

ВЕКТОРЫ

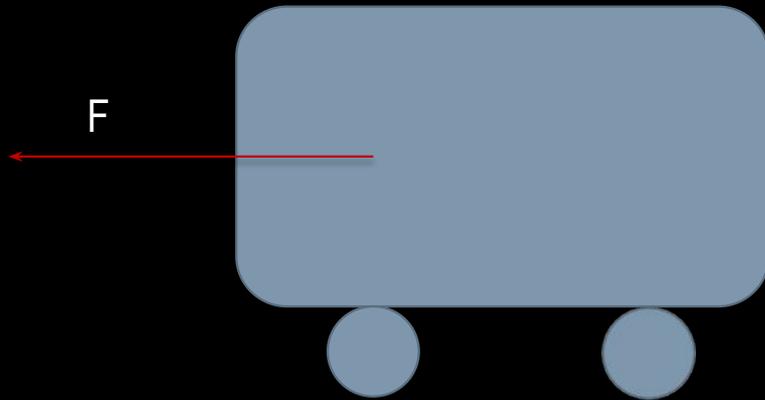
Шамсутдинов Никита 9 «Г»

СКАЛЯРЫ. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА.

Мы знаем, что есть 2 вида величин. Например, длина, площадь, объем, масса и прочие полностью определяются заданием своих численных величин. Такие величины называются скалярными величинами или просто скалярами.

Но многие физические величины, например, сила, давление, скорость, перемещение и т.д. характеризуются не только своим числовым значением, то и направлением в пространстве. Такие физические величины называются векторными величинами или просто Векторами. Например, если на какое-либо тело воздействовать определенной силой, то эта сила изображается направленным отрезком. (см рис. на след.слайде) Длина отрезка соответствует численной величине силы, а стрелка указывает на направление воздействия силы.

BEKTOP



ВЕКТОРЫ В ГЕОМЕТРИИ

Аналогично можно ввести понятие геометрического вектора. В отличие от физических векторов, векторы в геометрии не имеют конкретной природы (т.е. не выражают силу, скорость и т.п.). Геометрические векторы рассматриваются просто как «направленные отрезки».

*Любой направленный отрезок называется **вектором**.*

В геометрии также рассматривают вектор, в котором начало и конец совпадают. Такой вектор называется **нулевым вектором**. Отсюда следует, что любую точку плоскости можно рассматривать как нулевой вектор. Нулевой вектор обозначается так: 0

НАЧАЛО И КОНЕЦ ВЕКТОРА

Любой отрезок имеет 2 конца. Назовем один из этих концов **начальной точкой**, или **началом**, а другой – **концом** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу. Конец вектора изображается стрелкой.

A \xrightarrow{a} B

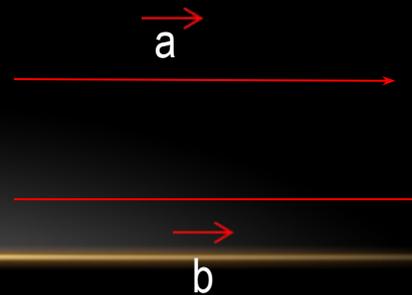
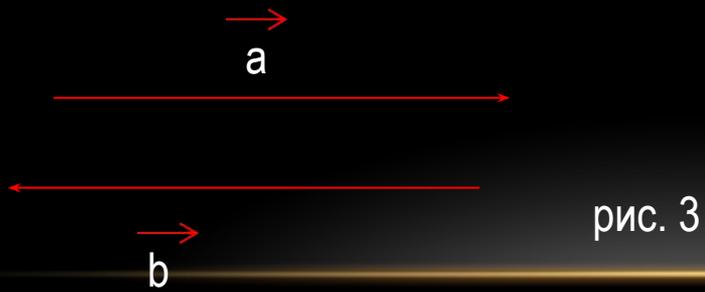
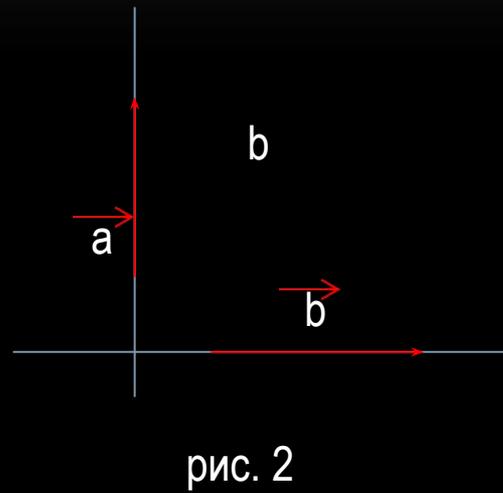
Векторы можно обозначать двумя заглавными латинскими буквами (\overrightarrow{AB}) или одной строчной (\vec{a}) \rightarrow

РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Длину отрезка \overrightarrow{AB} называют *модулем* вектора \overrightarrow{AB} и обозначают так: $|\overrightarrow{AB}|$. Аналогично, модуль (длина) вектора a также записывают через $|a|$. Например, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|a|=7$.

Если отрезок AB лежит на прямой a , то говорят, что вектор \overrightarrow{AB} также лежит на прямой a .

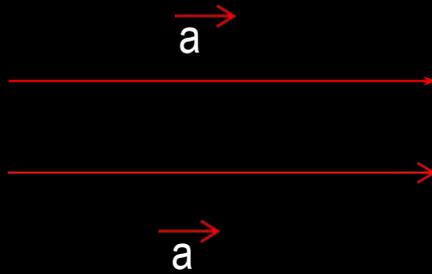
Если 2 вектора лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то такие векторы называются **коллинеарными**. Коллинеарность векторов a и b записывают так $a \parallel b$. (см рис. 1 на след. слайде)



Если векторы \vec{a} и \vec{b} лежат на перпендикулярных прямых, то их называют **перпендикулярными** (ортогональными) векторами и записывают $\vec{a} \perp \vec{b}$. (см рис. 2)

Если коллинеарные векторы имеют одинаковые направления, то их называют **сонаправленными** векторами. Сонаправленность векторов \vec{a} и \vec{b} записывают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Если векторы \vec{c} и \vec{d} коллинеарны и имеют разные направления, то их называют **противоположно направленными** и записывают так: $\vec{c} \nabla \vec{d}$. (см рис. 3)

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их модули равны. Иными словами, если $\vec{a} = \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то векторы \vec{a} и \vec{b} называются **равными**, т.е. $\vec{a} = \vec{b}$.



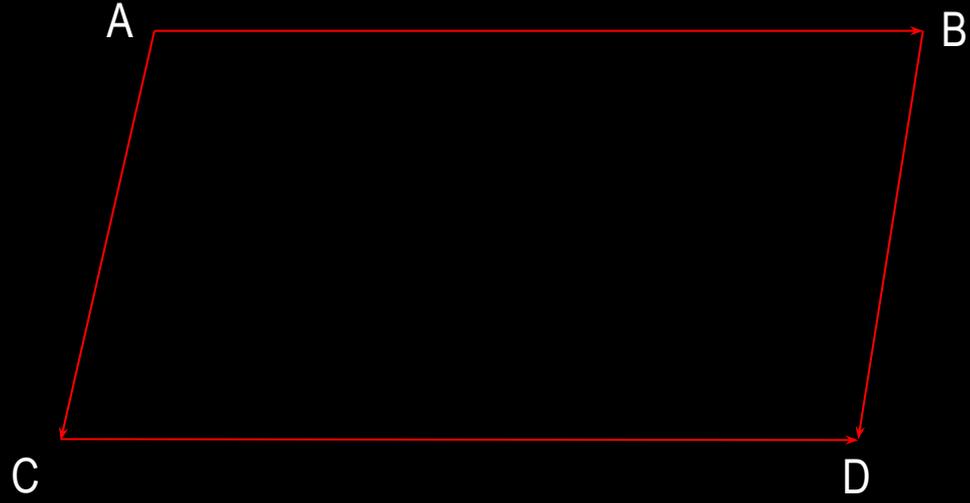
СВОЙСТВА РАВНЫХ ВЕКТОРОВ

Теорема. Равные векторы можно совместить параллельным переносом, и, наоборот, если векторы совмещаются параллельным переносом, то эти векторы равны.

