К.Ю. Поляков

Множества и логика в задачах ЕГЭ по информатике

Множества и логика в задачах ЕГЭ // Информатика, № 10, 2015, с. 38-42.

Постановка задачи

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [37; 60]$ и $Q = [40; 77]$. *Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка* A, *что выражение*

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x.

Элементами множеств A, P *и* Q *являются натуральные числа, причём*

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ и } Q = \{4, 8, 12, 116\}.$$

Известно, что выражение

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in \mathrm{A})) \to \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x.
Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

Постановка задачи

Для какого наибольшего натурального числа A выражение

$$\neg ДЕЛ(x, A) \to (ДЕЛ(x, 6) \to \neg ДЕЛ(x, 4))$$

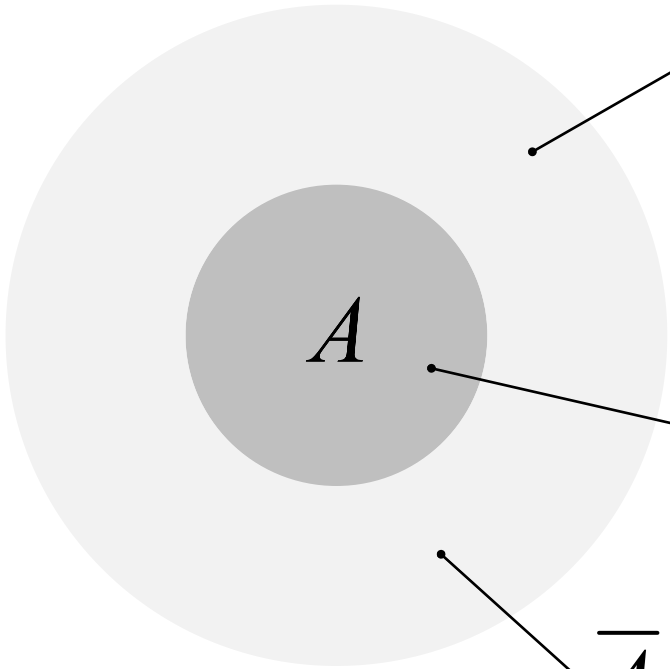
тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$(x \,\&\, 53 \neq 0) \to ((x \,\&\, 41 = 0) \to (x \,\&\, A \neq 0))$$

тождественно истинно?

Что нужно знать о множествах?

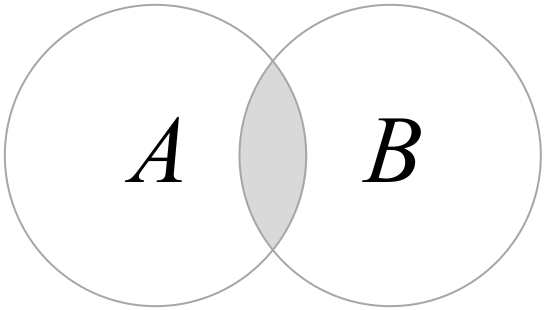


U – универсальное множество (*все натуральные*)

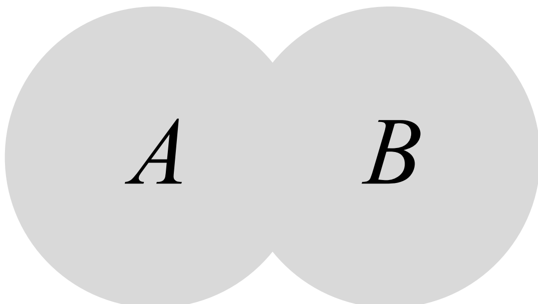
(*делятся на 6*)

$\overline{A}$ – дополнение A до универсального множества (НЕ *делятся на 6*)

Что нужно знать о множествах?



$A \cdot B$ – пересечение ($A \cap B$)

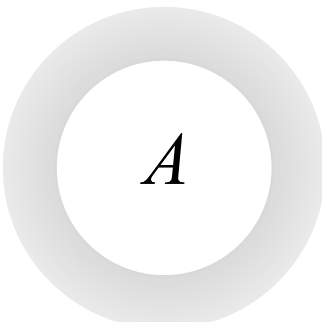


$A + B$ – объединение ($A \cup B$)

Множества и логические функции

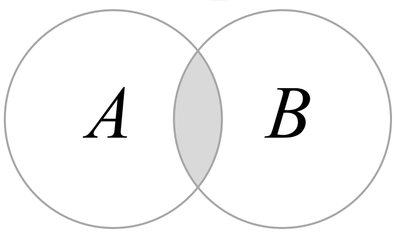
Множество задаётся логической функцией

$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}(x) = 1$$

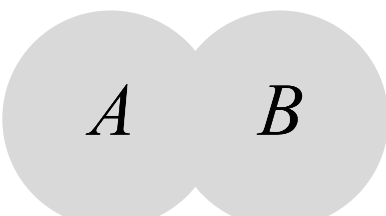


$$\overline{\mathbf{A}}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin A$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$



$$\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \cdot B$$



$$\mathbf{A}(x) + \mathbf{B}(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in A + B$$

