

Векторы

Напомним, что **вектором** называется направленный отрезок, т.е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ и изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B .

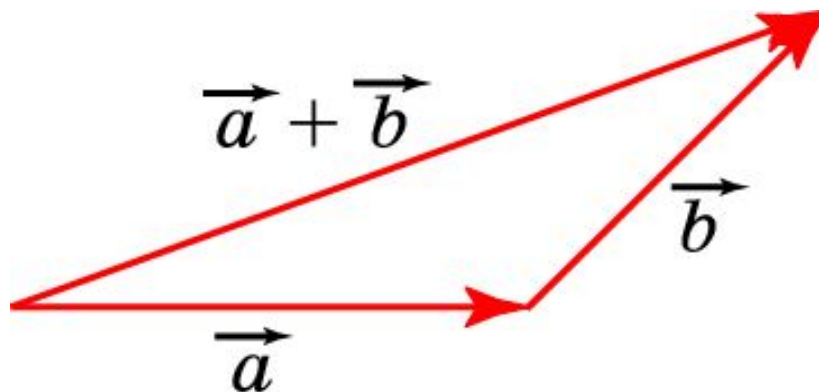
Длиной, или **модулем**, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов $\overrightarrow{AB}$ обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{a}|$.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и направление.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

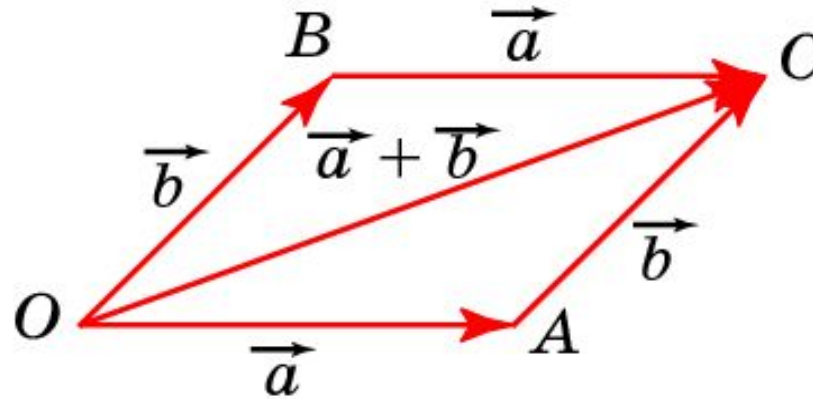
Сложение векторов

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор $\vec{b}$ откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$. Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец - с концом вектора $\vec{b}$, называется **суммой** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

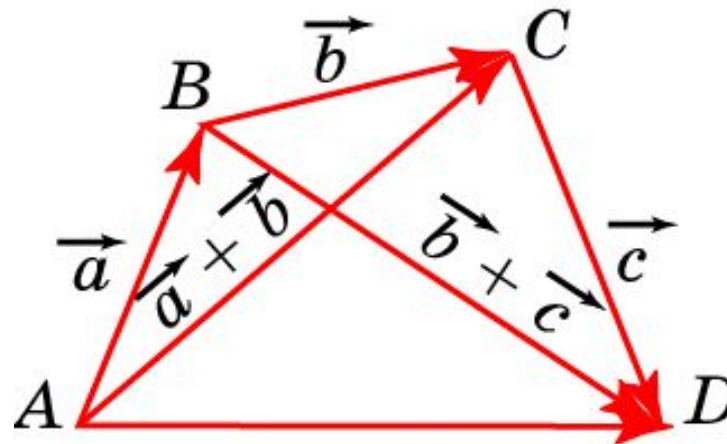


Свойства сложения векторов

Свойство 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).

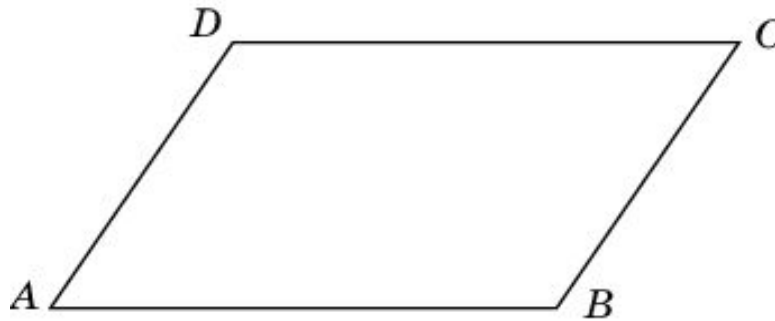


Свойство 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).



