



**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему:

**Анализ управляемой марковской
системы массового обслуживания
с неоднородными требованиями**

Научный руководитель: Иванов С.В., доцент каф. 804

Студент: Зайцева Е.П., группа 8О-204М-15

Москва 2017г.

Объект. Предмет. Цель.

Объект исследования: одноканальная приоритетная Марковская система массового обслуживания.

Предмет исследования: поиск оптимальной стратегии управления приоритетами в одноканальной системе массового обслуживания.

Цель исследования: построить оптимальную стратегию выбора динамического приоритета.

Задачи исследования:

- изучить математический аппарат, позволяющий провести анализ и обоснование оптимальной стратегии управления в СМО;
- проанализировать факторы и построить математическую модель функционирования системы массового обслуживания с несколькими потоками неоднородных требований;
- исследовать управляемую марковскую систему массового обслуживания с приоритетами;
- построить алгоритм определения оптимальной стратегии управления
- реализовать вычислительный эксперимент;
- проанализировать полученный результат.

Математический аппарат анализа управляемых Марковских и полумарковских процессов с конечным множеством состояний E

$$X(t) = \{ (i, u) \mid i \in E, u \in U \}, \quad (u) t \in U \in$$

Траектории этих компонент, есть ступенчатые функции и точки разрывов совпадают.

Моменты изменения состояний (скачки) являются Марковскими моментами. Время непрерывного пребывания в фиксированном состоянии для Марковского процесса имеет экспоненциальное распределение.

Время непрерывного пребывания для полумарковского процесса имеет произвольное распределение.

Случайный процесс задается характеристиками:

1. Полумарковское ядро $Q_{i,j}(t, u)$ - вероятность того, что первая компонента перейдет в состояние j , за время меньшее чем t при условии, что в данный момент состояние i и принято решение u .
2. Набор вероятностных мер $G = \{G_i \mid i \in E\}$, определенных на сигма алгебрах подмножеств множеств E_i (стратегия управления).

Функционал, определенный на траекториях процесса $X(t)$, задается условными математическими ожиданиями накопленного эффекта $R_{i,j}(t,u)$ периоде между соседними моментами изменения состояний полумарковского процесса при условии, что процесс пребывает в состоянии i , переходит в состояние j , длительность периода равна t и на этом периоде было принято решение u .

$S(t)$ – математическое ожидание накопленного эффекта за время t .

$$S^*(G) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \frac{\sum_{i \in E} \pi_i s_i}{\sum_{i \in E} \pi_i} \quad - \quad \begin{array}{l} \text{средний удельный доход при длительном} \\ \text{функционировании системы,} \end{array}$$

где

$$s_i(G_i) = \sum_{j \in E} \int_0^\infty \int_{U_i} R_{ij}(t,u) dQ_{ij}(t,u) G_i(du)$$

математическое ожидание накопленного эффекта за полное время пребывания в состоянии i .

$$m_i(G_i) = \int_0^\infty \left(1 - \sum_{j \in E} Q_{ij}(x, u) G_i(du) \right) dx$$

математическое ожидание времени непрерывного пребывания процесса в состоянии

π_i - стационарные вероятности состояний вложенной цепи Маркова.

$$\pi_i = \sum_{j \in E} \pi_j p_{ji}, \quad \sum_{j \in E} \pi_j = 1$$

$$p_{ij}(G_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{U_i} Q_{ij}(t, u) G_i(du)$$

Тогда задача состоит в поиске максимума и распределении на котором достигается максимум

$$\max_{G \in \Omega} S(G) = S(G^{(0)}) = \max_{u_i \in U_i} S(G_i(\{u_i\})), i \in \mathbb{N}$$

причем экстремум можно искать по множеству вырожденных распределений

$$G_i(\{u_i\}) = 1$$

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим одноканальную СМО, на вход которой поступает $K=2$ типа требований.

