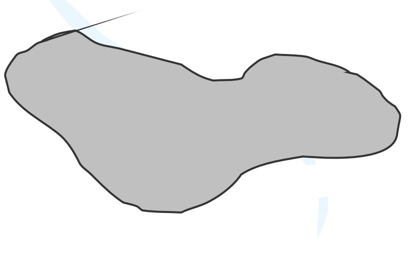
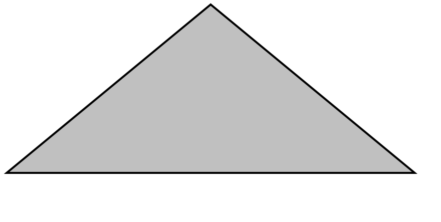
Площадь

- Площадь – это величина, характеризующая размер той части плоскости, которая заключена внутри плоской замкнутой фигуры. Обозначается буквой S.





Исторические факты:

- Зачатки геометрических знаний, связанных с измерением площадей, теряются в глубине тысячелетий.
- Еще в 4 – 5 тысяч лет назад вавилоняне умели определять площадь прямоугольника и трапеции в квадратных единицах. Квадрат издавна служит эталоном при измерении площадей благодаря многим своим замечательным свойствам: равные стороны, равные и прямые углы, симметричность и общее совершенство формы. Квадраты легко строить, или можно заполнить плоскость без пробелов.
- В древнем Китае мерой площади был прямоугольник. Когда каменщики определяли площадь прямоугольной стены дома, они перемножали высоту и ширину стены. Таково принятое в геометрии определение: площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон. Обе эти стороны должны быть выражены в одних и тех же линейных единицах. Их произведение и составит площадь прямоугольника, выраженную в соответствующих квадратных единицах. Скажем, если высота и ширина стены измерены в дециметрах, то произведение обоих измерений будет выражено в квадратных дециметрах. И если площадь каждой облицовочной Плотки составляет квадратный дециметр, то полученное произведение укажет число плиток, нужное для облицовки. Это вытекает из утверждения, положенного в основу измерения площадей: площадь фигуры, составленной из непересекающихся фигур, равна сумме их площадей.

т.е. умножались полусуммы противоположных сторон.

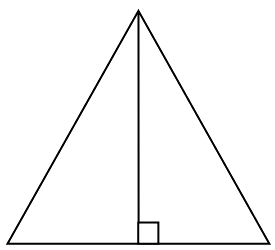
- Древние египтяне 4000 лет назад пользовались почти теми же приемами, что и мы, для измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции: основание треугольника делилось пополам, и умножалась на высоту; для трапеции же сумма параллельных сторон делилась пополам и умножалась на высоту и т.п. Для вычисления площади четырехугольника со сторонами (рис. 1.1) применялась формула

$$S = \frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2}$$

т.е. умножались полусуммы противоположных сторон.

- Эта формула явно неверна для любого четырехугольника, из нее вытекает, в частности, что площади всех ромбов одинаковы. Между тем, очевидно, что у таких ромбов площади зависят от величины углов при вершинах. Данная формула верна только для прямоугольника. С ее помощью можно вычислить приближенно площадь четырехугольников, у которых углы близки к прямым.
- Для определения площади равнобедренного треугольника (рис. 1.2), в котором , египтяне пользовались приближенной формулой:

$$S = \frac{BC \cdot AB}{2}$$



- Совершаемая при этом ошибка тем меньше, чем меньше разность между стороной и высотой треугольника, иными словами, чем ближе вершина (и) к основанию высоты из . Вот почему приближенная формула (1.2) применима лишь для треугольников с сравнительно малым углом при вершине.

- Но уже древние греки умели правильно находить площади многоугольников. В своих «Началах» Евклид не употребляет слова «площадь», так как он под самим словом «фигура» понимает часть плоскости, ограниченную той или иной замкнутой линией. Евклид не выражает результат измерения площади числом, а сравнивает площади разных фигур между собой.
- Как и другие ученые древности, Евклид занимается вопросами превращения одних фигур в другие, им равновеликие. Площадь составной фигуры не изменится, если ее части расположить по-другому, но без пересечения. Поэтому, например, можно, исходя из формул площади прямоугольника, находить формулы площадей других фигур. Так, треугольник разбивается на такие части, из которых затем можно составить равновеликий ему прямоугольник. Из этого построения следует, что площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту. Прибегая к подобной перекройке, находят, что площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, площадь трапеции – произведению полусуммы оснований на высоту.

- Когда каменщикам приходится облицовывать стену сложной конфигурации, они могут определить площадь стены, подсчитав число пошедших на облицовку плиток. Некоторые плитки, естественно, придется обкалывать, чтобы края облицовки совпали с кромкой стены. Число всех пошедших в работу плиток оценивает площадь стены с избытком, число необломанных плиток – с недостатком. С уменьшением размеров клеток количество отходов уменьшается, и площадь стены, определяемая через число плиток, вычисляется все точнее.
- Одним из поздних греческих математиков – энциклопедистов, труды которого имели главным образом прикладной характер, был Герон Александрийский, живший в 1 в. н. э. Будучи выдающимся инженером, он был назван также «Герон Механик». В своем произведении «Диоптрика» Герон описывает разные машины и практические измерительные инструменты.

- Одна из книг Герона была названа им «Геометрика» и является своего рода сборником формул и соответствующих задач. Она содержит примеры на вычисление площадей квадратов, прямоугольников и треугольников. О нахождении площади треугольника по его сторонам Герон пишет: « Пусть, например, одна сторона треугольника имеет в длину 13 мерных шнуров, вторая 14 и третья 15. Чтобы найти площадь, поступают вот как. Сложи 13, 14 и 15; получится 42. Половина этого будет 21. Вычти из этого три стороны одну за другой; сперва вычти 13 – останется 8, затем 14 – останется 7 и, наконец, 15 – останется 6. А теперь перемножь их: 21раз по 8 даст 168, возьми это 7 раз – получится 1176, а это еще 6 раз – получится 7056. Отсюда квадратный корень будет 84. Вот сколько мерных шнуров будет в площади треугольника».
- В своем наиболее важном геометрическом произведении «Метрика» Герон излагает доказательство примененной выше формулы:

a, b, c - стороны,

p - полупериметр треугольника.

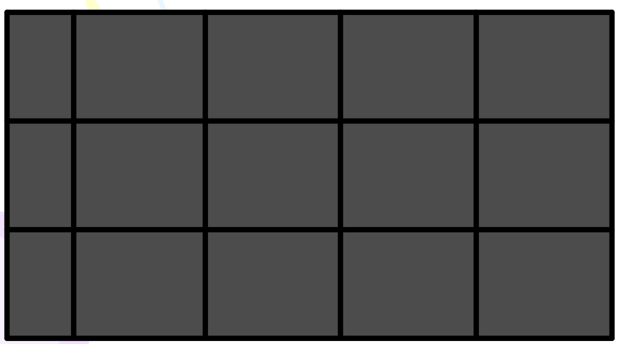
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Эта формула носит название «формулы Герона». На самом деле она была установлена еще в 3 в. до н. э. величайшим математиком древности Архимедом.
- Практические правила Герона для вычисления площадей применялись греческими, римскими и средневековыми землемерами и техниками.

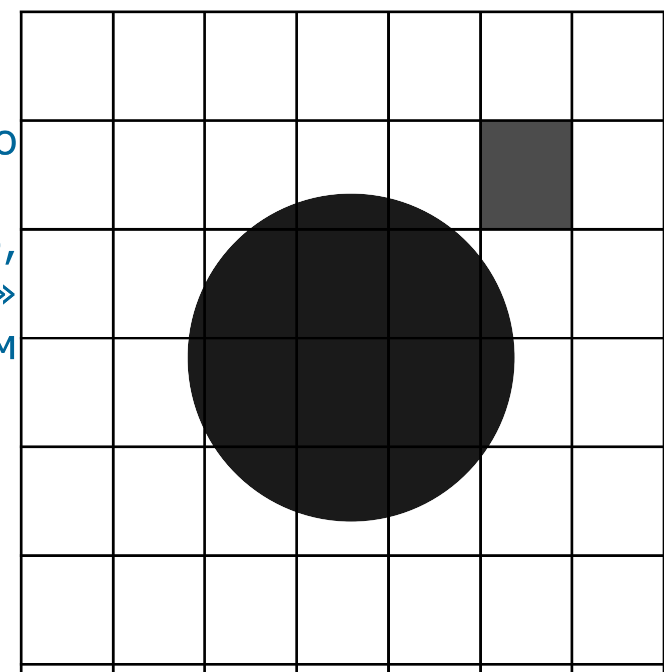
Различные подходы к изучению понятий «площадь», «многоугольник», «площадь многоугольника»

- Понятие о площади. Свойства площади

Обычно говорят, что площадь $S(F)$ фигуры F есть число, показывающее, из скольких единиц площади составляется фигура. Однако это не определение, а только описание того, что такое площадь. Легко понять, что прямоугольник со сторонами 3 и 5 см «составляется» из 15 квадратных сантиметров (его легко разрезать на 15 квадратов со стороной 1 см;

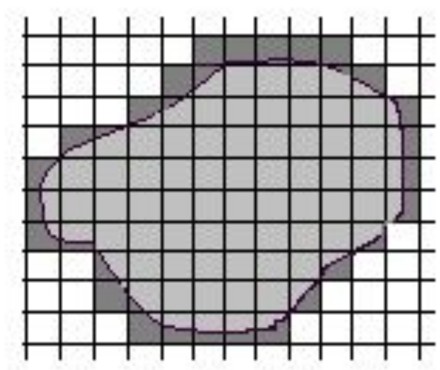


Но сколько подобных квадратов нужно, чтобы «составить» круг радиуса 2 см совершенно неясно.