Пример

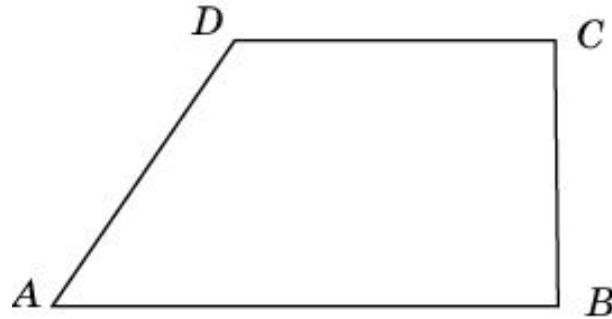
Сколько различных векторов задают пары вершин параллелограмма $ABCD$?



Ответ: Восемь векторов.

Упражнение 1

Сколько различных векторов задают стороны трапеции $ABCD$?

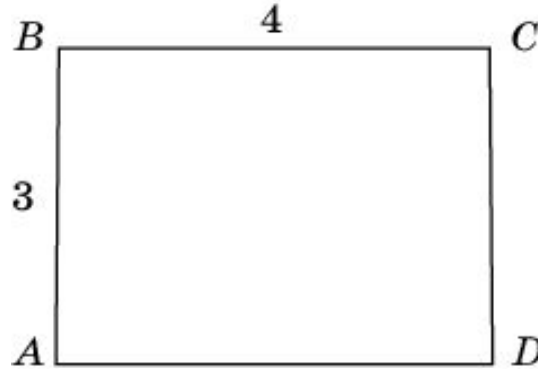


Ответ: Восемь векторов.

Упражнение 2

В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

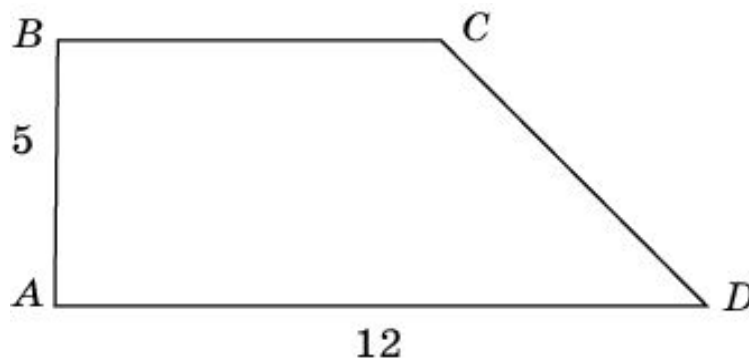
Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{DC}$;
г) $\overrightarrow{AC}$; д) $\overrightarrow{DB}$.



Ответ: а) 3 см;
 б) 4 см;
 в) 3 см;
 г) 5 см;
 д) 5 см.

Упражнение 3

Основание AD трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45^\circ$. Найдите длины векторов: а) $\overrightarrow{BD}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AC}$.



Ответ: а) 13 см;
б) $5\sqrt{2}$ см;
в) $\sqrt{74}$ см.

Упражнение 4

В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Равны ли векторы: а)

$\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC}$

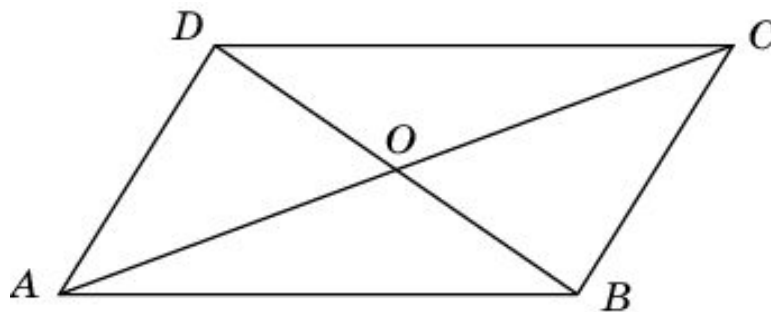
$\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{AC}$