Базовые задачи (ЕГЭ)

Задача 1. *Каким должно быть множество A для того, чтобы множество A + B совпадало с универсальным множеством?*

$$A + B = U \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{B}} \to \mathbf{A} = 1$$

$$\boxed{A_{\min} = \overline{B}}$$

Другие решения:

$$A \geq \overline{B} \qquad A \supseteq \overline{B}$$

Базовые задачи (ЕГЭ)

Задача 2. *Каким должно быть множество A для того, чтобы множество* $\overline{A}+B$ *совпадало с универсальным множеством?*

$$\overline{A}+B=U \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\mathbf{A}}+\mathbf{B}=1$$

$$\Leftrightarrow\quad \overline{\mathbf{B}}\to\overline{\mathbf{A}}=1$$

$$\overline{A}\ge\overline{B} \qquad \overline{A}\supseteq\overline{B}$$

$$A\le B \qquad A\subseteq B$$

$$A_{\max}=B$$

Общий подход к решению

1. Свести задачу к одной из базовых задач

   Задача 1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{B}} \to \mathbf{A} = 1$

   Задача 2. $\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{B}} \to \overline{\mathbf{A}} = 1$

2. Использовать готовое решение:

   Задача 1. $A_{\min} = \overline{B}$

   Задача 2. $A_{\max} = B$

Задачи с отрезками

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [37; 60]$ и $Q = [40; 77]$. *Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка* A, *что выражение*

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x.

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

Задачи с отрезками

Упрощение выражения:

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}}) \Leftrightarrow \overline{\mathbf{P}} + (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = 1$$

⇐ **Задача 1**

$$\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}}$$

Решение:

$$A_{\min} = \overline{B} = \overline{\overline{P} + \overline{Q}} = P \cdot Q$$

$$P = [37;\ 60],\ Q = [40;\ 77]$$

$$A_{\min} = [40;\ 60]$$

длина 20

Задачи с отрезками-II

На числовой прямой даны два отрезка: $P = [10; 20]$ и $Q = [25; 55]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что выражение

$$(x \in A) \to ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

истинно при любом значении переменной x.

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\mathbf{A} \to (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$

Задачи с отрезками-II

Упрощение выражения:

$$\mathrm{A} \to (\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathrm{A}} + \mathrm{P} + \mathrm{Q}$$

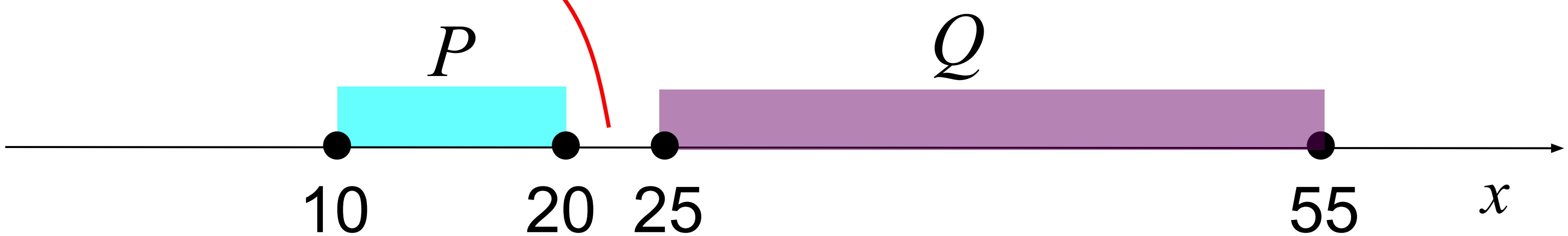
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\mathrm{A}} + \mathrm{B} = 1} \quad \Leftarrow \text{ **Задача 2**}$$

$\mathrm{P} + \mathrm{Q}$

Решение:

$$A_{\max} = B = P + Q \qquad P = [10;\ 20],\ Q = [25;\ 55]$$

Нельзя перекрыть!



$$A_{\max} = [25;\ 55]$$

длина 30

Множества чисел

Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \text{ и } Q = \{4, 8, 12, 116\}.$$

Известно, что выражение

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

истинно при любом значении переменной x.
Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

Множества чисел

Упрощение выражения:

$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}}) \Leftrightarrow \overline{\mathbf{P}} + (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} = 1$$

⇐ **Задача 1**

$$\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}}$$

Решение:

$$A_{\min} = \overline{B} = \overline{\overline{P} + \overline{Q}} = P \cdot Q$$

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\},\ Q = \{4, 8, 12, 116\}$$

$$A_{\min} = \{4, 8, 12\}$$

сумма 24

Множества чисел-II

Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём

$$P = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$Q = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \}.$$

Известно, что выражение

$$((x \in A) \to \neg(x \in P)) \wedge (\neg(x \in Q) \to \neg(x \in A))$$

истинно при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.