Доказательство. Пусть векторы \vec{AB} и \vec{CD} равны (см. рис. на след. слайде). Тогда по определению $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ и $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$, т.е. четырехугольник ABCD является параллелограммом, т.к. противоположные стороны AB и CD параллельны и равны. Следовательно, $AC = BD$ и $AC \parallel BD$, т.е. $\vec{AC} = \vec{BD}$. Это значит, что векторы \vec{AB} и \vec{CD} можно совместить параллельным переносом. При этом точка A переходит в точку C, а точка B переходит в точку D.

Обратно, пусть векторы \vec{AB} и \vec{CD} совмещаются некоторым параллельным переносом и при этом точка A переходит в точку C, а точка B – в D. Тогда по определению параллельного переноса $AC = BD$ и $AC \parallel BD$, т.е. ABCD – параллелограмм. Следовательно, $\vec{AB} \parallel \vec{CD}$ и $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$. Так как при параллельном переносе начало вектора \vec{AB} переходит в начало \vec{CD} , а конец \vec{AB} – в конец \vec{CD} , то $\vec{AB} = \vec{CD}$, т.е. $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Ч.т.д.



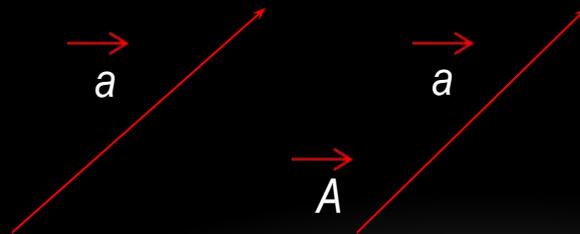
СЛЕДСТВИЯ

Следствие 1. Если $AB=CD$, то $AC=BD$.



Если точка A является началом вектора a , то говорят, что вектор a отложен от точки A .

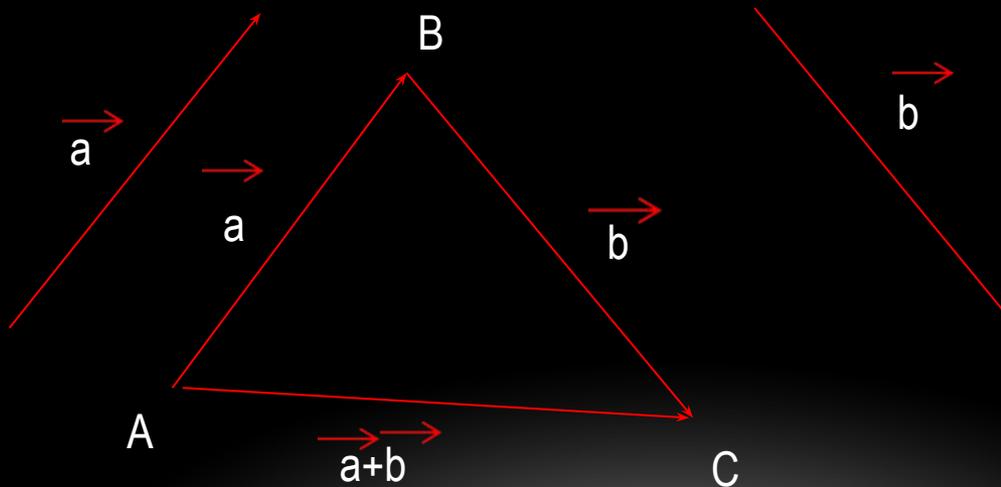
Следствие 2. От любой точки A можно отложить единственный вектор, равный данному вектору a .



СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

- Правило треугольника

Пусть даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{a} , а от точки B отложим вектор \vec{BC} , равный вектору \vec{b} . Полученный вектор \vec{AC} называют **суммой** векторов \vec{a} и \vec{b} и пишут: $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

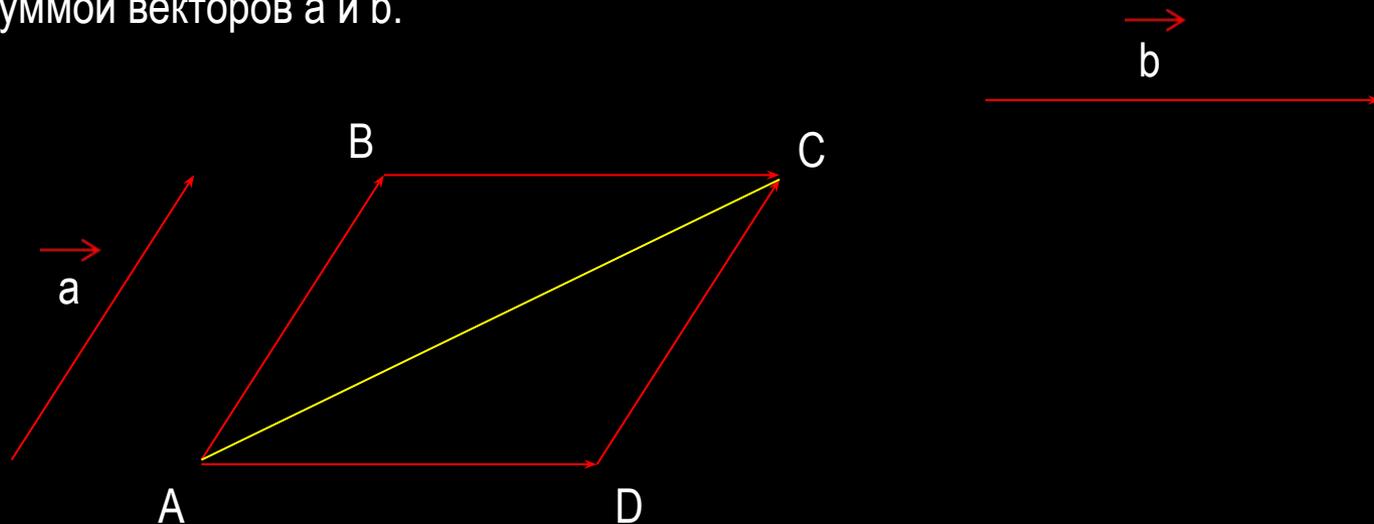


- Правило параллелограмма

Пусть даны векторы \vec{a} и \vec{b} . Отметим на плоскости точку A и отложим от этой точки вектор \vec{AB} , равный вектору \vec{a} , и вектор \vec{AD} , равный вектору \vec{b} .

Из этого построим параллелограмм $ABCD$ так, что $\vec{AB} = \vec{DC}$, а $\vec{AD} = \vec{BC}$.

Построим вектор \vec{AC} , который будет также являться диагональю $ABCD$, и будет суммой векторов \vec{a} и \vec{b} .



СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Теорема 1. Для любых векторов a , b и c верно:

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон);

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство. 1) Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны. От

некоторой точки A плоскости отложим векторы $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$. (рис 1)

Тогда получим параллелограмм $ABCD$. По правилу треугольника $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично, $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2) Отметим точку A на плоскости и отложим векторы $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$ и $\vec{CD} = \vec{c}$ (рис 2 на след слайде). Тогда $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

С другой стороны, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$. Отсюда имеем $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Ч.Т.Д.