- Строгое математическое определение площади можно получить с помощью палетки – прозрачной пластинки с нанесенной на нее сеткой из равных квадратов. Представим, что такая палетка лежит на плоскости. Иначе говоря, плоскость разбита на квадраты со стороной, равной 1. Если фигура полностью помещается в фигуре, составленной, например, из81 квадрата палетки, и содержит фигуру из 43 квадратов (рис. 1.4), то .

Для большей точности измерения можно каждый квадрат палетки разбить на сто квадратов (стороны которых в 10 раз меньше, чем у квадратов первой палетки, а площадь равна 1/100). Новая, более мелкая палетка даст и более тесные границы, в которых заключена площадь фигуры



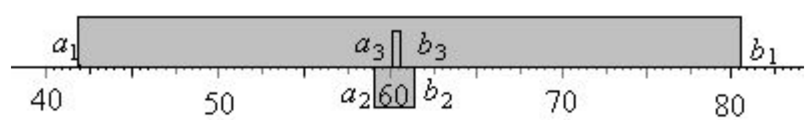
Для большей точности измерения можно каждый квадрат палетки разбить на сто квадратов (стороны которых в 10 раз меньше, чем у квадратов первой палетки, а площадь равна 1/100). Новая, более мелкая палетка даст и более тесные границы, в которых заключена площадь фигуры F

скажем, $58{,}87 \le S(F) \le 62{,}34$

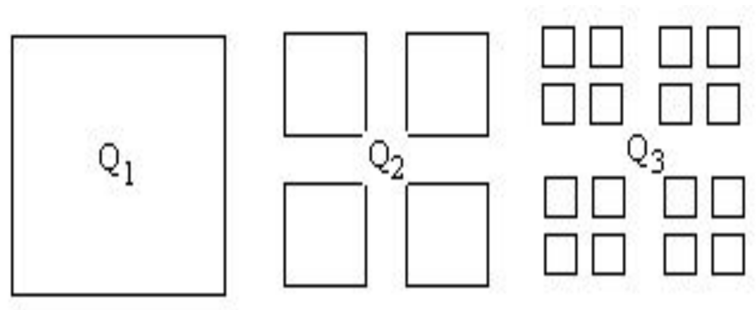
Если каждый квадрат второй палетки снова разбить на 100 квадратов, точность измерения ещё увеличится – например, получатся границы $60{,}1381 \le S(F) \le 60{,}4952$

Так, используя набор палеток со всё более мелкой сеткой, мы будем приближаться к пределу – площади $S(F)$ фигуры F

- Но здесь есть одна тонкость. Вначале мы получили отрезок $[a_1, b_1]$, где $a_1 = 43$, $b_1 = 81$, в котором содержится искомое число $S(F)$. Затем этот отрезок уменьшили до $[a_2, b_2]$, где $a_2 = 58{,}87$, $b_2 = 62{,}34$. Потом уменьшили ещё – до $[a_3, b_3]$, где $a_3 = 60{,}1381$, $b_3 = 60{,}4952$, и т. д. Но пересечение системы вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$
- числовой прямой есть либо одна точка (в том случае, когда имеется только одно число $S(F)$, принадлежащее все рассматриваемым отрезкам , фигуру F называют квадрируемой (по Жордану), а число $S(F)$ - площадью фигуры F .



- Второй случай, когда пересечение всех отрезков представляет собой отрезок, а не одну точку, на первый взгляд кажется просто невозможным. Ведь всякая фигура имеет какую-нибудь площадь $S(F)$. Число $S(F)$ и должно быть единственной общей точкой рассматриваемых отрезков. Но на самом деле это не так. Следующий пример подтверждает это.
- Возьмём квадрат $Q1$ со стороной 1. Выбросим из него крестообразную фигуру площадью , как показано на рис. 1.6.

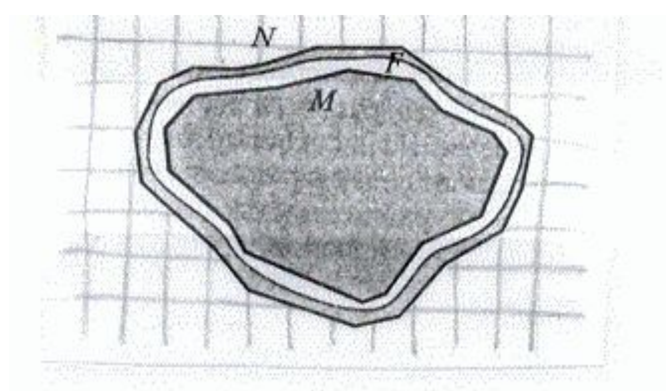


целого квадрата. Таким образом, каждый из получающихся отрезков
(а потому и пересечение всех этих отрезков) содержит отрезок ,
т. е. их пересечение не состоит из одной точки. Значит, фигура F неквадрируема.

- Остаётся фигура $Q2$ из четырёх равных квадратов, примыкающих к вершинам $Q1$. (Сторона каждого из них составляет .) Теперь в каждом из квадратов фигуры $Q2$ вновь построим, а затем удалим крестообразную фигуру. Её размер определим из условия , что сумма площадей четырёх таких фигур была равна . Получим фигуру $Q3$ из 16 квадратов. Из каждого из них опять выбросим крестообразную фигуру так, чтобы сумма площадей всех 16 таких «крестов» была равна . Получим фигуру $Q4$ из 64 квадратов и т. д.
- Обозначим через F пересечение всех фигур $Q1$, $Q2$, $Q3$, $Q4$, … Другими словами, F получается, если из квадрата $Q1$ выбросить по очереди все «кресты». Общая площадь фигур, выбрасываемых из $Q1$, равна . Значит, на долю множества F остаётся площадь . Это кажется невероятным: ясно, что в фигуре F нет ни одного, пусть самого маленького, целого квадратика, и тем не менее она имеет площадь, равную .

Попробуем теперь измерить площадь фигуры F по Жордану (т. е. с помощью палеток). Какую бы мелкую палетку мы не взяли, площадь фигуры, составленной из квадратов палетки и включающей в себя F, равна нулю (поскольку в F нет ни одного целого квадрата. Таким образом, каждый из получающихся отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$
(а потому и пересечение всех этих отрезков) содержит отрезок ,
т. е. их пересечение не состоит из одной точки. Значит, фигура F неквадрируема.

- Способ измерения площадей с помощью палеток был предложен в XIX веке французским математиком Камилем Жорданом. Другой французский математик – Анри Лебег предложил более общее определение площади. Построенная выше фигура *F* неквадрируема по Жордану, но имеет площадь (равную), по определению Лебега, или, как говорят, измерима по Лебегу. Если же фигура квадрируема по Жордану, то она обязательно измерима и по Лебегу (и имеет ту же площадь).
- А какие плоские фигуры квадрируемы? Прежде всего многоугольники. Для других фигур применяют следующую теорему:
- Плоская фигура *F* (рис. 1.7) в том и только в том случае квадрируема, если для любого положительного числа найдутся два таких многоугольника *M* и *N*, что M содержится в *F* , а *N* содержит *F*, и при этом $s(N)-s(M)<\varepsilon$



- Другими словами, квадрируемы фигуры, которые можно сколь угодно точно приблизить многоугольниками. Например, площадь круга находят как предел площади вписанного в него или описанного около него правильного n-угольника при .
- Поскольку обе площади имеют общий предел, их разность стремится к нулю, значит, круг – квадрируемая фигура. Вообще, любая плоская выпуклая фигура квадрируема. Квадрируема и криволинейная трапеция под графиком непрерывной функции , заданной на отрезке .

- Кроме приведённого выше определения площади с помощью палеток имеется ещё одно, аксиоматическое определение. Прежде чем его сформулировать рассмотрим некоторые свойства площади (будем иметь в виду только площадь по Жордану).
- Обозначим через *Q* множество всех квадрируемых плоских фигур, тогда площадь *S*(*F*) есть числовая функция, определённая на данном множестве. Перечислим свойства, которыми она обладает.
- A. Неотрицательность. Площадь любой квадрируемой фигуры *F* неотрицательна: . Не исключается нулевое значение площади, поскольку, например, любой отрезок представляет собой квадрируемую фигуру нулевой площади.
- B. Аддитивность. Пусть *F*1 и *F*2 – две квадрируемые фигуры, у которых нет общих внутренних точек. Обозначим через *F* объединение этих фигур. Тогда фигура *F* квадрируема и справедливо равенство . То же имеет место при объединении не двух, а большего числа фигур, попарно не имеющих общих внутренних точек.
- C. Инвариантность. Если две квадрируемые фигуры *F*1 и *F*2 равны, т. е. одна получается из другой с помощью движения, то площади таких фигур равны: . Иначе говоря, площадь не изменяется при движениях.
- D. Нормируемость. При определении площади фигуры задаётся некоторая единица площади – квадрат *K*, сторона которого равна динице длины: .

- Очевидно, что площадь , определяемая с помощью палеток, действительно удовлетворяет свойствам A и D. Проверить два других свойства сложнее. Например, если фигура $F1$ переходит в $F2$ при повороте, то эти две фигуры будут по-разному расположены относительно палеток и доказательство равенства их площадей (свойство C) требует некоторых усилий. Тем не менее можно утверждать:
- На множестве Q всех квадрируемых фигур существует одна и только одна функция, которая обладает свойствами A, B, C, D.
- То есть всякая функция на множестве Q, удовлетворяющая всем четырём свойствам, совпадает с .
- Стало быть, свойства A, B, C, D можно принять за аксиомы площади, т. е. определить площадь как функцию на множестве квадрируемых фигур Q, удовлетворяющую данным аксиомам. Это и есть аксиоматическое определение площади. Все остальные её свойства можно вывести из перечисленных аксиом. Например, формулы для вычисления площадей многоугольников вытекают именно из аксиом A, B, C, D точно так же, как формулы площади круга, эллипса и других фигур.