Вводим утверждения:

$$\mathbf{P} = (x \in P), \quad \mathbf{Q} = (x \in Q), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$(\mathbf{A} \to \overline{\mathbf{P}}) \cdot (\overline{\mathbf{Q}} \to \overline{\mathbf{A}})$$

Множества чисел-II

Упрощение выражения:

$$(A \to \overline{P})\cdot(\overline{Q} \to \overline{A}) \Leftrightarrow (\overline{A}+\overline{P})\cdot(Q+\overline{A})$$

$$\Leftrightarrow \overline{A}\cdot Q+\overline{P}\cdot Q+\overline{A}+\overline{P}\cdot\overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A}\cdot Q+\overline{P}\cdot Q+\overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A}+\overline{P}\cdot Q$$

$$\Leftrightarrow \overline{A}+B=1$$

$\Leftarrow$ **Задача 2**

Решение:

$$A_{\max} = B = \overline{P}\cdot Q$$

$\overline{P}\cdot Q$

$$P = \{\,2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$Q = \{\,3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\,\}$$

$$A_{\max} = \{\,3, 9, 15, 21, 24, 27, 30\,\}$$

7 шт.

Делимость

Для какого наибольшего натурального числа a выражение

$$\neg ДЕЛ(x, a) \rightarrow (ДЕЛ(x, 6) \rightarrow \neg ДЕЛ(x, 4))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D_N} = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие: $\overline{\mathbf{A}} \rightarrow (\mathbf{D_6} \rightarrow \overline{\mathbf{D_4}})$

Делимость

Упрощение выражения:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\mathbf{D}_6 \to \overline{\mathbf{D}}_4) \Leftrightarrow \mathbf{A} + (\mathbf{D}_6 \to \overline{\mathbf{D}}_4)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} + \overline{\mathbf{D}}_6 + \overline{\mathbf{D}}_4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = 1} \Leftarrow$$ **Задача 1**

$$\overline{\mathbf{D}}_6 + \overline{\mathbf{D}}_4$$

Решение:

$$A_{\min} = \overline{B} = \overline{\overline{D}_6 + \overline{D}_4} = D_6 \cdot D_4$$

Одновременно делятся на 6 и на 4!