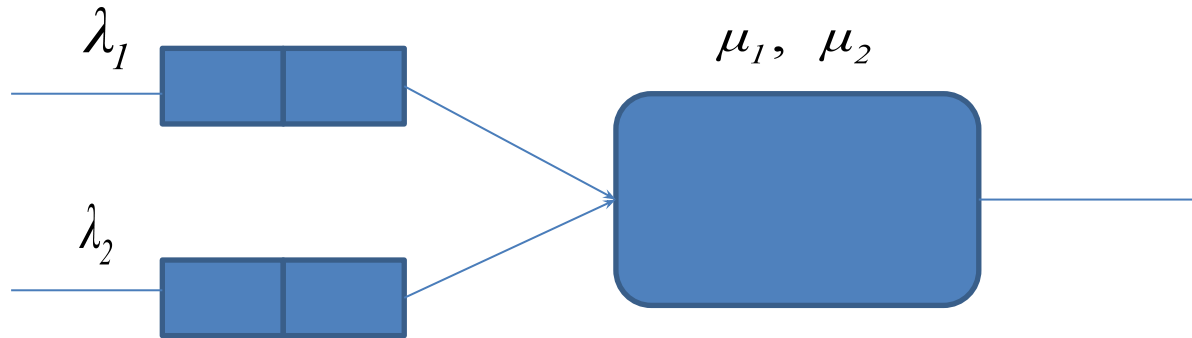


Рис. Одноканальная СМО

- Входящие потоки требований есть стационарные пуассоновские потоки, с параметрами λ_1 и λ_2 .
- Каждый тип требования (K) формирует свою очередь.
- Максимальная длина для каждой очереди $N_1; N_2$.
- Длительность обслуживания требований пуассоновских потоков имеет экспоненциальное распределение с параметрами μ_1 и μ_2 .

Алгоритм построения оптимальной вырожденной стратегии управления полумарковским процессом.

Математическое описание системы

Марковские моменты прихода и ухода требований из системы.

Первая компонента случайного Марковского процесса определяется равенством:

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$$

$\xi_1(t)$ - количество занятых мест в первой очереди;

$\xi_2(t)$ - количество занятых мест во второй очереди;

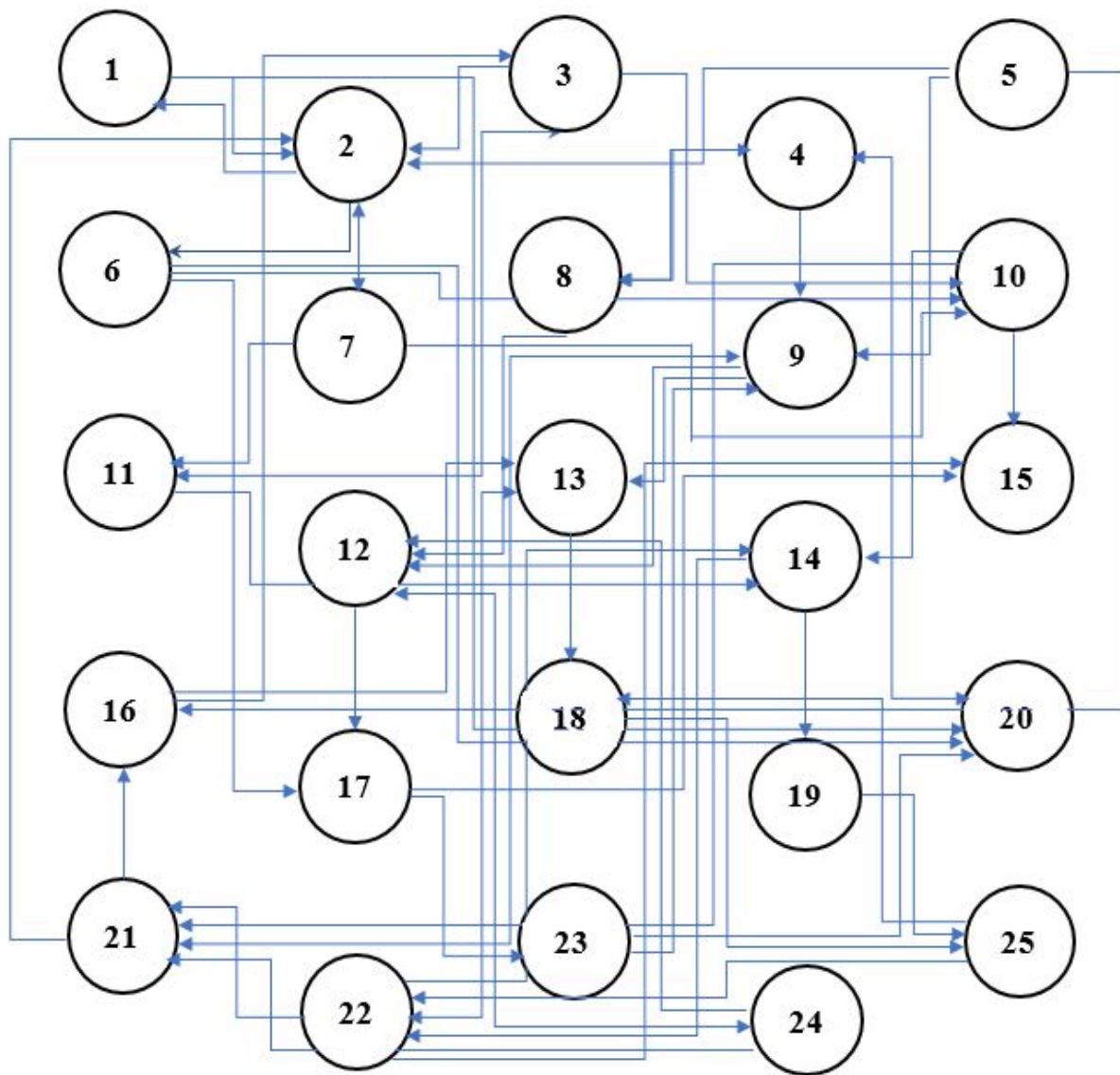
$$\xi_3(t) = \begin{cases} 1, & \text{если обслуживается требование из первой очереди} \\ 2, & \text{если обслуживается требование из второй очереди} \\ 0, & \text{если канал свободен} \end{cases}$$