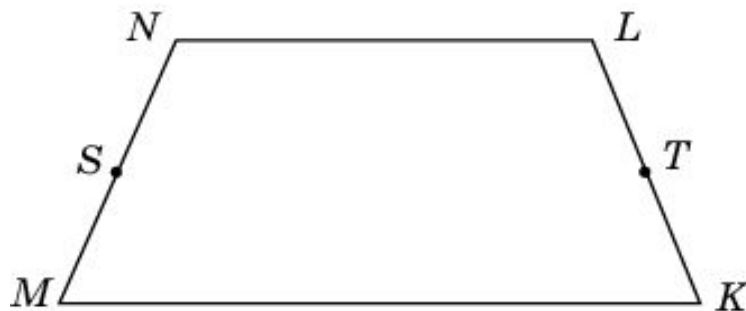
$\overrightarrow{BD}$



Ответ: а) Да;
б) нет;
в) да;
г) нет.

Упражнение 5

Точки S и T являются серединами боковых сторон соответственно MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; б) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; в) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{LM}$; г) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?



Ответ: а) Да;
б) нет;
в) нет.
г) да.

Упражнение 6

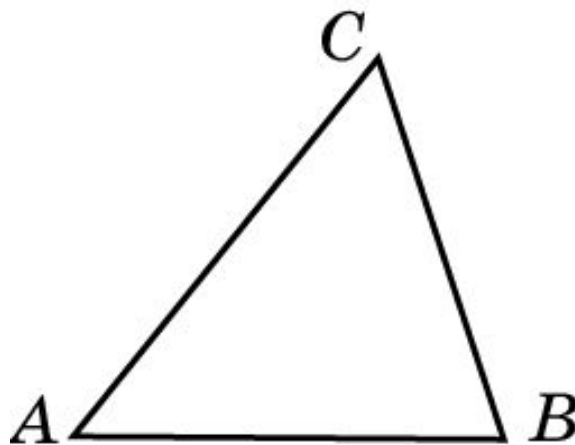
В треугольнике ABC укажите векторы:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$;

в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.



Ответ: а) $\overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{CA}$;

в) $\overrightarrow{CB}$;

г) $\overrightarrow{CA}$.

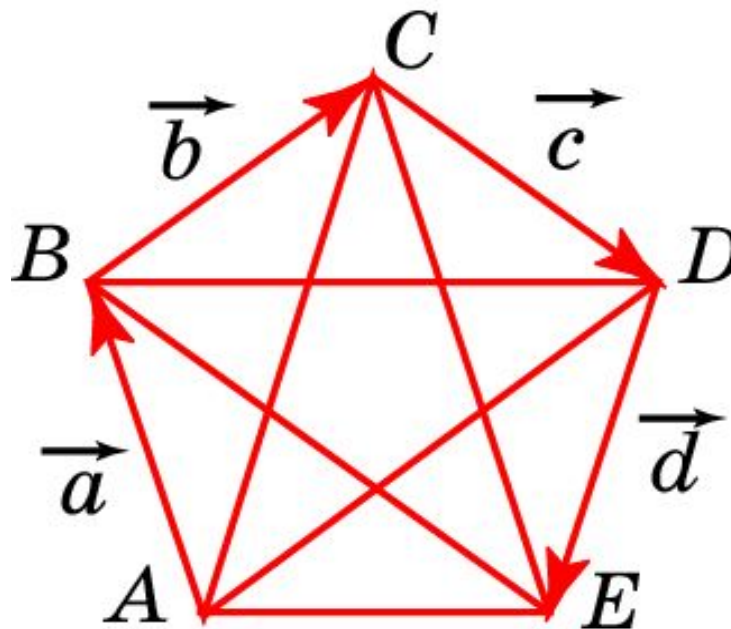
Упражнение 7

На рисунке укажите векторы:

а) $\vec{a} + \vec{b}$;

б) $\vec{c} + \vec{d}$;

в) $\vec{b} + \vec{c}$.



Ответ: а) $\vec{AC}$;

б) $\vec{CE}$;

в) $\vec{BD}$.

Упражнение 8

A, B, C, D - произвольные точки плоскости.

Выразите через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$, $\vec{b} = \vec{BC}$, $\vec{c} = \vec{CD}$ векторы: а) $\vec{AD}$; б) $\vec{BD}$; в) $\vec{AC}$.

$B.$

$A.$

$C.$

$D.$

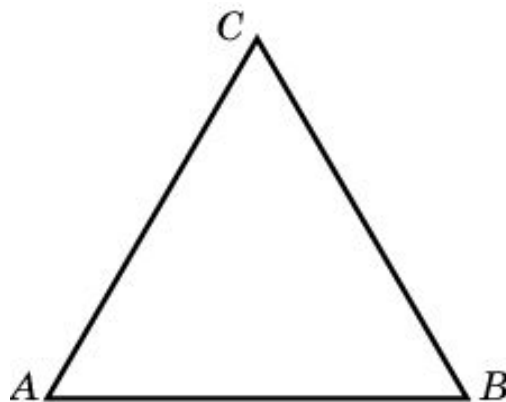
Ответ: а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

б) $\vec{b} + \vec{c}$;

в) $\vec{a} + \vec{b}$.

Упражнение 9

Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Найдите: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$.



Ответ: а) a ;

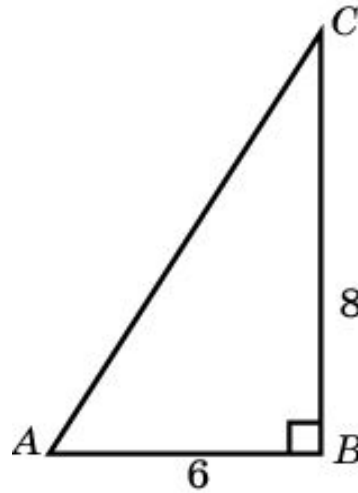
б) $a\sqrt{3}$;

в) $a\sqrt{3}$.

Упражнение 10

В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle B = 90^\circ$.

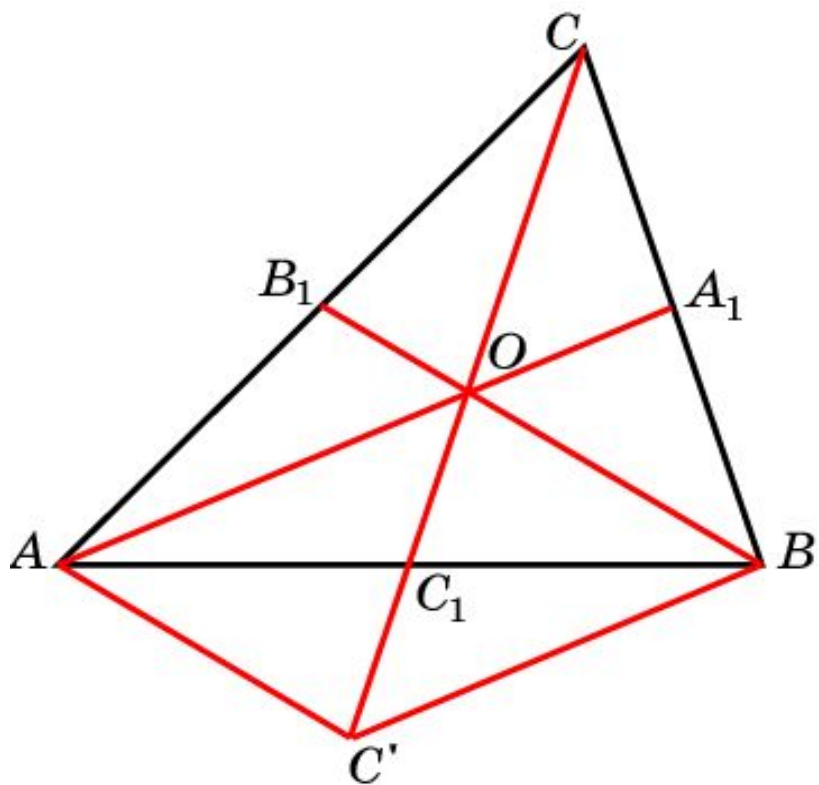
Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|$;
г) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.



Ответ: а) 14;
б) 10;
в) 14;
г) 10.

Упражнение 11*

Стороны треугольника ABC равны a, b, c . O – точка пересечения медиан. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.



Решение: Продолжим медиану CC_1 и отложим отрезок $C_1C' = OC_1$. $AOB'C'$ – параллелограмм, $OC' = 2OC_1 = OC$.

Следовательно,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OC} \text{ и, значит,}$$
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}.$$