$$D_6 \cdot D_4 = D_{12}$$

$$D_6 \cdot D_4 \le A = D_a$$

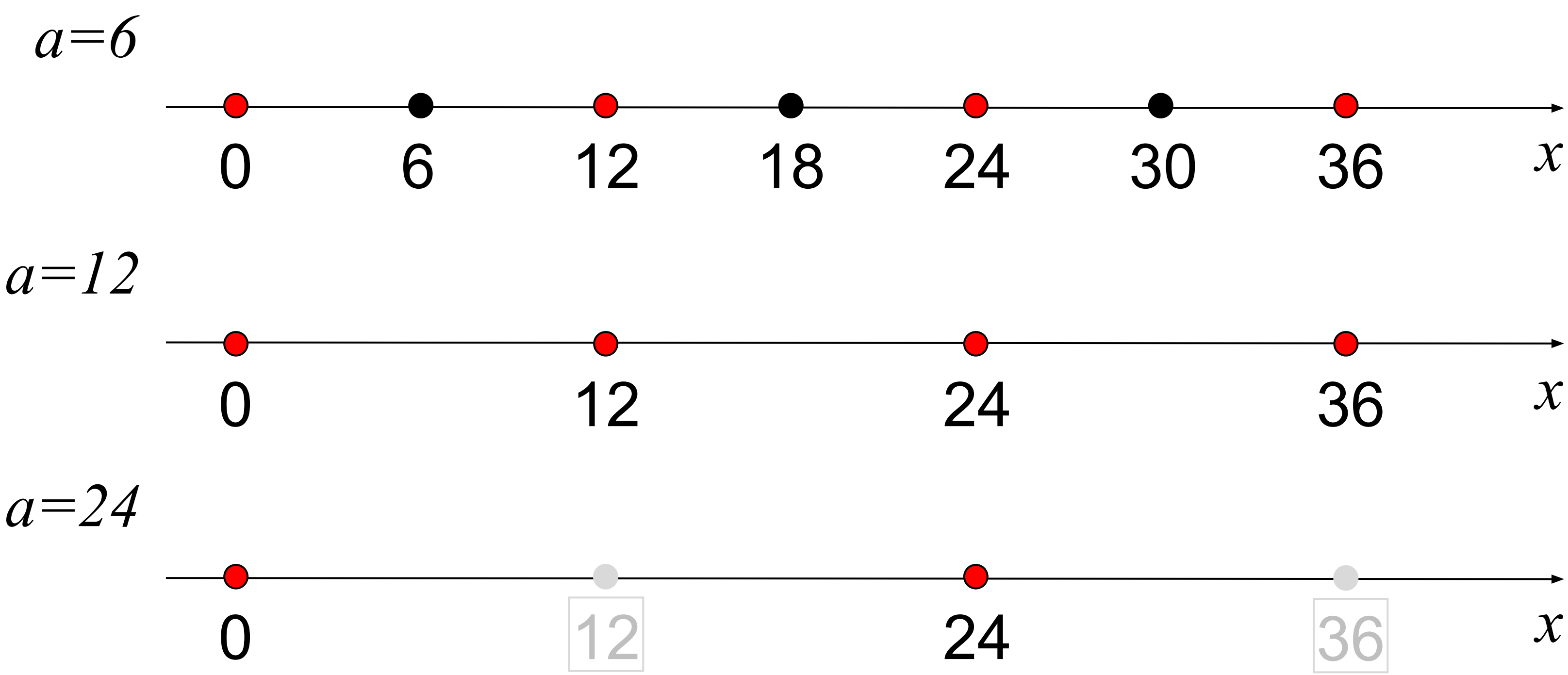
max

12

любой делитель 12!

$A_{min} \leftarrow a_{max}$

Почему максимальное число a дает минимальное множество A?



Делимость-II

Для какого наибольшего натурального числа a выражение

$$\neg ДЕЛ(x, a) \rightarrow (\neg ДЕЛ(x, 21) \wedge \neg ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D_N} = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\overline{\mathbf{A}} \rightarrow (\overline{\mathbf{D}}_{21} \cdot \overline{\mathbf{D}}_{35})$$

Делимость-II

Упрощение выражения:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{D}}_{21} \cdot \overline{\mathbf{D}}_{35}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} + \overline{\mathbf{D}}_{21} \cdot \overline{\mathbf{D}}_{35}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = 1} \quad \Leftarrow$$ **Задача 1**

$$\overline{\mathbf{D}}_{21} \cdot \overline{\mathbf{D}}_{35}$$

Решение:

$$A_{\min} = \overline{B} = \overline{\overline{D}_{21} \cdot \overline{D}_{35}} = D_{21} + D_{35}$$

Делятся на 21 или на 35!

$$D_{21} + D_{35} \cancel{=} D_a$$

нет такого a!

$$D_{21} + D_{35} < D_a$$

Общий делитель 21 и 35!

max

$\boxed{7}$

Делимость-III

Для какого наименьшего натурального числа a выражение

$$ДЕЛ(x, a) \to (\neg\, ДЕЛ(x, 21) \lor ДЕЛ(x, 35))$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D_N} = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\mathbf{A} \to (\overline{\mathbf{D}}_{21} + \mathbf{D}_{35})$$

Делимость-III

Упрощение выражения:

$$\mathbf{A} \to (\overline{\mathbf{D}}_{21} + \mathbf{D}_{35}) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{D}}_{21} + \mathbf{D}_{35}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B} = 1} \quad \Leftarrow \text{ Задача 2}$$

$\overline{\mathbf{D}}_{21} + \mathbf{D}_{35}$

Решение:

$$A_{\max} = B = \overline{D}_{21} + D_{35}$$

$$\overline{D}_{21} + D_{35} \cancel{=} D_a$$

нет такого a!

Не делятся на 21 или делятся на 35!

$$\overline{D}_{21} + D_{35} > A = D_a$$

Делимость-III

Переход к другой импликации:

$$\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{D}}_{21} + \mathbf{D}_{35} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{21}) \to \mathbf{D}_{35}$$

! Если число делится на a и на 21, оно должно делиться на 35!

Делится на A и на 21:

$$x = \boxed{a} \cdot k = 21 \cdot m = 3 \cdot \boxed{7} \cdot m$$

k, m – натуральные

Делится на 35:

$$x = 35 \cdot q = \boxed{5} \cdot \boxed{7} \cdot q$$

$$a = 5 \cdot r$$

min

5

Этот сомножитель добавляется с помощью A!