Таблица 2.1 Состояния системы в момент принятия решений

№	Начальное состояние	Множество решений	Конечные состояния	№	Начальное состояние	Множество решений	Конечные состояния
1	0;0;0	0	2, 20	14	1;2;2	0	22,19,14
2	0;1;0 (0;0;2)	2	1, 6, 7	15	2;1;2	0	24,15,19
3	0;2;0 (0;1;2)	2	2,10,11	16	0;2;1	0	3,13,16
4	1;0;1	0	20,8,9	17	2;0;2	0	23,17,15
5	0;1;1	0	2,9,16	18	2;2;1	0	25,18,18
6	1;0;2	0	20,17,10	19	2;2;2	0	25,19,19
7	0;1;2	0	2,10,11	20	1;0;0 (0;0;1)	1	1, 4, 5
8	2;0;1	0	4,8,12	21	1;1;0 (0,1,1) (1,0,1)	1 2	I) 2,9,16 II) 20;17;10
9	1;1;1	0	21,12,13	22	1;2;0 (0,2,1) (1,1,2)	1 2	I) 3;13;16 II) 21,15,14
10	1;1;2	0	21,15,14	23	2;0;0 (1;0;1)	1	20,8,9
11	0;2;2	0	3,14,11	24	2;1;0 (1,1,1) (0,0,2)	1 2	I) 21,12,13 II) 23,17,15
12	2;1;1	0	24,12,17	25	2;2;0 (1,2,1) (2,1,2)	1 2	I) 22,18,13 II) 24,15,19
13	1;2;1	0	22,18,13				

№ состояния	№ стратегии							
	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	...	16-я
1.	0	0	0	0	0	0		0
2.	2	2	2	2	2	2		2
3.	2	2	2	2	2	2		2
4.	0	0	0	0	0	0		0
5.	0	0	0	0	0	0		0
6.	0	0	0	0	0	0		0
7.	0	0	0	0	0	0		0
8.	0	0	0	0	0	0		0
9.	0	0	0	0	0	0		0
10.	0	0	0	0	0	0		0
11.	0	0	0	0	0	0		0
12.	0	0	0	0	0	0		0
13.	0	0	0	0	0	0		0
14.	0	0	0	0	0	0		0
15.	0	0	0	0	0	0		0
16.	0	0	0	0	0	0		0
17.	0	0	0	0	0	0		0
18.	0	0	0	0	0	0		0
19.	0	0	0	0	0	0		0
20.	1	1	1	1	1	1		1
21.	1	2	1	2	1	2		2
22.	2	1	1	2	2	2		2
23.	1	1	1	1	2	2		2
24.	1	1	1	1	1	1		2
25.	1	1	1	1	1	1		2

Граф перехода из состояния в состояние для 1й стратегии



Стоимостные характеристики:

$C_{опер}^i$ - плата (потери) за один час работы одного задействованного канала, обслуживающего i -е требование;

$C_{оч}^i$ - плата (потери) за один час пребывания в очереди одного i -го требования;

$C_{ном}^i$ - плата (потери) за потерю одного i -го требования;

C_o^i - плата (прибыль) за одно i -е обслуженное требование ($i = 1, 2$).