- Заметим, что и в геометрии Лобачевского, и в сферической геометрии площадь определяется теми же аксиомами. Однако палетками пользоваться уже не приходится; за эталон площади принимают не квадрат, а иную фигуру – квадратов на плоскости Лобачевского и сфере просто нет. Интересно, что в обеих геометриях площадь многоугольника пропорциональна разности между суммой его углов и суммой углов плоского многоугольника с тем же числом сторон.

Понятие о многоугольнике

- Термин «многоугольник» понимается в математике и, в частности, в школьном курсе математики двояко. Во-первых, многоугольник как линия. В этом случае многоугольник – это простая (т. е. без самопересечения) замкнутая ломаная, лежащая в некоторой плоскости. И, во-вторых, многоугольник, как часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломанной. Эти две трактовки понятия «многоугольник» могут быть использованы самостоятельно в зависимости от характера рассматриваемой задачи. В логическом плане второе понимание термина «многоугольник2 связано с первой теоремой Жордана. В теореме Жордана речь идёт о многоугольнике как о простой замкнутой ломаной.
- Каждый многоугольник разбивает все точки плоскости, содержащей этот многоугольник, не принадлежащие самому многоугольнику, на два класса (множества) следующим образом. Любые две точки, принадлежащие одному классу, можно соединить ломаной, не пересекающей многоугольник. И каковы бы ни были две точки, принадлежащие разным классам, - этого сделать нельзя. Один из классов содержит прямые, не пересекающие многоугольник. Множество точек этого класса называют внешней областью многоугольника. Любая прямая, содержащая точки другого класса, пересекает многоугольник и содержит также точки из внешней области многоугольника. Множество точек этого класса называют внутренней областью многоугольника.
- Внутренняя область многоугольника вместе с самим многоугольником образует понятие многоугольника во втором смысле (как части плоскости, ограниченной простой замкнутой ломаной).

Понятие о площади многоугольника. Дескриптивное определение

- В вопросе о площади многоугольник понимается как часть плоскости, ограниченная простой замкнутой ломаной. В этом смысле понятие «многоугольник» используется в дальнейшем в изложении школьного курса математики, а площадь многоугольника определяется с помощью указания её свойств:
- 1) численное значение площади любого многоугольника всегда положительно;
- 2) площади равных многоугольников, т. е. многоугольников, которые можно совместить с помощью движения, одинаковы;
- 3) площадь многоугольника, полученного объединением двух многоугольников, не имеющих общих внутренних точек, будем называть не перекрывающимися);
- 4) площадь квадрата со стороной единичной длины равна единице.

- В различных учебниках по геометрии для общеобразовательных учреждений определения площади несколько отличаются друг от друга, но суть определений совпадает с указанным выше.
- Таким образом, площадь многоугольников можно трактовать как функцию , заданную на множестве всех многоугольников, принимающую числовые значения и обладающую следующими свойствами (аксиомами площади):
- неотрицательность площади;
- аддитивность площади;
- инвариантность площади;
- нормированность площади.

- Это определение по своему характеру сродни, например, определению арифметического корня $b=\sqrt[n]{a}$ ($a \geq 0$): *b* – есть неотрицательное число, *n*-я степень которого равна *a*.
- Ведь и в этом случае арифметический корень определяется указанием его свойств. Для корректного определения арифметического корня надо доказать, что такое число b, во-первых, существует и, во-вторых, единственно. Первое следует из того, что множество значений функции $f(x)=x^n (x \in [0,+\infty)$ и $n \in N$ есть $[0,+\infty)$

Взгляд на площадь как на первичное понятие сложился ещё в древности. До недавнего времени этого взгляда придерживались и математики. На протяжении многих столетий они видели задачу в вычислении площадей; им не приходило в голову, что «площадь» нуждается в специальном определении.

- Второе следует из строгого монотонного возрастания рассматриваемой функции.
- Для корректного определения площади многоугольников – функции - требуется доказать, что такая функция существует и единственна.
- Определения указанного типа носят название дескриптивных (буквально, описательных, от английского слова descriptive – описательный).
- Дескриптивные определения отличаются от определений конструктивных (буквально, построительных, от лат. слова construction – построение).
- Примером конструктивного определения является, например, определение степени с натуральным показателем: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$ (если произведение чисел ранее определено).

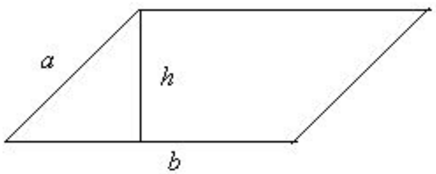
Взгляд на площадь как на первичное понятие сложился ещё в древности. До недавнего времени этого взгляда придерживались и математики. На протяжении многих столетий они видели задачу в вычислении площадей; им не приходило в голову, что «площадь» нуждается в специальном определении.

- Между тем их вычисления должны были на чём-то основываться – если не на прямом определении, то на чём-то, его заменяющем, на каких-то принципах, которые позволяли им всякий раз получать в качестве площади определённое число. И такие принципы, конечно, существовали, хотя обычно не формулировались. Это – основные свойства площади. Так, в одних школьных учебниках площадь многоугольников вообще не определяется, но указываются её свойства, соответствующие аксиомам площади. В других же определения носят формально дескриптивный характер, но свойства, определяющие площадь, используются не для построения общей функции $S(F)$, а для вычисления площади основных плоских фигур: прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции и плоских фигур, составленных из этих основных. Отметим также, что на основе аксиом площади вполне строго выведены формулы площади указанных основных плоских фигур. Поскольку, однако, существование единственной функции $S(F)$ не установлено, то доказанное лишь означает, что если функция $S(F)$ существует, то её значения для основных плоских фигур однозначно определяются обычными общеизвестными формулами.

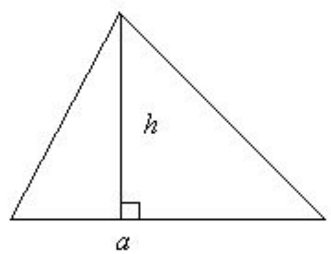
Различные формулы площадей многоугольников

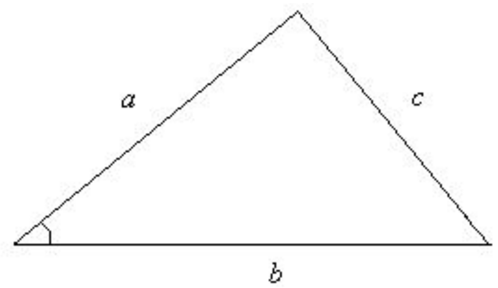
- Площадь прямоугольника со сторонами и вычисляется по формуле $S = a \cdot b$
- Площадь параллелограмма вычисляется по формулам $S = a \cdot b \sin \alpha$

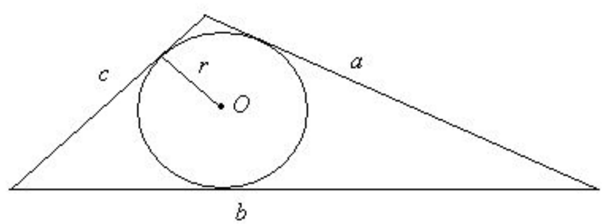
$$S = a \cdot h$$

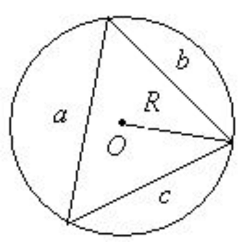


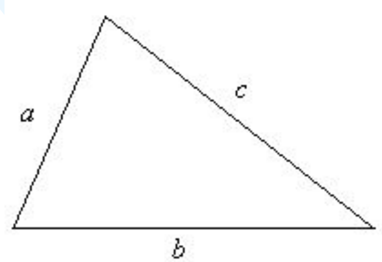
- Площадь многоугольника вычисляется по формулам











$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin\gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

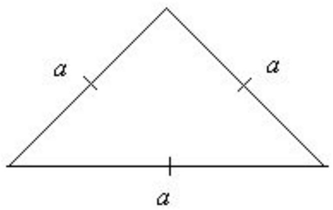
$$S = p \cdot r$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$$

- Площадь правильного треугольника вычисляется по формуле

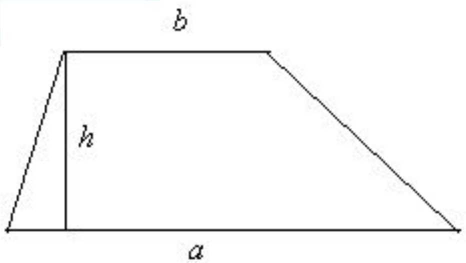
$$S_{прав\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



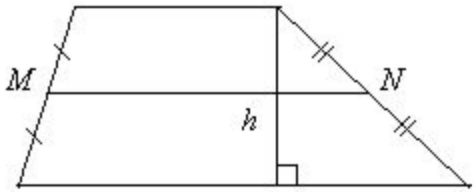
Площадь трапеции вычисляется по формулам