Делимость-IV

Для какого наименьшего натурального числа a выражение

$$(ДЕЛ(x, a) \wedge ДЕЛ(x, 21)) \to ДЕЛ(x, 18)$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D_N} = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{21}) \to \mathbf{D}_{18}$$

Делимость-IV

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}_{21}) \rightarrow \mathbf{D}_{18}$$

! Если число делится на A и на 21, оно должно делиться на 18!

Делится на A и на 21:

$$x = a \cdot k = 21 \cdot m = 3 \cdot 7 \cdot m$$

Делится на 18:

$$x = 18 \cdot q = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot q \qquad a = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot r$$

Эти сомножители добавляются с помощью A!

min

18

Делимость-V

Для какого наименьшего натурального числа a *выражение*

$$\neg ДЕЛ(x, 18) \to (\neg ДЕЛ(x,21) \to \neg ДЕЛ(x, a))$$

тождественно истинно?

D_N – множество чисел, делящихся на N

$A = D_a$ – множество чисел, делящихся на a

Вводим утверждения:

$$\mathbf{D_N} = (x \in D_N), \quad \mathbf{A} = (x \in A)$$

Заданное условие:

$$\overline{\mathbf{D}}_{18} \to (\overline{\mathbf{D}}_{21} \to \overline{\mathbf{A}})$$

Делимость-IV

$$\overline{D}_{18} \to (\overline{D}_{21} \to \overline{A}) \quad \Leftrightarrow \quad D_{18} + D_{21} + \overline{A}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{A} + B = 1 \quad \Leftarrow$$ **Задача 2**

$$D_{18} + D_{21}$$

Решение:

$$A_{max} = B = D_{18} + D_{21}$$

$$D_{18} + D_{21} \cancel{=} D_a$$

нет такого a!

Делятся на 18 или на 21!

$$D_{18} + D_{21} > A = D_a$$

Варианты:

$$A = \boxed{D_{18}}, D_{36}, \ldots$$

$$A = D_{21}, D_{42}, \ldots$$

! Нельзя перекрывать другие числа!

Побитовые логические операции

Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение

$$(x \mathbin{\&} 53 \neq 0) \to ((x \mathbin{\&} 41 = 0) \to (x \mathbin{\&} a \neq 0))$$

тождественно истинно.?

Вводим множества: $Z_N = \{x : x \mathbin{\&} N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \mathbin{\&} N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\overline{\mathbf{Z}}_{53} \to (\mathbf{Z}_{41} \to \overline{\mathbf{A}})$$

Число a определяет множество Z_a или условие $\mathbf{A}$.

Побитовые логические операции

Что такое Z_{53}*:*

биты 5 4 3 2 1 0

$53 = 110101$

$x = abcdef$

$x \,\&\, 53 = ab0d0f = 0$

Биты 5, 4, 2, 0 числа x нулевые!

Что такое $\overline{Z}_{53}$*:*

биты 5 4 3 2 1 0

$53 = 110101$

$x = abcdef$

$x \,\&\, 53 = ab0d0f \neq 0$

Среди битов 5, 4, 2, 0 числа x есть ненулевые!

Главная ошибка

После упрощения: $\mathbf{Z}_{21} + \overline{\mathbf{Z}}_{11} + \overline{\mathbf{A}} = 1$

```
биты  5 4 3 2 1 0
21  =  010101
11  =  001011
```

Натуральные числа!

Логические значения!

Вывод:

$$21 \text{ or } \overline{11} \text{ or } \bar{a} = 1$$

$$\bar{a} = \overline{21 \text{ or } \overline{11}}$$

$$a = 21 \text{ or } \overline{11} = 20$$

! Это ИНОГДА проходит!

? Это min или max?

Побитовые логические операции

$$Z_{53} \cdot Z_{30} \Leftrightarrow ?$$

биты 5 4 3 2 1 0

53 = 110101 $\quad Z_{53} \Rightarrow$

30 = 011110 $\quad Z_{30} \Rightarrow$

Биты 5, 4, 2, 0 числа x нулевые!

Биты 4, 3, 2, 1 числа x нулевые!

`63 = 111111 = 53 or 30`

$$Z_{53} \cdot Z_{30} \Leftrightarrow Z_{63} = Z_{53 \text{ or } 30}$$

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_{53} + \mathbf{Z}_{30} \Rightarrow ?$$

```
биты   5 4 3 2 1 0
53 = 110101    
30 = 011110    
20 = 010100 = 53 and 30
```

$Z_{53} \Rightarrow$ Биты 5, 4, 2, 0 числа x нулевые!

$Z_{30} \Rightarrow$ Биты 4, 3, 2, 1 числа x нулевые!

$$\mathbf{Z}_{53} + \mathbf{Z}_{30} \Rightarrow \mathbf{Z}_{20} = \mathbf{Z}_{53\text{ and }30}$$

Только в одну сторону!