Величина C_o^i положительная, остальные величины отрицательные.

Размерность величин C_o^i , $C_{ном}^i$ стоимость (например, рубли за штуку),

размерность величин $C_{опер}^i$, $C_{оч}^i$ стоимость в час.

- Параметры входящих потоков $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2$
- Параметры распределения длительности обслуживания $\mu_1 = 19, \mu_2 = 14$
- Возможное число обслуживающих приборов $n = 1$
- Число мест для ожидания $N = 1$
- Стоимостные характеристики:

$$C_o^{(1)} = 39; C_o^{(2)} = 69; C_{oper}^{(1)} = 45; C_{oper}^{(2)} = 56$$

$$C_{оч}^{(1)} = 26; C_{оч}^{(2)} = 33; C_{nom}^{(1)} = 67; C_{nom}^{(2)} = 52$$

Результаты

Первая часть вычислительной реализации заключается в следующем: изменяя описанные выше стратегии (16 вырожденных стратегий) для заданных исходных числовых параметров, определить математическое ожидание удельного дохода.

Результаты вычислений приведены на Рис. 1

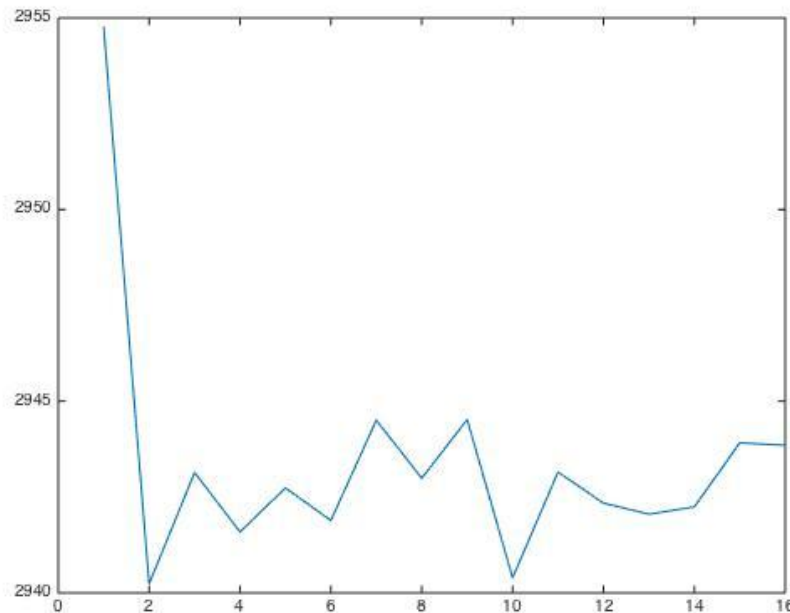


Рис. 1 График зависимости прибыли от стратегии

- Ось x – номер стратегии.
- Ось y – S^* доход (прибыль) соответствующий выбранной стратегии.

В данном случае наибольшую прибыль мы получим при принятии (первой стратегии (рис. 1)) решений:

- в состоянии 21 принимается решение первым взять на обслуживание требование 1-го типа;
- в состоянии 22 принимается решение первым взять на обслуживание требование 2-го типа;
- в состоянии 24 принимается решение первым взять на обслуживание требование 1-го типа;
- в состоянии 25 принимается решение первым взять на обслуживание требование 1-го типа;

а в остальных стратегиях с вероятностью единица принимается единственное решение.

Вторая часть вычислительного эксперимента заключается в варьировании числовых исходных данных и определении оптимального дохода (при выборе оптимальной стратегии).

При фиксировании исходных показателей, кроме дохода за обслуженное требование первого типа, и увеличивая его от 9 до 500.

