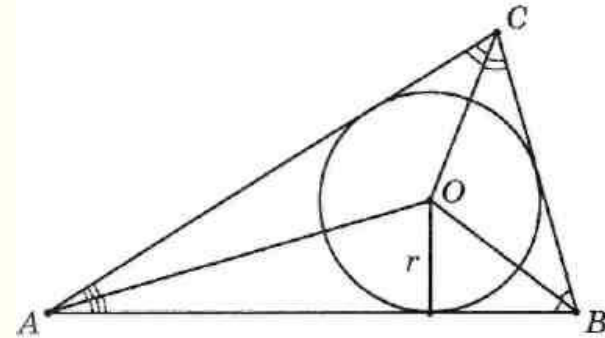
Окружность и треугольник

- **Центр** вписанной окружности — **точка** пересечения **биссектрис** треугольника, ее радиус r вычисляется по формуле:
 $r = S/p$
- **Центр** описанной окружности — **точка** пересечения серединных **перпендикуляров**, ее радиус R вычисляется по формуле:

$$R = a/2\sin\alpha = b/2\sin\beta = c/2\sin\gamma$$

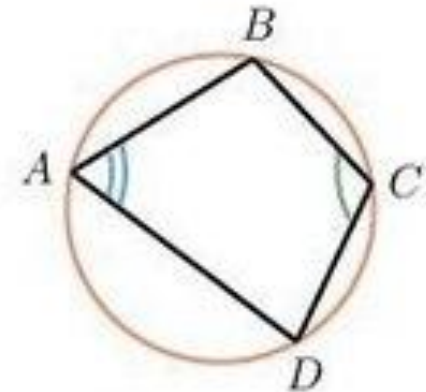
$$R = abc/4S;$$

- **Центр описанной** около **прямоугольного** треугольника окружности лежит на **середине гипотенузы**.
- **Центр описанной и вписанной** окружностей треугольника **совпадают** только в том случае, когда этот треугольник — **правильный**.

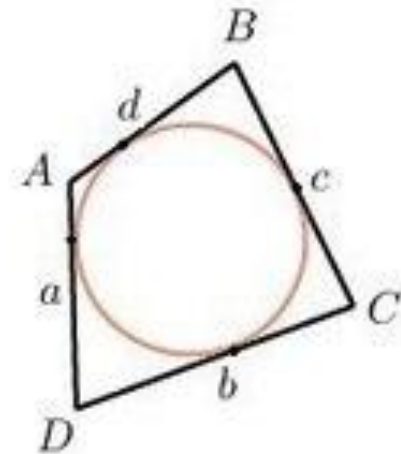


Окружность и четырехугольники

- около **выпуклого** четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда **сумма** его внутренних **противоположных углов** равна **180°** :
- в четырехугольник **можно вписать** окружность тогда и только тогда, когда у него **равны суммы противоположных сторон**:



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$



$$a + c = b + d$$

Окружность и четырехугольники

- около **параллелограмма можно описать** окружность тогда и только тогда, когда он является **прямоугольником**;
- **около трапеции** можно описать окружность тогда и только тогда, когда эта трапеция — **равнобедренная**; **центр окружности** лежит на **пересечении оси симметрии** трапеции с **серединным перпендикуляром к боковой** стороне;
- в **параллелограмме можно вписать** окружность тогда и только тогда, когда он является **ромбом**.