Побитовые логические операции

$$Z_b \cdot Z_c \Leftrightarrow Z_{b \textbf{ or } c}$$

$$\boxed{Z_b + Z_c \Rightarrow Z_{b \textbf{ and } c}}$$

Двойственность операций **И** и **ИЛИ**

только для левой части импликации!

Доказательство:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} \to \mathbf{B} = 1 \\ \mathbf{B} \to \mathbf{C} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{A} \to \mathbf{C} = 1$$

От противного: $\mathbf{A} \to \mathbf{C} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = 1, \mathbf{C} = 0$

$$\left.\begin{aligned} 1 \to \mathbf{B} = 1 \\ \mathbf{B} \to 0 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{B} = 0 \Rightarrow 1 \to \mathbf{B} = 0$$

Побитовые логические операции

Биты 4, 2 и 0 нулевые!

Биты 4 и 0 нулевые!

$$\mathbf{Z}_b \rightarrow \mathbf{Z}_c = 1$$

биты 4 3 2 1 0

$\mathbf{Z}_b$: 21 = 10101

биты 4 3 2 1 0

$\mathbf{Z}_c$: 17 = 10001

! Множество единичных битов c входит во множество единичных битов b!

$$\mathbf{Z}_{21} \rightarrow \mathbf{Z}_7 = \boxed{0}$$

биты 4 3 2 1 0

$\mathbf{Z}_b$: 21 = 10101

биты 4 3 2 1 0

$\mathbf{Z}_c$: 7 = 00111

Побитовые логические операции

$$\mathbf{Z}_b \to \overline{\mathbf{Z}}_c \quad \Leftrightarrow \quad ?$$

$$\mathbf{Z}_b \to \overline{\mathbf{Z}}_c = \overline{\mathbf{Z}}_b + \overline{\mathbf{Z}}_c = \overline{\mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{Z}_c}$$

$$\mathbf{Z}_b \to \overline{\mathbf{Z}}_c = \overline{\mathbf{Z}_{b\,\mathbf{or}\,c}} = 0$$

? Для каких x?

Если в числе x не равен 0 хотя бы один бит, который равен 1 в b **or** c

Побитовые логические операции

$$Z_b \to (A + Z_c \cdot \overline{Z}_d) \Leftrightarrow ?$$

$$(Z_b \to A) + (Z_b \to Z_c) \cdot (Z_b \to \overline{Z}_d)$$

Вариант 1: $Z_b \to Z_c = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{Z_b \to A}$$

Вариант 2: $Z_b \to Z_c = 1$

$$(Z_b \to A) + \overline{Z_{b \text{ or } d}} = \overline{Z}_b + A + \overline{Z_{b \text{ or } d}}$$

$$= \overline{Z_b Z_{b \text{ or } d}} + A = \boxed{Z_{b \text{ or } d} \to A}$$

Побитовые логические операции

$$Z_b \to (A + Z_c) \Leftrightarrow ?$$

$$Z_b \to (A + Z_c) = (Z_b \to A) + (Z_b \to Z_c)$$

Вариант 1:

$$Z_b \to Z_c = 1$$

! a – любое!

Вариант 2:

$$Z_b \to Z_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_b \to A = 1}$$

! Множество единичных битов a входит во множество единичных битов b!

Побитовые логические операции

*Метод **А.В. Здвижковой** (г. Армавир):*

!

Строим импликацию так, чтобы избавиться от всех инверсий!

$$\overline{\mathbf{Z}}_{53} \to (\mathbf{Z}_{41} \to \overline{\mathbf{A}}) \Leftrightarrow \mathbf{Z}_{53} + (\mathbf{Z}_{41} \to \overline{\mathbf{A}})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Z}_{53} + \overline{\mathbf{Z}}_{41} + \overline{\mathbf{A}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbf{Z}_{41} \cdot \mathbf{A}} + \mathbf{Z}_{53}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{Z}_{41} \cdot \mathbf{A}) \to \mathbf{Z}_{53}$$

Побитовые логические операции

$$(Z_{41} \cdot A) \to Z_{53}$$

Решение:

Биты 5, 3, 0 нулевые!

Логическое ИЛИ между битами!

```
биты   5 4 3 2 1 0
41  =  1 0 1 0 0 1
 a  =  ? 1 ? 1 ? ?
------------------
53  =  1 1 0 1 0 1
```

Биты 5, **4**, **2**, 0 нулевые!

$a_{min} = 10100_2 = 20$

? Другие a?