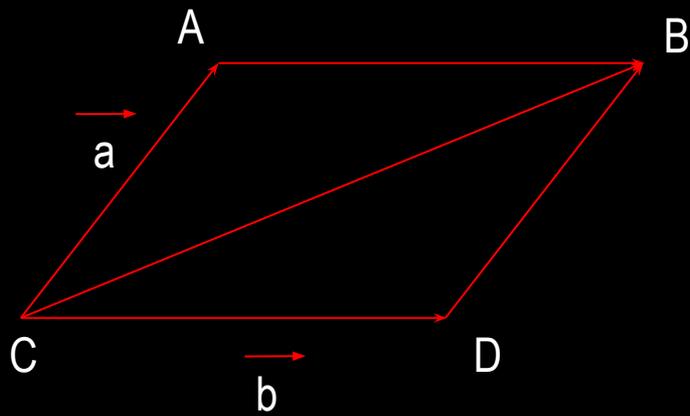


Рис 1

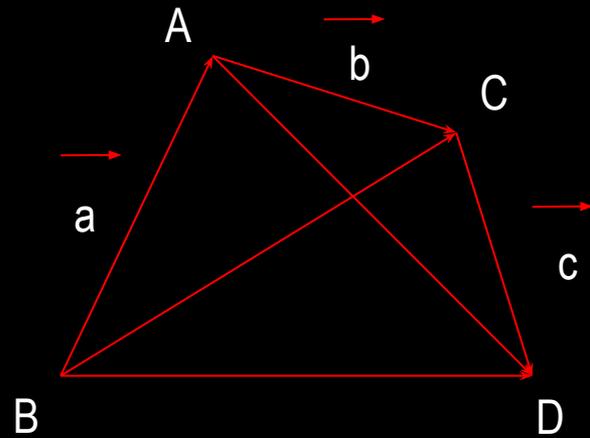
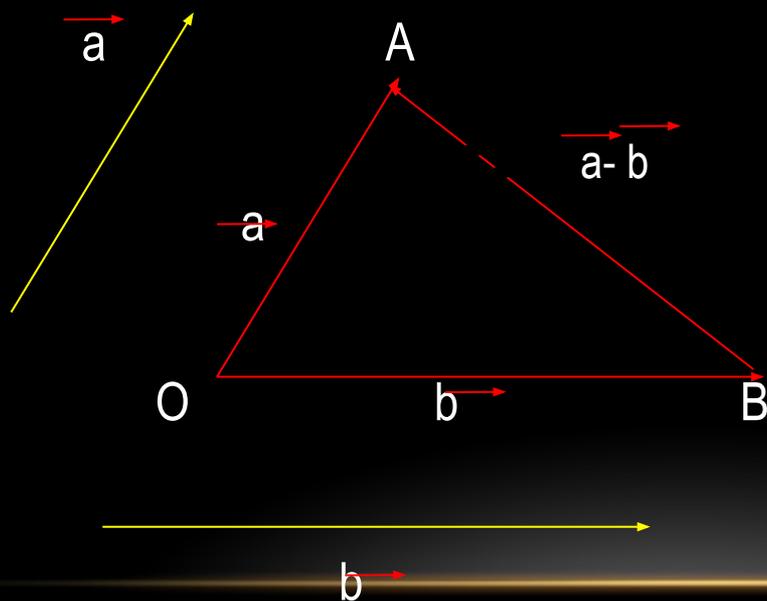


Рис 2

РАЗНОСТЬ ВЕКТОРОВ

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор, который в сумме с вектором \vec{b} равен вектору \vec{a} . Разность векторов \vec{a} и \vec{b} обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

От некоторой точки O откладываем векторы $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Тогда вектор \vec{BA} равен разности $\vec{a} - \vec{b}$. Так как $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}$, то $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}$.



УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число k называется вектор, модуль которого равен числу $|k| \cdot |\vec{a}|$ и сонаправлен с вектором \vec{a} при $k > 0$, противоположно направлен с вектором \vec{a} при $k < 0$. Произведение числа k на вектор \vec{a} записывают так: $k \cdot \vec{a}$.

Если $k=0$, то $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Теорема. Для любых чисел α, β и любых векторов \vec{a}, \vec{b} верно равенство:

1. $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (сочетательный закон);
2. $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (I распределительный закон);
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (II распределительный закон).

Доказательство 1. Если $\alpha\beta > 0$, т.е. числа α и β имеют одинаковые знаки, то вектор $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены, а если числа α и β имеют разные знаки, то векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ противоположно направлены. Поэтому при любых α, β векторы $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ и $\alpha(\beta\vec{a})$ сонаправлены. Теперь осталось показать равенство их модулей:

$$\underline{|(\alpha \cdot \beta)\vec{a}| = |\alpha\beta| \cdot |\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}| \text{ и } |\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha| |\beta\vec{a}| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|.}$$

Следовательно, $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.

Ч.Т.Д

ПРИЗНАК КОЛЛИНЕАРНОСТИ ВЕКТОРОВ

Теорема. Чтобы вектор \vec{b} был коллинеарен ненулевому вектору \vec{a} , необходимо и достаточно существование числа α такого, что $\vec{b} = \alpha \vec{a}$.