Площадь трапеции вычисляется по формулам

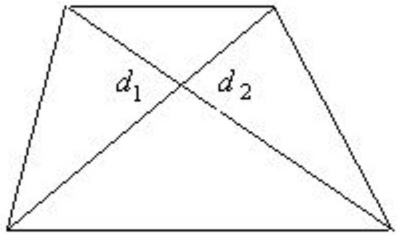
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



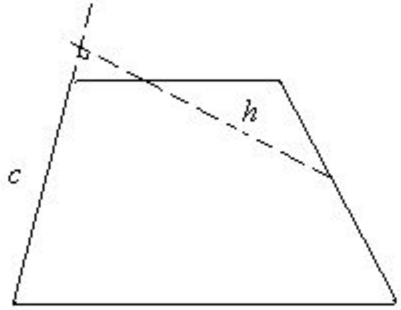
$$S = MN \cdot h$$



$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin\alpha}{2}$$

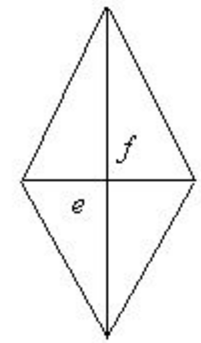


$$S = c \cdot h$$



- В частности, площадь ромба равна полупроизведению его диагоналей

$$S = \frac{1}{2} e \cdot f$$



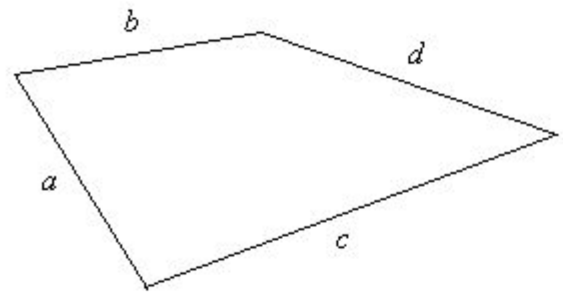
Площадь произвольного четырёхугольника можно выразить через его стороны *a, b, c* и сумму

Площадь произвольного четырёхугольника можно выразить через его стороны *a,*

$$\varphi = \alpha + \beta$$

пары противоположных углов:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$



Площадь вписанного в окружность четырёхугольника

$$\varphi = 180^0$$

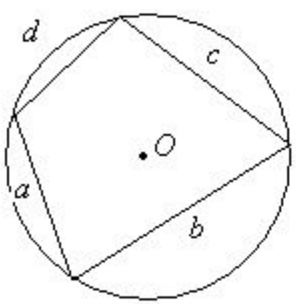
вычисляется по формуле Брахмагупты

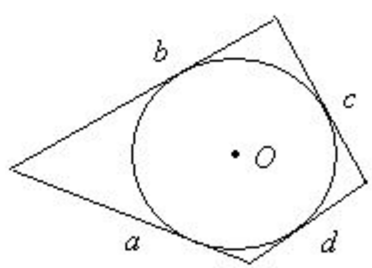
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

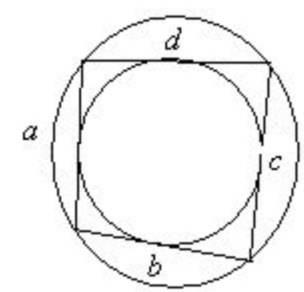
$$S = \sqrt{abcd}\sin\frac{\varphi}{2}$$

Если же четырёхугольник вписан и описан одновременно, то формула становится совсем простой:

$$S = \sqrt{abcd}$$







определения площади произвольного *n*-угольника нет. Это неудивительно, ведь в ней неизбежно будет слишком много переменных. Чтобы задать *n*-угольник (его форму и размеры), нужно указать 2*n* – 3 его элемента: например, длины всех сторон. Кроме одной, и величины *n* – 2 образованных ими углов.

- Площадь всякого описанного многоугольника вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} R \cdot P$$

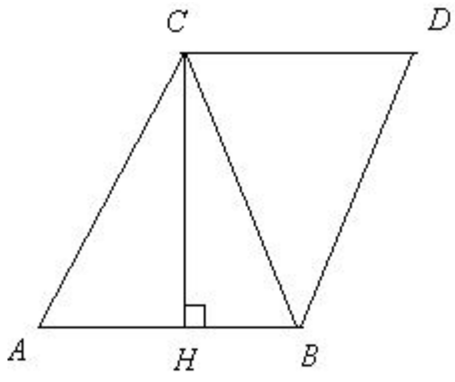
где *R* – радиус круга, вписанного в многоугольник, а *P* – периметр прямоугольника.

Общий метод для нахождения площади произвольного многоугольника состоит в том, что его надо разбить на треугольники, вычислить их площади и сложить результаты. Иногда многоугольник представляют как сумму и разность треугольников. Однако простой и компактной формулы для определения площади произвольного *n*-угольника нет. Это неудивительно, ведь в ней неизбежно будет слишком много переменных. Чтобы задать *n*-угольник (его форму и размеры), нужно указать 2*n* – 3 его элемента: например, длины всех сторон. Кроме одной, и величины *n* – 2 образованных ими углов.

Площадь треугольника. Формула Герона

- Теорема. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведённую к ней высоту: $S = \frac{1}{2} a \cdot h$

Доказательство проводится очень просто. Данный треугольник *ABC* (рис. 1.15) достроим до параллелограмма *ABDC*. Треугольники *ABC* и *DCB* равны по трём сторонам, поэтому их площади равны. Значит площадь треугольника *ABC* равна половине площади параллелограмма *ABDC*, т. е. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$



- Но здесь возникает следующий вопрос: почему три возможных полупроизведения основания на высоту для всякого треугольника одинаковы? Это, впрочем, легко доказать из подобия прямоугольников с общим острым углом. Рассмотрим треугольник *ABC* :

Тогда

$$AA_1 \perp BC \qquad BB_1 \perp AC \qquad CC_1 \perp AB$$

Тогда

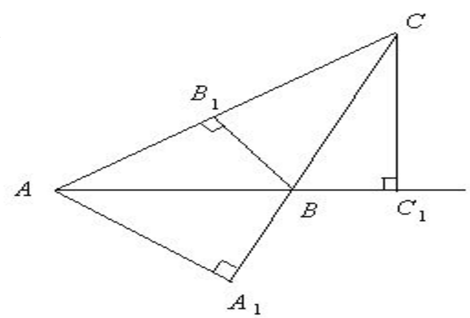
$$\Delta ABB_1 \qquad \Delta ACC_1 \qquad \Delta CBB_1 \qquad \Delta CAA_1$$

И, следовательно,

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{CC_1} \qquad \frac{BC}{BB_1} = \frac{AC}{AA_1}$$

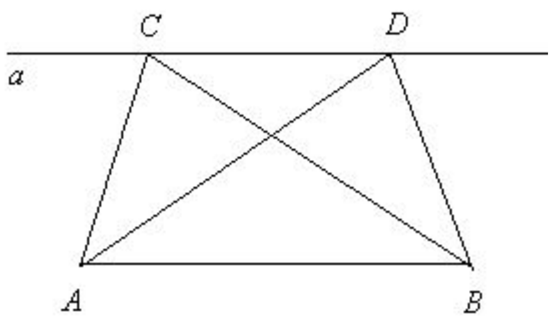
откуда $AB \cdot CC_1 = AC \cdot BB_1 \quad AB \cdot BB_1 = BC \cdot AA_1$

и $\frac{1}{2} AB \cdot CC_1 = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2} BC \cdot AA_1$



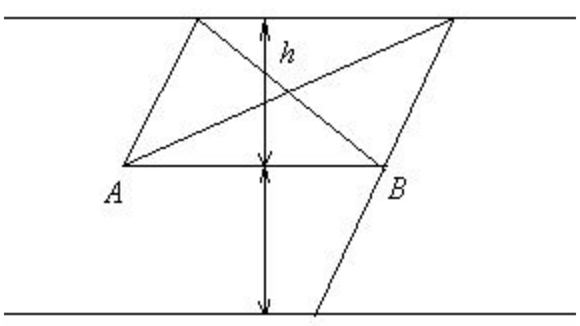
Пользуясь приведённой выше теоремой о площади треугольника очень часто бывает удобно сравнивать площади двух треугольников. Приведём ниже некоторые очевидные, но важные следствия из теоремы.

- Следствие 1. Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной её основанию, то его площадь при этом не меняется.
- На рис. 1.17 треугольники *ABC* и *ABD* имеют общее основание *AB* и равные высоты, опущенные на это основание, т. к. прямая *a*, которая содержит вершины *C* и *D* параллельна основанию *AB*, а поэтому площади этих треугольников равны.



Следствие 1 можно переформулировать следующим образом.

Следствие 1′. Пусть дан отрезок *AB*. Множество точек *M* таких, что площадь треугольника *AMB* равна заданной величине *S*, есть две прямые, параллельные отрезку *AB* и находящиеся от него на расстоянии $h = \frac{2S}{2AB}$



- <u>Следствие 2</u>. Если одну из сторон треугольника, прилежащих к данному его углу, увеличить в k раз, то площадь его также увеличится в k раз.
- На рис. 1.19 треугольники ABC и ABD имеют общую высоту BH, поэтому отношение их площадей равно отношению оснований

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ABD} = AC : AD = k$$

Из следствия 2 следуют важные частные случаи:

1.Медиана делит треугольник на две равновеликие части.

2.Биссектриса угла треугольника, заключённая между его сторонами a и b, делит его на два треугольника, площади которых

относятся как a : b.

которых относятся как a : b.

Следствие 3. Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол

Это следует из того, что

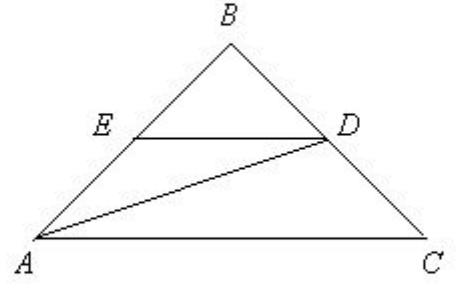
<u>Следствие 3</u>. Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол.

Это следует из того, что

$$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ABD} = BC : BD$$

$$S_{\Delta ABD} : S_{\Delta EBD} = AB : EB$$

поэтому $$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta EBD}} = \frac{AB \cdot BC}{EB \cdot BD}$$



- В частности, имеет место следующее утверждение:
- Если два треугольника подобны и сторона одного из них в *k* раз больше соответствующих сторон другого, то его площадь в *k*2 раз больше площади второго.
- Выведем формулу Герона для площади треугольника следующими двумя способами. В первом используем теорему косинусов:

Значит

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Значит

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{4a^2b^2} \cdot (c - a + b) \cdot (c + a - b) \cdot (a + b - c) \cdot (a + b + c).$$

Замечая, что

$$a + b + c = 2p \quad a + b - c = 2p - 2c \quad a + c - b = 2p - 2b$$

$$c - a + b = 2p - 2a$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ - полупериметр треугольника, получаем:

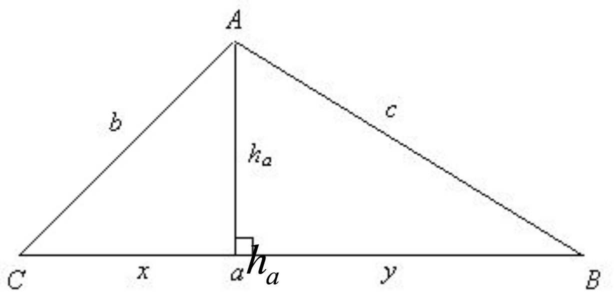
$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Таким образом, площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Формулу Герона можно вывести, опираясь только на теорему Пифагора и не используя теорему косинусов.
- Рассмотрим произвольный треугольник *ABC* (рис. 1.20) со сторонами *a,b,c*.

В нём всегда найдётся высота, основание которой лежит на стороне треугольника, а не на её продолжении. Искомая площадь треугольника *ABC*:



h_a

В нём всегда найдётся высота, основание которой лежит на стороне треугольника, а не на её продолжении. Искомая площадь треугольника *ABC*:

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

h_a следовательно, для её определения достаточно вычислить

: ,

x, y

:

По теореме Пифагора:

$$x^2 + h_a^2 = b^2 \qquad y^2 + h_a^2 = c^2$$

Кроме того, $x + y = a$

Решаем полученную систему трёх уравнений с тремя неизвестными h_a x, y

$$\begin{cases} x^2 + h_a^2 = b^2 \\ y^2 + h_a^2 = c^2 \\ x + y = a \end{cases}$$

- Вычитая из первого уравнения системы второе, имеем:

Теперь из первого уравнения системы (находим

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = b^2 - c^2 \\ x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-y) = b^2 - c^2 \\ x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{b^2 - c^2}{a} \\ x + y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \\ y = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \end{cases}.$$

Теперь из первого уравнения системы (находим h_a :

$$h_a = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} =$$

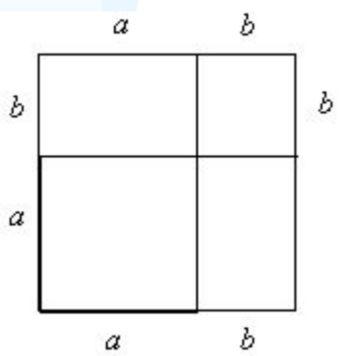
$$= \frac{1}{2a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Предложенный вывод формулы Герона отражает межпредметные связи алгебры и геометрии, он доступен учащимся сразу же после изучения теоремы Пифагора.

Площадь прямоугольника

- <u>Теорема</u>. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
- Рассмотрим одно из доказательств этой теоремы, которое в школьном курсе не рассматривается.
- Пусть нам дан прямоугольник со сторонами *a, b* и площадью *S*. Докажем, что $S = ab$



Достроим прямоугольник до квадрата со стороной *a* + *b*. Площадь этого квадрата $(a+b)(a-b)$

.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью *S*, равного ему прямоугольника с площадью *S* и двух квадратов с площадями

$$a \cdot a = b \cdot b.$$

Из чего имеем:

$$(a+b)(a-b) = S + S + aa + bb$$

$$(aa + 2ab + bb) = 2S + aa + bb$$

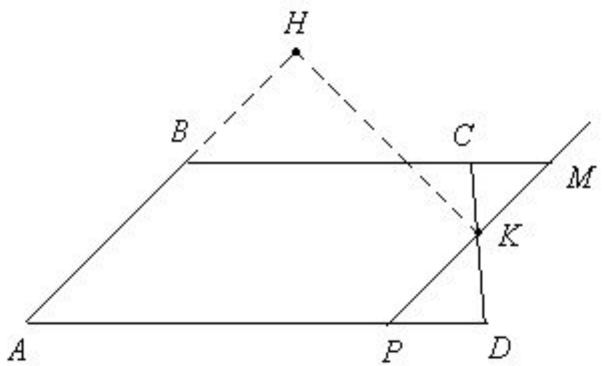
Отсюда получаем:

$$S = ab$$

Теорема доказана.

Площадь трапеции

- Докажем следующую формулу для вычисления площади трапеции:
- Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перепендикуляра, опущенного на неё из середины другой боковой стороны.
- Доказательство. Пусть *ABCD* – данная трапеция (), – середина стороны – перпендикуляр, опущенный из точки на прямую . (рис. 1.22)



Проведём через точку *K* прямую, параллельную прямой *AB*. Пусть *M* и *P* – точки её пересечения с прямыми *BC* и *AD*. Параллелограмм *ABMP* равновелик данной трапеции, так как пятиугольник *ABCKP* является для них общим, а треугольник *CMK* конгруэнтен треугольнику *KPD*, т. е. трапеция и параллелограмм составлены из одинаковых частей.

Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания *AB* на высоту *KH*, утверждение доказано.

Замечание. Последний абзац решения можно (более формально) записать и так:

$$S_{ABMP} = S_{ABCKP} + S_{CMK}$$

$$S_{ABCD} = S_{ABCKP} + S_{KPD}$$

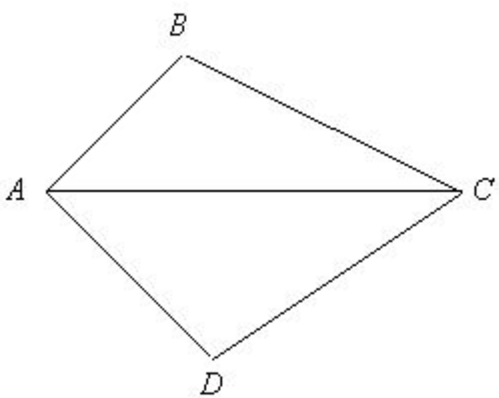
$\Delta KPD = \Delta CMK$ (по стороне и двум прилежащим углам), поэтому

$S_{\Delta KPD} = S_{\Delta CMK}$ следовательно, $S_{ABCD} = S_{ABMP} = AB \cdot KH$

Площадь четырёхугольника

- Докажем следующую теорему: площадь произвольного выпуклого четырёхугольника может быть определена по формуле: $$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике *ABCD* *AB* = *a*, *BC* = *b*,
CD = *c*, *DA* = *d*; ∠*ABC* = *в*, ∠*ADC* = *д*



Из ΔABC в силу теоремы косинусов

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta$$

Из $$AC^2=c^2+d^2-2cd\cos\delta$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим: $a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2-2cd\cos\delta$

или $a^2+b^2-c^2-d^2=2ab\cos\beta-2cd\cos\delta$

Найдём площадь четырёхугольника *ABCD* как сумму площадей треугольников *ABC* и *ADC*: $$S=\frac{1}{2}ab\sin\beta+\frac{1}{2}cd\sin\delta$$

откуда $4S=2ab\sin\beta+2cd\sin\delta$

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2=(2ab\cos\beta-2cd\cos\delta)^2+$$
$$+(2ab\sin\beta+2cd\sin\delta)^2$$

что и требовалось доказать.
Теорема имеет ряд следствий.

- Выполним равносильные преобразования, получим

$$S=\sqrt{A-abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

что и требовалось доказать.
Теорема имеет ряд следствий.

Следствие 1. Площадь произвольного четырёхугольника, вписанного в окружность, вычисляется по формуле (как было сказано выше) Брахмагупты:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Доказательство сразу следует из теоремы, рассмотренной выше, с учётом того, что сумма противолежащих углов вписанного в окружность четырёхугольника равна 1800, т. е. $\beta+\delta=180^0$.

$$\cos\frac{\beta+\delta}{2}=\cos 90^0=0$$

Поэтому $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

- Следствие 2. Площадь произвольного четырёхугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле:

Доказательство. Так как у описанного четырёхугольника суммы противолежащих сторон равны, т. е.

$$S = \sqrt{abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

Доказательство. Так как у описанного четырёхугольника суммы противолежащих сторон равны, т. е.

$$a + b = b + d$$

то

$$p - a = c, \quad p - b = d, \quad p - c = a, \quad p - d = b$$

Имеем:

$$S = \sqrt{abcd - abcd\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{abcd\left(1-\cos^2\frac{\delta+\beta}{2}\right)} = \sqrt{abcd\sin^2\frac{\delta+\beta}{2}}$$

Следствие 3. Площадь четырёхугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности, может быть вычислена по формуле:

$$S = \sqrt{abcd}$$

Доказательство. Так как $a + c = b + d$ и в силу следствия 1 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

то

$$S = \sqrt{\frac{c+d+b-a}{2}\cdot\frac{c+d+a-b}{2}\cdot\frac{a+d+b-c}{2}\cdot\frac{c+a+b-d}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2c}{2}\cdot\frac{2d}{2}\cdot\frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2}} = \sqrt{abcd}.$$

Формула Пика

- Чтобы оценить площадь многоугольника на клетчатой бумаге, достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу). Точнее, если *S* – площадь многоугольника, - число клеток, которые целиком лежат внутри многоугольника, и - число клеток, которые имеют с внутренностью многоугольника хоть одну общую точку .

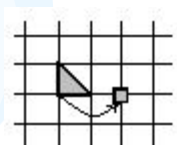
$$S = \frac{r}{2} + i - 1,$$

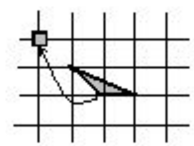
де S - площадь, *r* – число узлов, которые лежат строго внутри многоугольника.

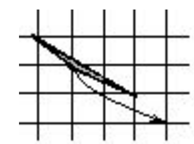
Эту формулу называют «формула Пика» - по имени математика, открывшего её в 1899 году.

Назовем треугольник достижимым, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале были в трёх вершинах одной клетки; прыжком будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную относительно любой из двух других вершин (эти две вершины остаются на месте).

- Задача. Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают «играть в чехарду»: каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно его точке (рис. 1.35, ясно, что после любого числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы клетчатой бумаги). В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?







Назовём треугольник достижимым, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале были в трёх вершинах одной клетки; прыжком будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную относительно любой из двух других вершин (эти две вершины остаются на месте).

Фигуры с наибольшей площадью

- Трапеция или прямоугольник ???

Рассмотрение этого пункта начнём с решения задачи.

Задача. В роковой в своей жизни день Пахом прошёл 40 вёрст, идя по сторонам трапеции площадью 78 квадратных вёрст. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника, трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчёта. Интересно определить: выгадал он или прогадал от того, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае должен он был получить большую площадь земли?

Решение

- Прямоугольников с обводом в 40 вёрст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь.
- Вот ряд примеров:
- $14 \cdot 6 = 84$ кв. вёрст
- $13 \cdot 7 = 91$ кв. вёрст
- $12 \cdot 8 = 96$ кв. вёрст
- $11 \cdot 9 = 99$ кв. вёрст
- Мы видим, что у всех этих фигур при одном и том же периметре в 40 вёрст площадь больше, чем у нашей трапеции. Однако возможны и такие прямоугольники с периметром в 40 вёрст, площадь которых меньше, чем у трапеции:
- $18 \cdot 2 = 36$ кв. вёрст
- $19 \cdot 1 = 19$ кв. вёрст
- $19{,}5 \cdot 0{,}5 = 9{,}75$ кв. вёрст.
- Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определённого ответа. Есть прямоугольники с большей площадью, чем трапеция, но есть и с меньшей, при одном и том же обводе. Зато можно дать вполне определённый ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь? Сравнивая наши прямоугольники, замечаем, что чем меньше разница в длине сторон, тем площадь прямоугольника больше. Естественно заключить, что когда этой разницы не будет вовсе, т. е. когда прямоугольник превратится в квадрат, площадь фигуры достигнет наибольшей величины. Она будет равна тогда $10 \cdot 10 = 100$ кв. вёрст. Легко видеть, что этот квадрат действительно превосходит по площади любой прямоугольник одинакового с ним периметра. Пахому следовало идти по сторонам квадрата, чтобы получить участок наибольшей площади, - на 22 квадратной версты больше, чем он успел охватить.

Единицы измерения площадей.

- Старые русские меры площадей.
- В «Русской правде»- законодательном памятнике, который относился к 11-13 векам, употребляется земельная мера *плуг*. Это была мера земли, с которой платили дань. Есть некоторые основания считать плуг равным 8-9 гектарам. Как и во многих других странах, за меру площади участок принимали количество ржи, необходимое для засева этой площади. В 13-15 веках основной единицей площади была *кадь*- площадь, для засева которой нужно было примерно 400 кг ржи. Половина этой площади, получившая название *десятина*, стала основной мерой площадей в дореволюционной Руси. Она равнялась примерно 1,1 гектара. Десятина иногда называлась *коробьей*.

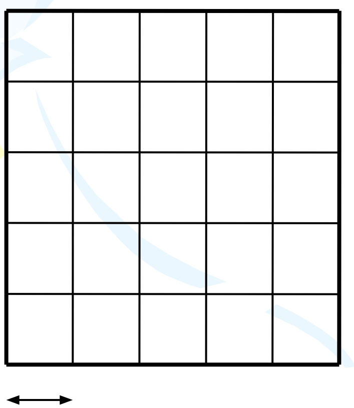
- Другая единица, равная половине десятины, называлась *четверть*.
- Налоговой единицей земли была *соха* (количество пахотной земли, которое был в состояние обработать один пахарь). В Новгороде – обжа, которая имела различные размеры в зависимости от качества земли и социального положения (духовенство, крестьяне, служильные).
- *Десятина*, которая в быту местами имела и другие размеры, делилась на 2 четверти, четверть в свою очередь делилась на 2 *осьмины*, осьмины – на 2 *полуосьмины*, полуосьмина – на 2 *четвертика* и т.д.
- Затем, при рождении метрической системе мер, за единицу измерения площадей стали принимать *квадратный метр.*

- Квадратная миля (США) (stature square mile) 2,58999 кв.км.
- Акр (acre) 4046,86 м2=0,404686 га.
- Квадратный ярд (square yard) 0,836127 кв.м.
- Квадратный фут (square foot) 926,030 кв.см.

Теоремы площадей фигур.

- **Теорема 1.**
- **Площадь квадрата равна квадрату его стороны.**
- Докажем что площадь S квадрата со стороной а равна а2 . Возьмем квадрат со стороной 1 и разобьем его на n равных квадратов так, как показано на рисунке

a



$a = \frac{1}{n}$

Так как сторона квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна

$\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$

, т.е. равна а. Из этого следует что

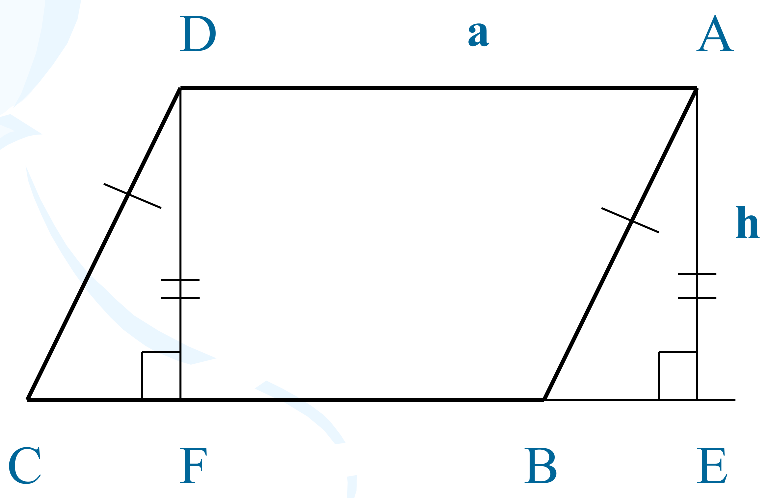
$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2$. Теорема доказана.

- **Теорема 2.**
- **Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне** (рис.2.):

S = a * h.
Пусть ABCD – данный параллелограмм. Если он не является прямоугольником, то один из его углов A или B острый. Пусть для определенности угол A острый .

S = a * h.

Пусть ABCD – данный параллелограмм. Если он не является прямоугольником, то один из его углов A или B острый. Пусть для определенности угол A острый .

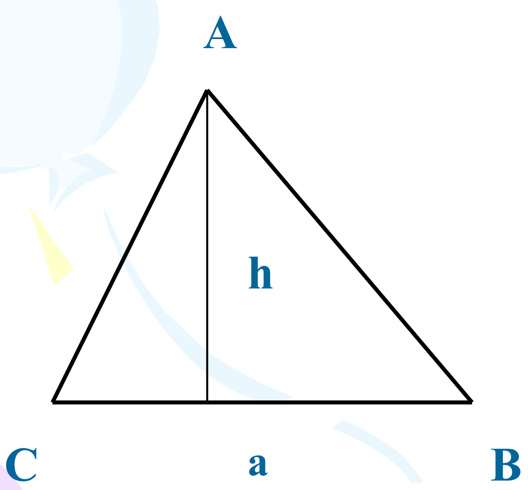


Опустим перпендикуляр AE из вершины A на прямую CB. Площадь трапеции AECD равна сумме площадей параллелограмма ABCD и треугольника AEB. Опустим перпендикуляр DF из вершины D на прямую CD. Тогда площадь трапеции AECD равна сумме площадей прямоугольника AEFD и треугольника DFC. Прямоугольные треугольники AEB и DFC равны, а значит, имеют равные площади. Отсюда следует, что площадь параллелограмма ABCD равна площади прямоугольника AEFD, т.е. равна AE * AD. Отрезок AE – высота параллелограмма, опущенная к стороне AD , и, следовательно, **S = a * h.** Теорема доказана.