Побитовые логические операции-II

Определите наибольшее натуральное число a, такое что выражение

$$(x \,\&\, a \neq 0) \rightarrow ((x \,\&\, 20 = 0) \rightarrow (x \,\&\, 5 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x \colon x \,\&\, N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \,\&\, N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\overline{\mathbf{A}} \rightarrow (\mathbf{Z}_{20} \rightarrow \overline{\mathbf{Z}}_5)$$

Побитовые логические операции-II

Упрощение выражения (до суммы):

$$\overline{A} \to (Z_{20} \to \overline{Z}_5) \Leftrightarrow A + (Z_{20} \to \overline{Z}_5)$$

$$\Leftrightarrow A + \overline{Z}_{20} + \overline{Z}_5 \Leftrightarrow \overline{Z_{20} \cdot Z_5} + A$$

Импликация без инверсий: $\Leftrightarrow (Z_{20} \cdot Z_5) \to A$

Решение:

биты 4 3 2 1 0

Z_{20} : 20 = 10100

Z_5 : 5 = 00101

Биты 4, 2 нулевые!

Биты 2, 0 нулевые!

$a_{max} = 10101_2 = 21$

a = 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21

? Другие a?

? Сколько?

$2^3 - 1 = 7$

Побитовые логические операции-III

Определите наибольшее натуральное число a, такое что выражение

$$(x \,\&\, a \neq 0) \to ((x \,\&\, 12 = 0) \to (x \,\&\, 21 = 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \,\&\, N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \,\&\, N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\mathbf{Z}_{12} \to \mathbf{Z}_{21})$$

Побитовые логические операции-III

Упрощение выражения:

$$\overline{A} \to (Z_{12} \to Z_{21}) \Leftrightarrow A + \overline{Z}_{12} + Z_{21}$$

$$\Leftrightarrow Z_{12} \to (A + Z_{21})$$

$$\Leftrightarrow (Z_{12} \to A) + (Z_{12} \to Z_{21})$$

$$= 0$$

От него ничего не зависит!

Решение:

биты 4 3 2 1 0

Z_{12} : 12 = 1100

Z_{21} : 21 = 10101

$$\Leftrightarrow Z_{12} \to A$$

a_{max} = 1100_2 = 12

Другие a?

a = 4, 8, 12

$2^2 - 1 = 3$

Побитовые логические операции-IV

Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение

$$((x \,\&\, 28 \neq 0) \vee (x \,\&\, 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \,\&\, 48 = 0) \rightarrow (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \,\&\, N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \,\&\, N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$(\overline{\mathbf{Z}}_{28} + \overline{\mathbf{Z}}_{45}) \rightarrow (\mathbf{Z}_{48} \rightarrow \overline{\mathbf{A}})$$

Побитовые операции–IV

Упрощение выражения:

$$(\overline{Z_{28}} + \overline{Z_{45}}) \to (Z_{48} \to \overline{A}) \Leftrightarrow (\overline{Z_{28} \cdot Z_{45}}) \to (\overline{Z_{48} \cdot A})$$

$$\Leftrightarrow Z_{48} \cdot A \to Z_{28} \cdot Z_{45}$$

Логическое ИЛИ между битами!

Решение:

		биты 5 4 3 2 1 0
Z_{28} :	28 =	11100
Z_{45} :	45 =	101101
$Z_{28} \cdot Z_{45}$:	=	111101
Z_{48} :	48 =	110000
	a =	??11?1
Z_{61} :	=	111101

Z_{61}

? Другие a?

$a_{min} = 1101_2 = 13$

Побитовые логические операции (V)

(**А.Г. Гильдин**). *Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение*

$$(x \,\&\, 19 = 0) \wedge (x \,\&\, 38 \neq 0) \vee ((x \,\&\, 43 = 0) \to ((x \,\&\, a = 0) \wedge (x \,\&\, 43 = 0)))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \,\&\, N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \,\&\, N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$\mathbf{Z}_{19} \cdot \overline{\mathbf{Z}}_{38} + (\mathbf{Z}_{43} \to (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}_{43}))$$

Побитовые логические операции (V)

Упрощение выражения:

$$Z_{19}\cdot\overline{Z}_{38}+(Z_{43}\to(A\cdot Z_{43})) \Leftrightarrow Z_{19}\cdot\overline{Z}_{38}+\overline{Z}_{43}+A\cdot Z_{43}$$

$$\Leftrightarrow Z_{43}\to(A\cdot Z_{43}+Z_{19}\cdot\overline{Z}_{38})$$

$$\Leftrightarrow (Z_{43}\to A\cdot Z_{43})+(Z_{43}\to Z_{19}\cdot\overline{Z}_{38})$$

$$= 0$$

$$\Leftrightarrow Z_{43}\to A\cdot Z_{43}$$

! Не влияют на решение!

Решение:

биты 5 4 3 2 1 0

Z_{43} : 43 = 101011

? Какие подходят?