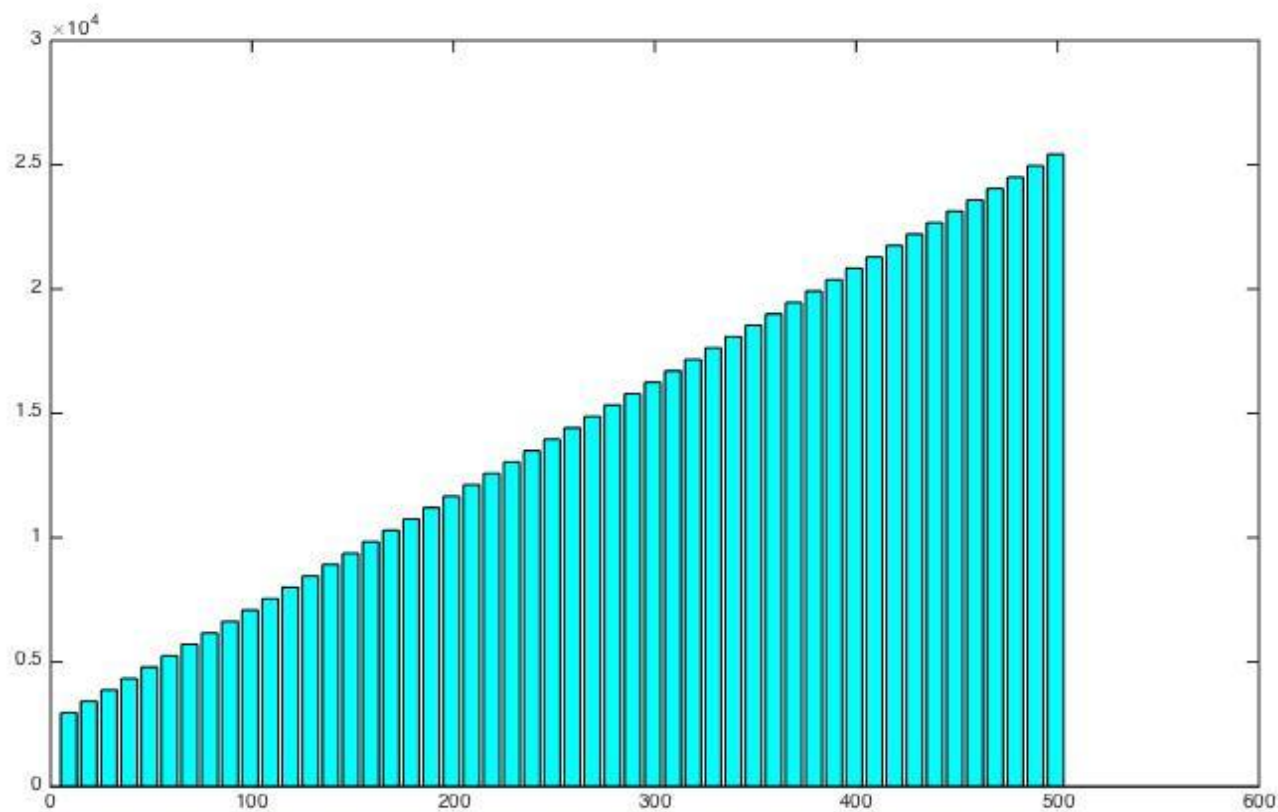


Рис. 2 График зависимости прибыли от дохода за обслуживание I-го типа требования.

Ось x – дохода за обслуживание I-го типа требований.

Ось y – оптимальный S доход (прибыль), соответствующий выбранным значениям параметров.

Для выбранного диапазона исходных числовых характеристик в результате вычислительного эксперимента получили, что оптимальная стратегия одна и та же, а при изменении одного из числовых параметров, оптимальных доход — есть линейная функция этого параметра, что соответствует теоретическим рассуждениям.

Заключение

- исследована управляемая марковская система массового обслуживания;
- проанализированы внешние и внутренние факторы, влияющие на систему, выделены характерные черты, определены параметры и переменные, построена математическая модель;
- проведено аналитическое исследование модели;
- решена задача построения оптимальной стратегии динамического управления приоритетами.
- проведен анализ одноканальной марковской СМО с двумя типами требований.
- проведен вычислительный эксперимент для конкретной задачи.