Доказательство. Если $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, то векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны по определению.

Ч.Т.Д

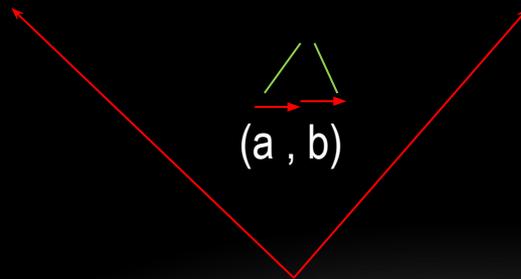
Следствие. Для того, чтобы точка C лежала на прямой AB , необходимо и достаточно, чтобы существовало число α такое, что $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$.

УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ

Углом между векторами \vec{AB} и \vec{AC} называется **угол** BAC . Углом между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b} называется угол, образованный при откладывании этих векторов от одной точки.

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} обозначают через (\vec{a}, \vec{b}) .

Если векторы сонаправлены, то угол между ними равен 0° , а если векторы противоположно направлены, то угол между ними равен 180° .



СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, т.е. скалярное произведение векторов равно числу $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

$$\varphi = (\vec{a}, \vec{b}). \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Скалярное произведение равных векторов называется **скалярным квадратом** этого вектора и обозначается через a^2 .

$$a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2, \text{ т.е. } a^2 = |\vec{a}|^2$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. Для любых векторов a и b верно равенство

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. Для любых векторов a , b и c и любого действительного числа α верно равенство

$$(\alpha a) \cdot b = \alpha (a \cdot b)$$

3. Для любых векторов a , b и c верно равенство

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ. ИСТОРИЯ ВЕКТОРОВ.

- Раздел математики, изучающий векторы и действия над ними называется **векторной алгеброй**.
- Основные действия над векторами, изученные нами ранее, составляют основу **векторной алгебры**.
- **3 векторных направления** : геометрическое, алгебраическое, физическое.
- Основатель векторного исчисления-норвежец **Каспар Вессель (1745-1818)**
- Дальнейшее развитие дали **англичанин Уильям Гамильтон (1805-1865)**, основавший алгебру комплексных чисел и другие теории, являющиеся основой векторного исчисления, ввел понятие вектор, и немец **Герман Грассман (1809-1877)**, основавший понятие вектора с геометрической точки зрения независимо от Гамильтона.

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ДВУМ НЕКОЛЛИНЕАРНЫМ

Теорема. Если ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то для любого вектора \vec{c} найдутся числа x и y такие, что выполняется равенство

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

причем коэффициенты разложения x и y определяются единственным образом. (рис на след слайде)

Из этой теоремы вытекает, что любой вектор можно разложить по двум произвольным неколлинеарным векторам. Если на плоскости выбраны такие 2 неколлинеарных вектора, то они называются **базисными векторами** плоскости. Итак, любые 2 неколлинеарных вектора можно принять в качестве базисных векторов и любой вектор этой плоскости однозначно разлагается по этим базисным векторам. А действительные числа x и y называются **координатами вектора \vec{c}** в базисе \vec{a}, \vec{b} .

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy . Пусть \vec{i} – единичный вектор, сонаправленный с осью Ox , а \vec{j} – единичный вектор, сонаправленный с осью Oy . Эти векторы называют **координатными векторами**. Так как векторы \vec{i} и \vec{j} не коллинеарны, то их можно рассматривать в качестве базисных векторов. Тогда для любого вектора a плоскости Oxy найдутся единственные действительные числа x и y такие, что

$$a = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Здесь числа x и y называются **координатами** вектора a в прямоугольной системе координат Oxy , и это записывается так: $a = (x; y)$.

СВОЙСТВА КООРДИНАТ ВЕКТОРА

1. У равных векторов соответствующие координаты равны: если

$\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $\vec{a} = \vec{b}$, то $x=u$ и $y=v$.

Обратно, векторы, у которых соответствующие координаты равны между собой: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$ и $x=u$, $y=v$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

2. При сложении векторов складываются их соответствующие координаты: если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x+u; y+v)$.

3. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число, если $\vec{a} = (x; y)$ и λ - число, то $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x; \lambda \cdot y)$.

Следствие. Координаты разности векторов равны разности

соответствующих координат этих векторов : если $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (u; v)$, то

$\vec{a} - \vec{b} = (x-u; y-v)$.

РАДИУС-ВЕКТОР. КООРДИНАТНЫЙ ВИД СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ.

Если на плоскости Oxy задана точка $A(x; y)$, то вектор \vec{OA} называется **радиус-вектором** точки A .

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ определяется по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$.

КООРДИНАТНЫЙ ВИД КОЛЛИНЕАРНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ВЕКТОРОВ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛА МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ.

Если векторы $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$ взаимно перпендикулярны, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$. Тогда имеем: $x_1x_2+y_1y_2=0$.

Это и есть **условие перпендикулярности** ненулевых векторов.

С помощью формулы $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1$ можно найти косинус угла между векторами $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$. Действительно, их формулы

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \text{ находим, что } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Отсюда получим $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. НАПРАВЛЯЮЩИЙ ВЕКТОР И ВЕКТОР НОРМАЛИ ПРЯМОЙ.

Уравнение прямой можно задать различными способами. Например, в 8 классе мы определили прямую как серединный перпендикуляр некоторого отрезка. Теперь определим уравнение прямой с помощью векторов.

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ (см рис 1 на след слайде). Тогда через точку M_0 параллельно вектору \vec{p} проходит одна и только одна прямая l . Точка M_0 называется **начальной точкой** прямой l , а вектор \vec{p} — **направляющим вектором** этой прямой. Если $M(x; y)$ является произвольной точкой прямой l , то $\vec{M_0M} \parallel \vec{p}$. Здесь направляющий вектор $\vec{p} = (\alpha; \beta)$ не параллелен осям координат, т.е. $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Используя условие коллинеарности векторов, \vec{p} и $\vec{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$, получим уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$$

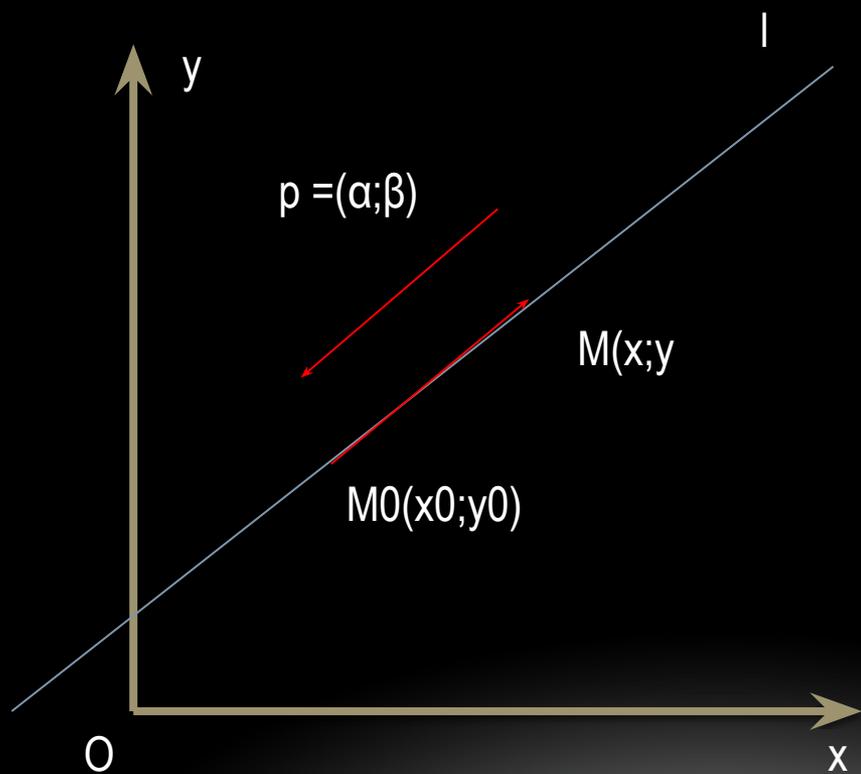


рис 1

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

