

# ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Виконала:  
учениця 6-А класу  
Лапко Анастасія

- Вивчаючи на уроках алгебри тему «Лінійні рівняння», ми зустріли декілька задач, для розв'язку яких необхідно скласти лінійне рівняння з двома змінними, розв'язування яких викликали труднощі. Тут ми і познайомилися з Діофантовими рівняннями. А перед тим, перенесемося в історичну епоху, в якій жив Діофант.
- Олександрія - центр античної математики. У ній велися оригінальні дослідження, хоча переказ і коментування стали основним видом наукової діяльності. Олександрійські вчені приводили науку в порядок, збираючи розрізнені результати в єдине ціле, і багато праць античних математиків і астрономів дійшли до нас тільки завдяки їхній діяльності. Грецька наука з її незграбним геометричним способом вираження при систематичному відмовленні від алгебраїчних позначень згасала, алгебру й обчислення (прикладну математику) олександрійці взяли зі сходу, з Вавилону та Єгипту.

# Історичні відомості

- Діофант представляє одну із найцікавіших особистостей в історії математики. До нас дійшло 7 книг із 13, які були об'єднані в «Арифметику». Стиль і зміст цих книг дуже відрізняється від класичних книг з теорії чисел та алгебри, зразки яких ми знаємо з «Начал» Евкліда, лем Архімеда і Аполлонія. «Арифметика», безсумнівно, є результатом багаточисленних досліджень, велика кількість з яких залишилась нам невідомою.
- «Арифметика» Діофанта – це збірник задач (їх всього 189), кожна з яких має розв'язок і необхідні пояснення. В збірник входять різноманітні задачі, і їх розв'язки дуже часто не так просто зрозуміти.

# Рівняння Діофонта

Рівняння виду  $ax + by = c$  називається **лінійне діофантове рівняння** з двома невідомими, якщо  $a, b, c$  - цілі числа,  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ .

Приклади лінійних діофантових рівнянь з двома невідомими:

- 1)  $2x + 3y = -5$ , коефіцієнти рівняння  $a = 2, b = 3, c = -5$ .
- 2)  $-x - 3y = 10$ , коефіцієнти рівняння  $a = -1, b = -3, c = 10$ .
- 3)  $32x + 17y = 3$ , коефіцієнти рівняння  $a = 32, b = 17, c = 3$ .
- 4)  $32/x + 17y = 3^{0,5}$  - це недіофантове рівняння (бо коефіцієнти  $a$  та  $b$  являються нецілими числами), проте це лінійне рівняння відносно двох невідомих  $x$  та  $y$ .

# Діофантові рівняння першого степеня

Рівняння виду  $ax + by = c$  де  $a, b, c$  - числа, а  $x, y$  - змінні, називають діофантовим рівнянням першого степеня з двома змінними. Для розв'язання рівняння застосовують наступні теореми.

- ◎ **Теорема 1.** Якщо  $a$  і  $b$  - взаємно прості числа, то для будь якого цілого  $c$ , рівняння  $ax + by = c$  має хоча б один розв'язок в цілих числах.
- ◎ **Теорема 2.** Якщо  $a$  і  $b$  взаємно прості числа, то рівняння  $ax + by = c$  має нескінченну кількість розв'язків, які знаходять за формулами  $x = x_0 + bk$ ;  $y = y_0 - ak$ , де  $(x_0; y_0)$  - будь який цілий розв'язок даного рівняння,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Частинний розв'язок  $(x_0; y_0)$  можна знайти підбором, для малих  $a$  і  $b$ , а у випадку коли числа  $a$  і  $b$  великі, то користуємось наступною теоремою.

- ◎ **Теорема 3.**  $\text{НСД}(a, b) = d$  може бути записаний у вигляді  $d = at + bn$ , де  $t, n$  - цілі числа,  $d$  знаходимо за алгоритмом Евкліда.

Розв'яжемо рівняння в цілих числах  
 $13x+12y=55$

**Розв'язання:**

Так як  $\text{НСД}(13,12)=1$ , то дане рівняння має безліч розв'язків. Підбором встановлюємо частинний розв'язок  $(x_0; y_0) = (1;2)$ .

Тоді загальний розв'язок має вигляд  
 $x=1+12k; y=2-13k; k \in \mathbb{Z}.$

**Відповідь:**  $x=1+12k; y=2-13k; k \in \mathbb{Z}.$

# Спосіб знаходження «часткового» розв'язку діофантового рівняння

Для розв'язування лінійного діофантового рівняння з двома невідомими  $ax + by = c$  треба помножити все рівняння на спільний знаменник, а потім:

- ① **1)** перевірити умову розв'язності даного рівняння в цілих числах. Для цього спочатку ділять обидві частини рівняння на число  $m = \text{НСД}(a, b, c)$ , а потім перевіряють умову:  $\text{НСД}(a/m; b/m) = \text{НСД}(p; s) = 1$ , де  $a/m = p$ ;  $b/m = s$ ; якщо ця умова не виконується, тоді роблять висновок, що дане рівняння не має розв'язку в цілих числах.
- ② **2)** якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, тоді треба відшукати хоча б одну пару  $(x_0, y_0)$  цілих чисел, яка є розв'язком даного рівняння  $ax_0 + by_0 = c$ ; (це можна зробити: методом підбору, методом Евкліда, графічним способом та іншими способами.)
- ③ **3)** записати всю множину розв'язків лінійного діофантового рівняння з двома невідомими, як множину цілочисельних пар у вигляді  $(x_0 - ak, y_0 + bk)$ , де  $k$  - довільне ціле число.

Розв'язати рівняння в цілих числах  $3x - 12y = 7$ .

**Розв'язання:** Це рівняння не має цілих розв'язків. Ліва частина ділиться на 3, бо  $\text{НСД}(3;12) = 3$ , тоді як права частина не ділиться на 3. Звертаємо вашу увагу, що не виконується умова розв'язності: 7 не ділиться на ціло на 3.

**Відповідь:** розв'язку в цілих числах рівняння не має.

**Задача:** Чи можна зважити 28 г деякої речовини на терезах, якщо маємо тільки чотири гирі по 3 г і сім гир по 5 г?

**Розв'язання:** Нехай  $x$  — кількість гир по 3 г,  $y$  - кількість гир по 5 г ( $0 \leq x \leq 4$ ,  $0 \leq y \leq 7$ ). За умовою задачі  $3x + 5y = 28$ . Звідси  $x, y \in \mathbb{Z}$ .

Тоді  $y = 3t - 1$ ,  $x = 11 - 5t$ .

Враховуючи, що  $0 \leq x \leq 4$  і  $0 \leq y \leq 7$ , маємо:  $0 \leq 3t - 1 \leq 7$  і  $0 \leq 11 - 5t \leq 4$ . Обидві нерівності мають тільки один цілий розв'язок:  $t = 2$ . Отже,  $y = 5$ ,  $x = 1$ .

**Відповідь:** Треба взяти одну гирю масою 3 г і п'ять гир масою по 5 г.



- У даній науковій роботі розглядались діофантові рівняння. Таких рівнянь є надзвичайно багато, тому основною метою роботи було розглянути деякі з таких рівнянь та показати різні методи їх розв'язання.
- При написанні наукової роботи я дізналась про різні методи знаходження розв'язків невизначених рівнянь. Розглянула цікаві діофантові рівняння для яких існують розв'язки в цілих числах, навчилась знаходити ці розв'язки, або показувати, що їх не існує.
- Вміння розв'язувати діофантові рівняння дає змогу набагато простіше і швидше доводити існування чи не існування розв'язку деяких задач, а також при наявності розв'язків визначати їх кількість.
- «Щоб засвоїти знання, треба смакувати їх з апетитом». Ці слова французького письменника ХІХ ст. Анатолія Франса, стали для мене **творчим кредом** при праці над цією роботою. Адже тільки праця з бажанням дає позитивні результати.



ДЯКУЮ ЗА  
УВАГУ