- Теорема 3.
- Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту :

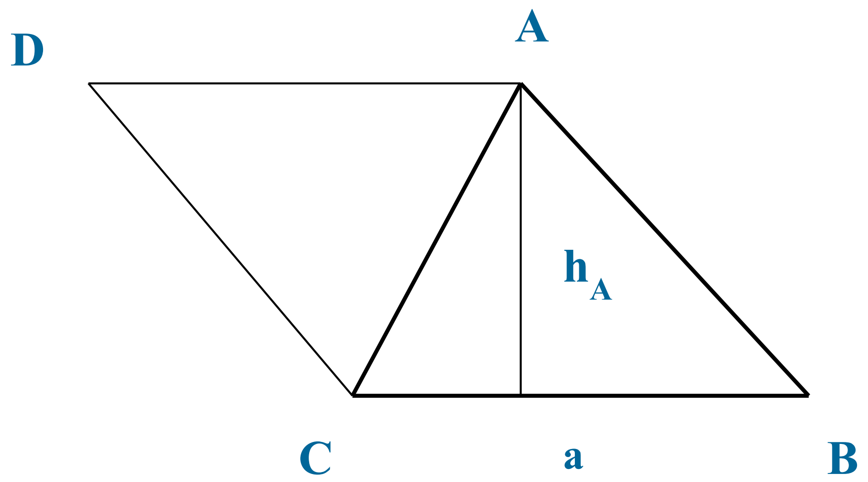
A

$$S = \frac{1}{2} a * h$$



Пусть ABC – данный треугольник. Дополним его до параллелограмма ABCD, как показано на рисунке .

A



- Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольников ABC и CDA. Так как эти треугольники равны, то площадь параллелограмма равна удвоенной площади треугольника ABC. Высота параллелограмма, соответствующая стороне CB, равна высоте треугольника, проведенной к стороне CB. Отсюда следует утверждение теоремы, Теорема доказана.

- **Теорема 3.1.**
- **Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.**

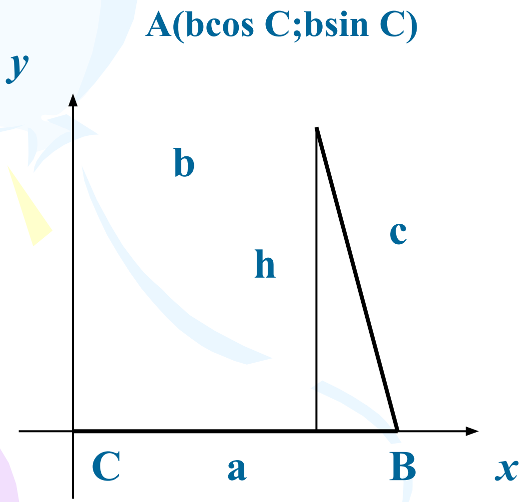
b

$$S=\frac{1}{2}ab*\sin C$$

Доказательство.

Введем систему координат с началом в точке C так, чтобы B лежала на положительной полуоси C_x , а точка A имела положительную ординату. Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле

$$S=\frac{1}{2}a*h$$



, где h – высота треугольника. Но h равна ординате точки A, т.е. h=b sin C. Следовательно,

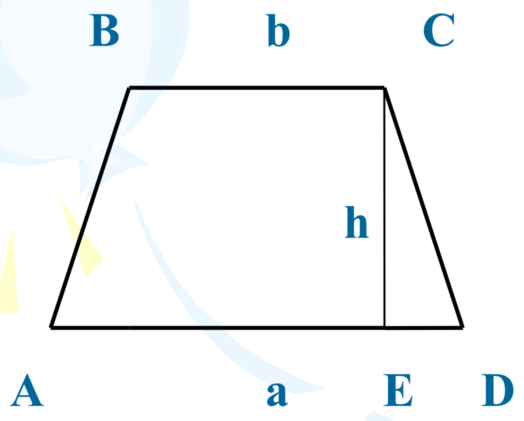
$$S=\frac{1}{2}ab*\sin C$$

. Теорема доказана.

- **Теорема 4 .**
- **Площадь трапеции равна произведению полусуммы его оснований на высоту**

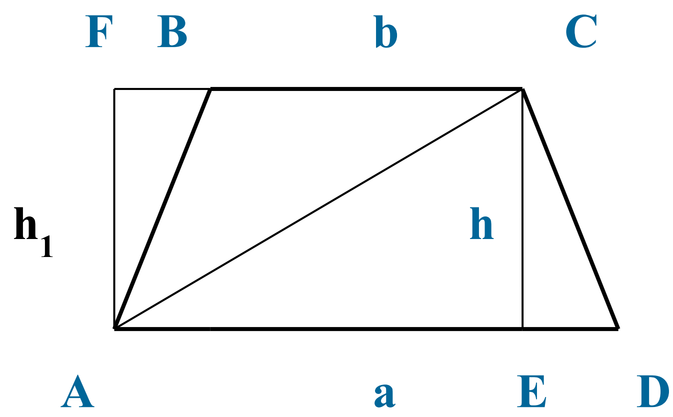
A (рис.4.).

$$S = \frac{a+b}{2} * h$$



Доказательство.
Пусть ABCD – данная трапеция:

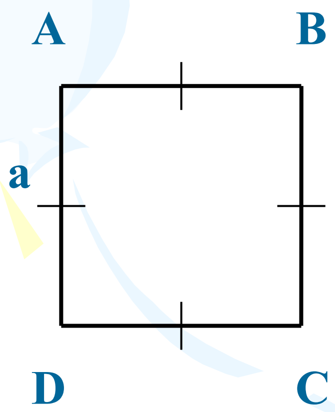
A



- Диагональ АС трапеции разбивает ее на два треугольника: АВС и CDA. Следовательно, площадь трапеции равна сумме площадей этих треугольников. Площадь треугольника ACD равна площадь треугольника АВС равна . Высоты AF и CE этих треугольников равна расстоянию h между параллельными прямыми ВС и AD, т.е. высоте трапеции. Следовательно,
- . Теорема доказана.

Задачи по теоремам:

- Задача по теореме 1



Дано: ABCD – квадрат, a – сторона квадрата равная 8 см.

Найти: S_{ABCD}

Решение: ABCD – квадрат, из теоремы площади квадрата известно что

$$S = a^2$$

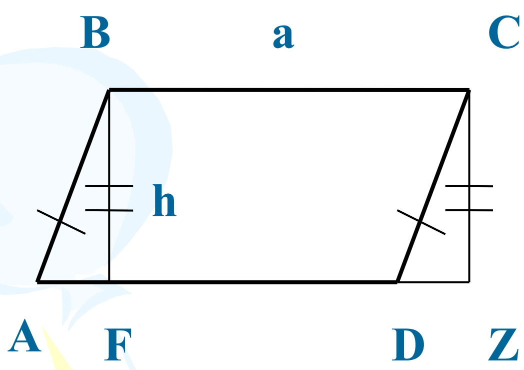
, из этого следует что

$$S_{ABCD} = a^2 = 8^2 = 64 см^2$$

Ответ: $S_{ABCD} = 64 см^2$

Задача по теореме 2.

- **Дано:** ABCD – параллелограмм**,** h – высота равная 3 см. сторона a = 5 см.



Найти: S_{ABCD}

Решение: ABCD – параллелограмм, из теоремы площади параллелограмма известно что

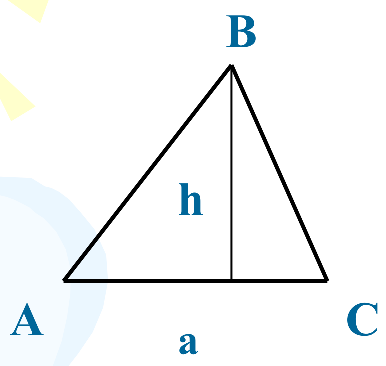
$$S = a * h$$

из этого следует что

$$S_{ABCD} = a * h = 5 * 3 = 15 см^2$$

Ответ: $S_{ABCD} = 15 см^2$

Задача по теореме 3.



- **Дано:** ABC - треугольник, h – высота равная 4 см. a – основание равное 6 см.
- **Найти:** SABC

Решение: ABC – треугольник, из теоремы площади треугольника известно что

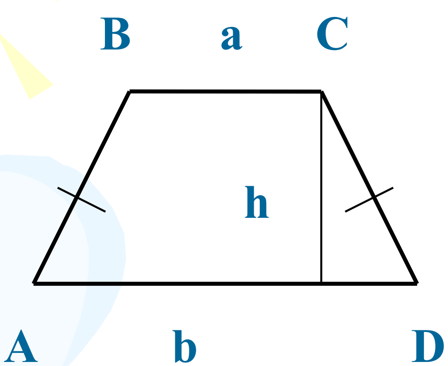
$$S = \frac{1}{2} a * h$$

из этого следует

что $S_{ABC} = \frac{1}{2} a * h = \frac{1}{2} 6 * 4 = 12 см^2$

Ответ: $S_{ABC} = 12 см^2$

Задача по теореме 4.



- **Дано:** ABCD – трапеция, h – высота равная 4 см.
- a – меньшее основание равное 4 см. b – большее
- основание равное 8 см.
- **Найти:** SABCD

Решение: ABCD – трапеция, из теоремы площади трапеции известно что

$$S = \frac{a+b}{2} * h$$

из этого следует

Решение: ABCD – трапеция, из теоремы площади трапеции известно что

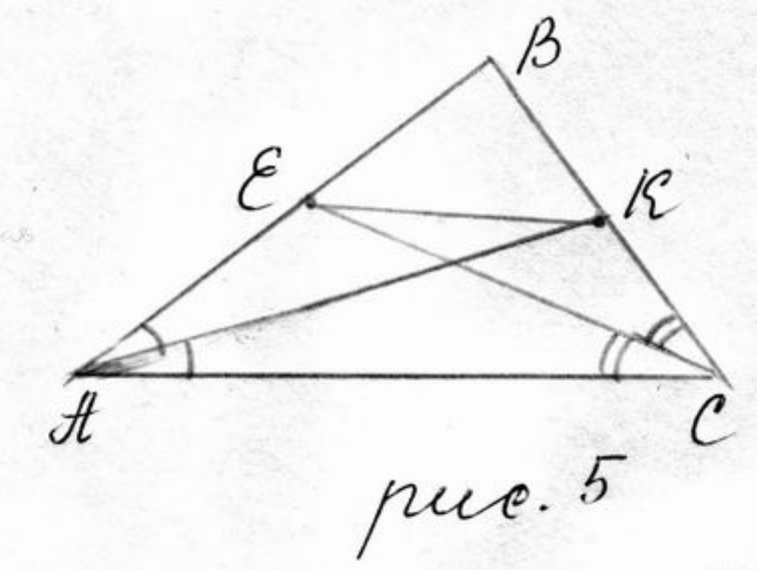
$$S = \frac{a+b}{2} * h$$

из этого следует что $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} * h = \frac{4+8}{2} * 4 = 24 см^2$

Ответ: $S_{ABCD} = 24 см^2$

Задача:

- В ΔABC проведены биссектрисы AK и CE. Найти отношение площадей ΔABC и ΔAEK, если AB=21, AC=28, BC=20.



Ответ:

- Решение:
- 1.Т.к.АК-биссектриса ΔАВС, то $\frac{BK}{AB}=\frac{CK}{AC};\frac{BK}{21}=\frac{20-BK}{28};$
- Отсюда $BK=8\frac{4}{7};CK=11\frac{3}{7}$
- 2.Т.к. СЕ-биссектриса ΔАВС, то $\frac{BE}{BC}=\frac{AE}{AC};\frac{BE}{20}=\frac{21-BE}{28};$
- Отсюда $BE=8\frac{4}{7};AE=11\frac{3}{7}$
- 3.Т.к. ΔАВС и ΔВЕК имеют общий угол В, то $\frac{S\Delta BEK}{S\Delta ABC}=\frac{BE\cdot BK}{AB\cdot BC}=\frac{5}{28},$
- т.к. ΔАВС и ΔАСК имеют общий угол С, то $\frac{S\Delta ACK}{S\Delta ABC}=\frac{AC\cdot CK}{AB\cdot BC}=\frac{4}{7}$
- 4. $S\Delta AEK=S\Delta ABC-S\Delta BEK-S\Delta AEK=S\Delta ABC-\frac{5}{28}\cdot S\Delta ABC-\frac{4}{7}\cdot S\Delta ABC=$ $=\frac{1}{4}S\Delta ABC$
- Итак, $\frac{S\Delta AEK}{S\Delta ABC}=\frac{1}{4}$ или $\frac{S\Delta ABC}{S\Delta AEK}=4$

Задача:

- В равнобедренной трапеции высота равна Н, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.
- 1 способ.

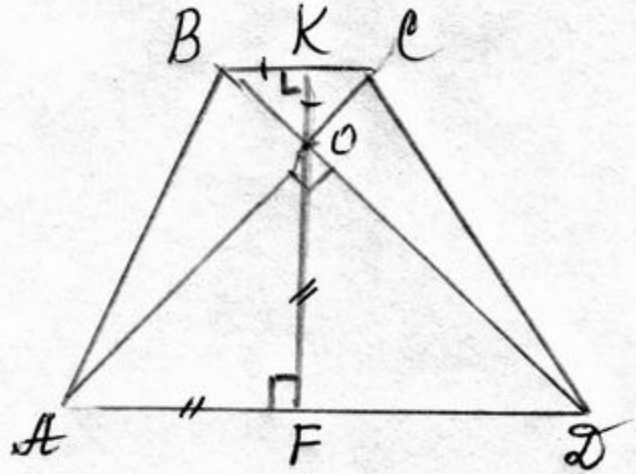


рис. 1

2 способ

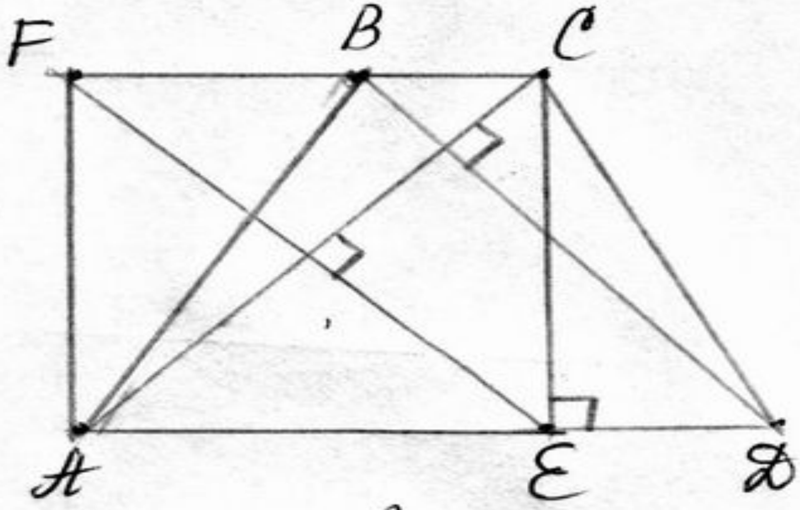


рис. 2

Ответ:

- 1 способ:

ΔAOF и ΔBOK – прямоугольные и равнобедренные, тогда OK=BK, OF=AF,
OK+OF=BK+AF= $\frac{1}{2}$BC+ $\frac{1}{2}$AD= $\frac{1}{2}$(BC+AD)=H

Тогда S(ABCD)= $\frac{1}{2}(BC + AD) \cdot KF = H \cdot H = H^2$

2 способ:Проведем CE $\perp$ AD и EF // BD, тогда FBDE – параллелограмм и FE = BD. Получили квадрат AFCF со стороной H, равносоставленный с трапецией ABCD, значит S(ABCD) = S(AFCE) = H^2

.

Задача:

- **Площадь треугольника**
- Все высоты треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 10000 квадратных единиц?

Ответ:

- Может. Таким будет, например, равнобедренный треугольник, основание которого равно 80000, а высота к основанию равна 0.5.

Задача:

- **Странный треугольник**
- Стороны треугольника равны 13, 18 и 31 см. Чему равна площадь?

Ответ:

- 0, т.к. получится не треугольник, а линия.

  В любом треугольнике всегда сумма длин двух любых сторон больше длины третьей.

Заключение.

- Площади фигур имеют огромное значение в геометрии, как в науке. Ведь площадь это одна из важнейших величин в геометрии. Без знания площадей невозможно решить множество геометрических задач, доказать теоремы, обосновать аксиомы. Площади фигур имели огромное значение много веков назад, но не утратили своего значения в современном мире. Понятия площадей используются во многих профессиях. Они применяются в строительстве, проектирование и во многих других видах деятельности человека. Из этого можно сделать вывод ,что без развития геометрии, в частности понятий о площадях, человечество не смогло бы такой большой прорыв в области наук и технике.

Литература

- Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 7-9. Учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Просвещение, 1995.
- Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия 8/9. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1996.
- Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Для студентов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1987.
- Атанасян Л. С. Геометрия 7-9. учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Просвещение, 2000.
- Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владимирова Н. Г. Геометрия 7-11. Учебник для общеобразовательных учреждений.- М.: Просвещение, 1996.
- Березина Л. Ю., Мельникова И. Б. Геометрия в 7-9 классах – М., 1990.
- Блок А. Я. Методика преподавания в школе. – М.: Просвещение, 1987.
- Воропаева Р. Н. Методические советы из опыта преподавания//Математика, 2001, №35, с. 25-28.
- Гильберт Д. Основания геометрии. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948.
- Глейзер Г. И. История математики в школе. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1964.
- Еникеева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике. – М., 1990.
- Ефимова А. И. Проблемы преподавания математики в школе. – С. – П., 1984.
- Киселев А. И., Рыбкин Н. А. Геометрия: Планиметрия: 7-9 кл.:Учебник и задачник. – М.: Дрофа, 1995.
- Колмогоров А. Н. Математика в её историческом развитии. – М.: Наука, 1991.
- Корешкова Т. А., Цукерман В. В. Многоугольники и их площадь в шеольном курсе математики// Математика в школе, 2003, №9, с. 10-18.
- Макарова Н. Д. Площадь. Единицы площади// Математика, 2002, №10, с. 30-31.
- Математический энциклопедический словарь. – М. «Советская энциклопедия», 1988.
- Перельман Я. И. Занимательная геометрия. Гос-ное изд-во технико-теоретической литературы. Москва – 1950. Ленинград.
- Погорелов А. В. Геометрия 7-11. Учебник для общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1999.
- Прицнер Б. С. Площадь четырёхугольника// Математика в школе, 1989, №5, с. 21-22.
- Рохлин В. А. Площади и объём. Энциклопедия элементарной математики. – М.: Наука, 1966.
- Рыбников К. А. История математики. – М.: МГУ, 1994.
- Сефибеков С. Р. Внеклассная работа по математике: кн. Для учителя. – М.: Просвещение, 1988.
- Шевченко И. Н. Методы обучения математике // Минск. Высшая школа, 1977.
- Энциклопедический словарь юного математика для старшего и среднего школьного возраста. – М.: Педагогика, 1989.
- Юшкевич А. П. История математики. – М., 1970.