Все, у которых единицы только в разрядах 5, 3, 1 и 0!

a = 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11,
32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43

$2^4 – 1 = 15$

Побитовые логические операции (VI)

(**М.В. Кузнецова**). *Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение*

$$((\,(x \,\&\, 13 \neq 0) \vee (x \,\&\, a \neq 0)) \to (x \,\&\, 13 \neq 0) \vee ((x \,\&\, a \neq 0) \wedge (x \,\&\, 39 = 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x: x \,\&\, N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \,\&\, N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$((\overline{\mathbf{Z}}_{13} + \overline{\mathbf{A}}) \to \overline{\mathbf{Z}}_{13}) + \overline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{Z}_{39}$$

Побитовые логические операции (V)

Упрощение выражения:

$$((\overline{Z_{13}} + \overline{A}) \to \overline{Z_{13}}) + \overline{A} \cdot Z_{39} \quad \Leftrightarrow \quad Z_{13} \cdot A + \overline{Z_{13}} + \overline{A} \cdot Z_{39}$$

$$\Leftrightarrow \quad (Z_{13} + \overline{Z_{13}}) \cdot (A + \overline{Z_{13}}) + \overline{A} \cdot Z_{39}$$

$$\Leftrightarrow \quad A + \overline{A} \cdot Z_{39} + \overline{Z_{13}}$$

$$\Leftrightarrow \quad A + Z_{39} + \overline{Z_{13}} \quad \Leftrightarrow \quad Z_{13} \to (A + Z_{39})$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_{13} \to (A + Z_{39}) \quad \Leftrightarrow \quad (Z_{13} \to A) + \underbrace{(Z_{13} \to Z_{39})}_{= 0}$$

$$\Leftrightarrow \quad Z_{13} \to A$$

! Не влияет на решение!

Решение:

```
биты   5 4 3 2 1 0
13  =      1 1 0 1
39  =  1 0 0 1 1 1
```

a = 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13

Побитовые логические операции (V)

Вариант с другими числами:

$$((\overline{Z_{53}} + \overline{A}) \to \overline{Z_{53}}) + \overline{A} \cdot Z_{21} \iff Z_{53} \to (A + Z_{21})$$

$$\iff (Z_{53} \to A) + (Z_{53} \to Z_{21})$$

! Всегда 1!

Решение:

```
биты   5 4 3 2 1 0
53  =  110101
21  =   10101
```

! Множество единичных битов числа 21 входит во множество единичных битов числа 53!

a – любое!

Побитовые логические операции (VI)

Определите наименьшее натуральное число a, *такое что выражение*

$$((x \,\&\, 23 \neq 0) \wedge (x \,\&\, 45 \neq 0)) \rightarrow ((x \,\&\, a \neq 0) \wedge (x \,\&\, 23 \neq 0))$$

тождественно истинно.

Вводим множества: $Z_N = \{x\colon x \,\&\, N = 0\}$

$$\overline{Z}_N = \{x : x \,\&\, N \neq 0\}$$

Вводим утверждения:

$$\mathbf{Z_N} = (x \in Z_N), \quad \mathbf{A} = (x \in Z_a)$$

Заданное условие:

$$(\overline{\mathbf{Z}}_{23} \cdot \overline{\mathbf{Z}}_{45}) \rightarrow (\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{\mathbf{Z}}_{23})$$

Побитовые логические операции (V)

Упрощение выражения:

$$(\overline{Z_{23}} \cdot \overline{Z_{45}}) \to (\overline{A} \cdot \overline{Z_{23}}) \Leftrightarrow Z_{23} + Z_{45} + \overline{A} \cdot \overline{Z_{23}}$$

$$\Leftrightarrow (Z_{23} + \overline{A}) \cdot (Z_{23} + \overline{Z_{23}}) + Z_{45}$$

$$\Leftrightarrow \overline{A} + Z_{23} + Z_{45}$$

$$\Leftrightarrow A \to (Z_{23} + Z_{45})$$

$$\Leftrightarrow (A \to Z_{23}) + (A \to Z_{45})$$

$$(A \to Z_{23}) \Rightarrow a_{\min} = 23$$

или

$$(A \to Z_{45}) \Rightarrow a_{\min} = 45$$

Нерешаемая задача

$$Z_{43} \to A \cdot Z_{48}$$

Попытка решения:

$$\begin{array}{rcl} & \text{биты} & 5\;4\;3\;2\;1\;0 \\ Z_{43}: 43 & = & 101011 \\ \hline a & = & ?????? \\ Z_{48}: 48 & = & 110000 \end{array}$$

Логическое ИЛИ между битами!

! С помощью a можно добавить биты, но нельзя убрать!

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru