

ЛЕКЦИЯ 5.1

ДИНАМИКА

ТВЕРДОГО ТЕЛА

Уравнение вращения твердого тела
вокруг неподвижной оси. Момент
инерции

Уравнения движения твердого тела

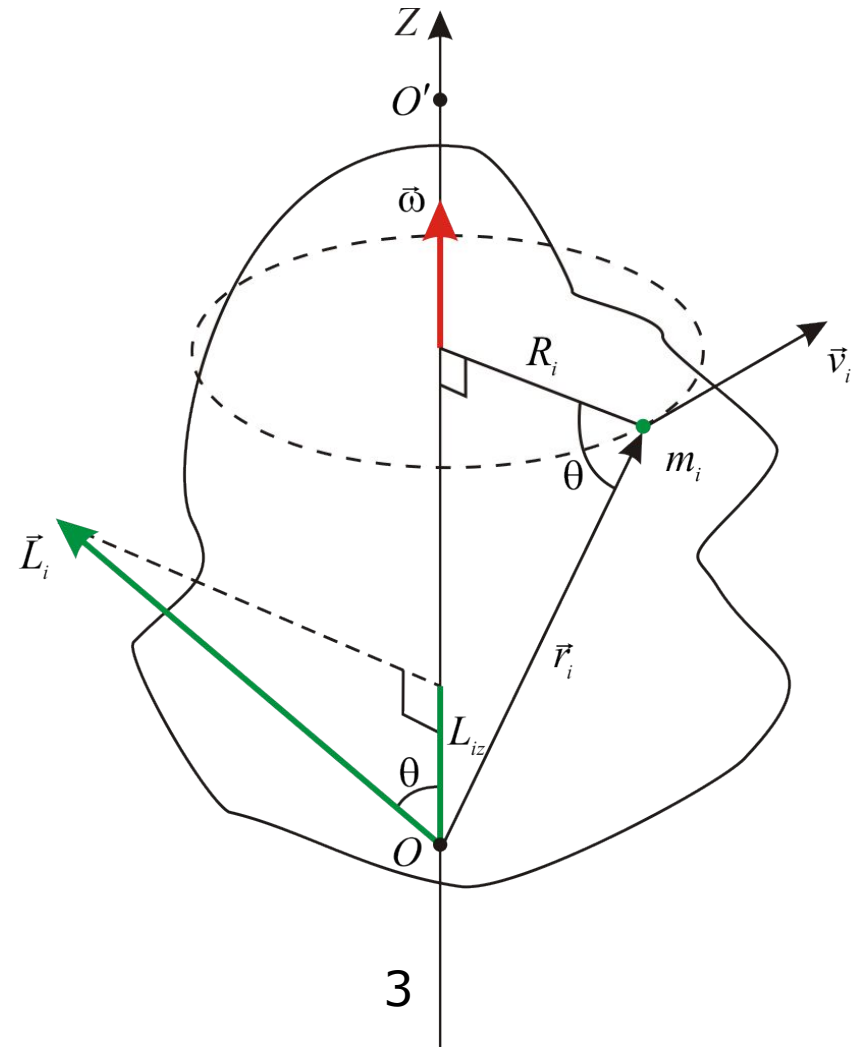
- Для описания твердого тела (как системы частиц) имеются два уравнения – **уравнение движения центра масс** и **уравнение моментов**:

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \sum_i \vec{F}_{\text{внеш}} ;$$
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{\text{внеш}} .$$

- Здесь $\vec{v}_C$ – скорость центра масс, $\vec{L}$ – момент импульса системы, $\vec{F}_{\text{внеш}}$ – равнодействующая всех внешних сил, $\vec{M}_{\text{внеш}}$ – момент равнодействующей всех внешних сил (или сумма моментов всех внешних сил).

Связь момента импульса твердого тела с угловой скоростью вращения

- Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω . Найдем проекцию на ось Z момента импульса тела относительно произвольной точки O этой оси.
- Для этого мысленно разделим все тело на большое число частиц массами m_i . Положение каждой из частиц в пространстве задается радиусом-вектором $\vec{r}_i$, проведенным из точки O .
- Траекторией каждой точки является окружность радиусом $R_i = r_i \cos \theta$ с центром на оси вращения; при этом скорость частицы при движении по окружности $\vec{v}_i$.



Связь момента импульса твердого тела с угловой скоростью вращения

- По определению, момент импульса $\mathbf{L}_i$ i -й частицы относительно точки O равен:

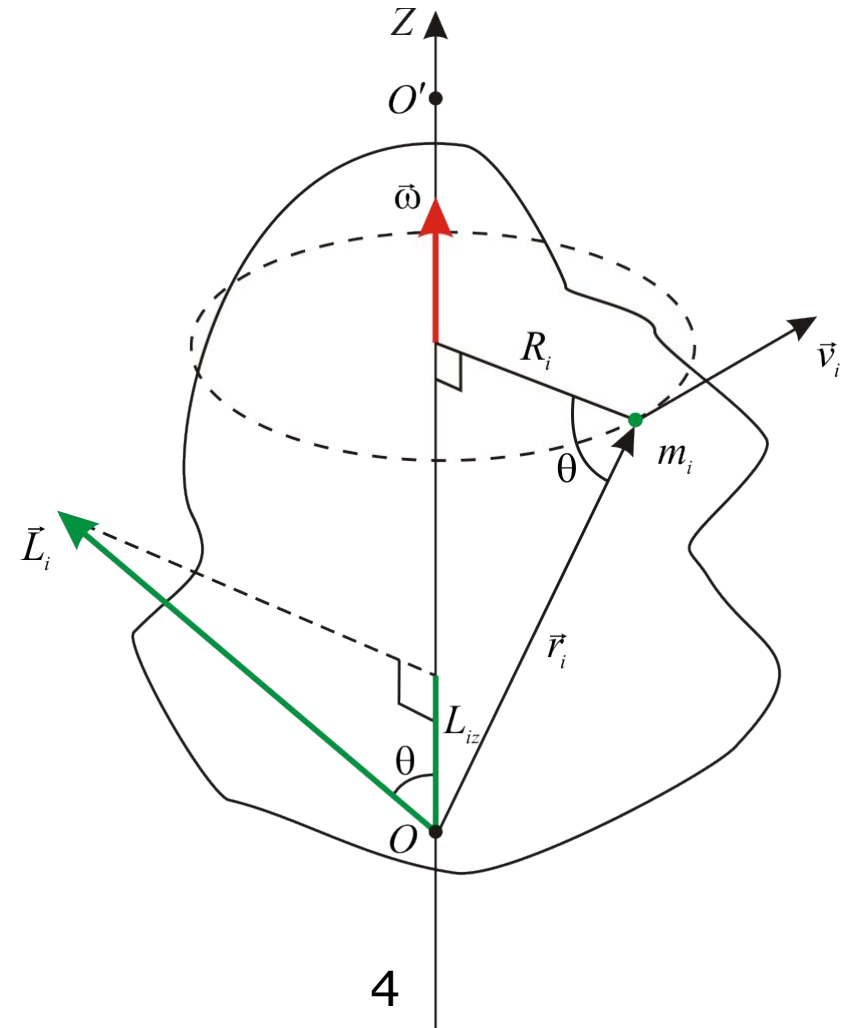
$$\mathbf{L}_i = [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i] = m_i [\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i]$$

- Проекция на ось Z вектора $\mathbf{L}_i$:

$$\begin{aligned} L_{iz} &= L_i \cos \theta = m_i r_i v_i \sin 90^\circ \cos \theta = \\ &= m_i r_i \cdot \omega_z R_i \cos \theta = m_i R_i^2 \omega_z \end{aligned}$$

- Тогда

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega_z \sum_i m_i R_i^2$$



Момент инерции твердого тела

- **Моментом инерции** твердого тела относительно оси Z называется величина:

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

Здесь m_i — масса i -й частицы тела; R_i — расстояние от этой частицы до оси Z .

Поскольку любое реальное твердое тело плотности ρ и объемом V есть совокупность бесконечно большого числа частиц, то

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \int_V R^2 dm = \int_V \rho R^2 dV$$

Физический смысл и свойства момента инерции

- Момент инерции I характеризует распределение массы тела по его объему.
- Эта величина представляет собой *количественную меру инертности твердого тела по отношению к любым попыткам изменить угловую скорость твердого тела.*
- Момент инерции — величина *аддитивная*: момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции его частей, рассчитанных относительно той же оси.

Моменты инерции некоторых симметричных твердых тел

Форма тела	Положение оси вращения	Момент инерции I
Материальная точка массой m	Проходит на расстоянии r от точки	mR^2
Однородный тонкий стержень длиной l и массой m	Проходит через середину стержня перпендикулярно его оси	$(1/12)ml^2$
	Проходит через один из концов стержня перпендикулярно его оси	$(1/3)ml^2$
Однородный диск (сплошной цилиндр) радиусом R и массой m	Проходит перпендикулярно плоскости диска (совпадает с осью цилиндра)	$(1/2)mR^2$
Однородный диск радиусом R и массой m	Проходит вдоль диаметра диска	$(1/4)mR^2$
Однородный тонкостенный полый цилиндр (труба, обруч) радиусом R и массой m	Совпадает с осью цилиндра (проходит перпендикулярно плоскости обруча)	mR^2
Однородный шар радиусом R и массой m	Проходит через центр шара	$(2/5)mR^2$
Тонкая прямоугольная пластина массой m со сторонами a и b	Проходит перпендикулярно пластине через точку пересечения диагоналей	$(1/12)m(a^2 + b^2)$

Связь между угловой скоростью вращения твёрдого тела и моментом импульса

- Таким образом, с учетом определения момента инерции, проекция на ось Z момента импульса тела равна:

$$L_z = I\omega_z$$

- Проекция момента импульса тела L_z на ось Z не зависит от положения точки O на этой оси (поскольку I и ω_z также не зависят от положения точки O).

Связь между угловой скоростью вращения твёрдого тела и моментом импульса

- Если твёрдое тело вращается вокруг оси Z , являющейся осью симметрии этого тела, или осью, перпендикулярной оси симметрии, последнее выражение можно записать в векторном виде:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

- В остальных случаях $\vec{L} \neq I\vec{\omega}$.

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

- Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси Z . Обозначим через $\mathbf{L}$ момент импульса тела относительно произвольной точки O оси Z , а через $\mathbf{M}$ – сумму моментов всех приложенных к нему внешних сил.
- Для твердого тела как системы материальных точек справедливо уравнение моментов:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$$

- Перепишем его в проекции на ось Z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

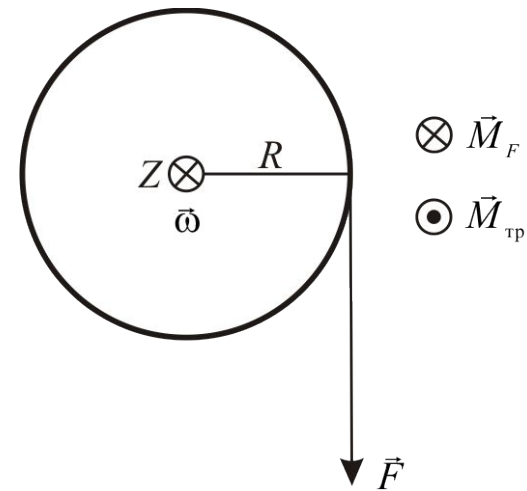
- Поскольку, как было показано выше, проекция на ось Z момента импульса тела равна $L_z = I\omega_z$, то подставляя это выражение в уравнение моментов, получим **уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:**

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_z \Leftrightarrow I\varepsilon_z = M_z$$

- Здесь I – момент инерции твердого тела относительно оси Z , $\varepsilon_z = d\omega_z/dt$ – проекция на ось Z вектора углового ускорения тела, M_z – проекция на ось Z момента всех внешних сил.

Пример использования уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

▣ *Пример.* Однородный цилиндр массы m и радиуса R может вращаться с трением вокруг неподвижной оси Z , совпадающей с его осью симметрии. На цилиндр намотана тонкая нерастяжимая невесомая нить, за которую начинают тянуть с постоянной силой F . Найти угловые скорость и ускорение цилиндра, если во время вращения на цилиндр действует постоянный момент силы трения $M_{\text{тр}}$.



Пример использования уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

- Направим ось Z от нас в плоскость чертежа и запишем уравнение динамики вращения твердого тела:

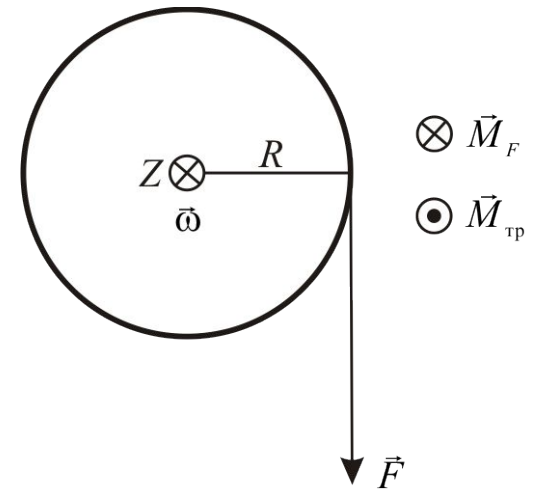
$$I\varepsilon_z = M_z \Leftrightarrow \frac{1}{2}mR^2 \cdot \varepsilon_z = RF - M_{\text{тр}}$$

- Тогда угловое ускорение цилиндра:

$$\varepsilon_z = \frac{2(RF - M_{\text{тр}})}{mR^2}$$

- Угловая скорость цилиндра:

$$d\omega_z = \varepsilon_z dt \Rightarrow \omega_z = \int_0^t \varepsilon_z dt = \int_0^t \frac{2(RF - M_{\text{тр}})}{mR^2} dt = \frac{2(RF - M_{\text{тр}})}{13 mR^2} t$$

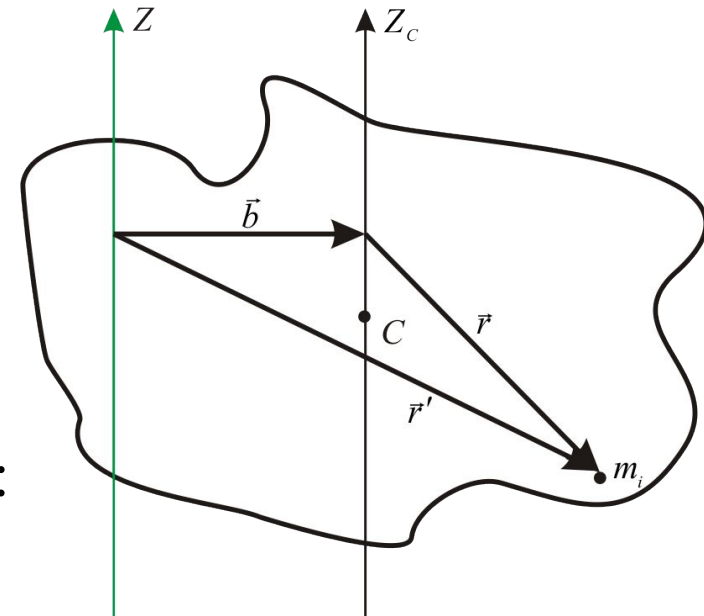




Теорема Гюйгенса – Штейнера

Связь между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс

- Мысленно разделим тело на частицы массами m_i ; к каждой частице проведем радиусы-векторы $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}'_i$, перпендикулярные осям Z_C и Z .
- Учтем в дальнейшем, что $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{b}$.
- Момент инерции относительно оси Z :



$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i (r_i + b)^2 = \sum_i (m_i r_i^2 + 2m_i r_i b + m_i b^2) = \\ &= \sum_i m_i r_i^2 + 2b \cdot \sum_i m_i r_i + b^2 \sum_i m_i = I_C + 2b \cdot m r_C + m b^2 \end{aligned}$$

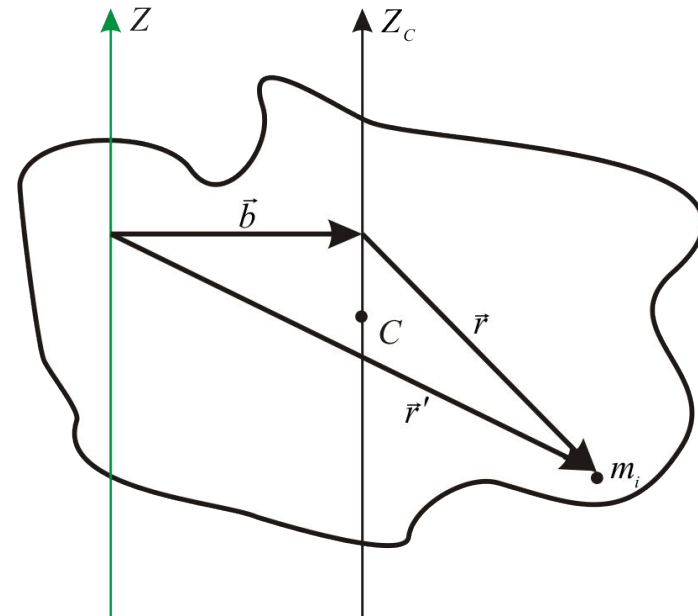
Связь между моментами инерции твердого тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс

$$I = I_C + 2\vec{b} \cdot m\vec{r}_C + mb^2$$

- Поскольку центр масс C лежит на оси Z_C тела, то, очевидно, $\vec{r}_C = 0$. Тогда:

$$I = I_C + mb^2$$

- Это равенство выражает **теорема Гюйгенса – Штейнера** о параллельном переносе оси момента инерции: *момент инерции I тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями.*



Примеры использования теоремы Гюйгенса - Штейнера

▣ *Пример 1.* Зная момент инерции тонкого стержня массы m и длины l относительно оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его середину (центр масс) $I = (1/12)ml^2$, найдем момент инерции стержня относительно параллельной оси, проходящей через один из концов стержня:

$$I = I_C + mb^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

Примеры использования теоремы Гюйгенса - Штейнера

- ▣ *Пример 2.* Зная момент инерции однородного шара массы m и радиуса R относительно оси, проходящей через его центр (центр масс) $I = (2/5)mR^2$, найдем момент инерции шара относительно оси, касательной к поверхности шара:

$$I = I_C + mb^2 = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



Кинетическая энергия и работа
внешних сил при вращении твердого
тела вокруг неподвижной оси

Кинетическая энергия твердого тела

- Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω . Разделим мысленно тело на частицы массами m_i .
- Траекторией каждой из частиц является окружность с центром на оси вращения, лежащая в перпендикулярной к оси вращения плоскости. Обозначим скорость каждой из частиц $v_i = \omega R_i$.
- Кинетическая энергия K твердого тела равна сумме кинетических энергий составляющих его частиц:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i R_i^2 = \frac{I \omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия твердого тела

- Таким образом, **кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна:**

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

- Здесь I – момент инерции тела относительно оси вращения.

Работа внешней силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- Пусть на вращающееся вокруг неподвижной оси Z твёрдое тело действует внешняя сила $\mathbf{F}$, проекция на ось Z момента $\mathbf{M}$ которой равна M_z . Найдём выражение для работы A силы, снова рассматривая твёрдое тело как систему частиц.
- По теореме о кинетической энергии элементарная работа δA всех сил, действующих на частицы, равна бесконечно малому приращению кинетической энергии dK системы:

$$\delta A = dK$$

- Примем без доказательства, что элементарная работа всех *внутренних* сил равна нулю.

Работа внешней силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- Тогда **теорема о кинетической энергии** применительно к твёрдому телу звучит так: *работа всех приложенных к твёрдому телу внешних сил равна приращению его кинетической энергии:*

$$\delta A_{\text{внеш}} = dK$$

$$dK = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I\omega_z^2}{2}\right) = I\omega_z d\omega_z$$

- Согласно уравнению вращения твёрдого тела вокруг неподвижной оси:

$$I \frac{d\omega_z}{dt} = M_{z,\text{внеш}} \Leftrightarrow Id\omega_z = M_{z,\text{внеш}} dt$$

Работа внешней силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси

- Тогда элементарное приращение кинетической энергии твёрдого тела:

$$dK = I\omega_z d\omega_z = M_{z,\text{внеш}} \omega_z dt = M_{z,\text{внеш}} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot dt = M_{z,\text{внеш}} d\varphi$$

- Здесь φ – угловая координата, $d\varphi$ – угол, на который поворачивается тело за бесконечно малый промежуток времени dt .
- Таким образом,

$$\delta A_{\text{внеш}} = M_{z,\text{внеш}} d\varphi \qquad A_{\text{внеш}} = \int_0^{\varphi} M_{z,\text{внеш}} d\varphi$$

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА



Динамика плоского движения твердого
тела

Плоское движения твердого тела

- Напомним, что **плоским движением твердого тела** называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются, оставаясь в параллельных друг другу неподвижных плоскостях.
- В качестве примера в дальнейшем рассмотрим движение цилиндрического тела, скатывающегося по наклонной плоскости.
- Как уже было сказано ранее, плоское движение можно рассматривать как совокупность двух видов движения:
 - поступательного движения вместе с произвольной точкой тела;
 - вращения вокруг оси, проходящей через эту точку.

Плоское движения твердого тела

- В качестве точки рассмотрим центр масс тела. Тогда, в соответствии с теоремой о движении центра масс и уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, можно записать:

$$m \frac{dv_C}{dt} = F;$$

$$I \varepsilon_z = M_z$$

Здесь m — масса тела; v_C — скорость центра масс; F — сумма всех внешних сил, приложенных к телу; I — момент инерции тела относительно оси вращения Z , проходящей через центр масс; ε_z — проекция на ось Z углового ускорения тела; M_z — проекция на ось Z суммы моментов всех внешних сил.