

The image shows two red dice on a dark, reflective surface. The die in the foreground is in sharp focus, showing its top face with a blue '1' and its front face with a blue '2'. The die in the background is out of focus, showing a blue '5' on its top face. The lighting is dramatic, with strong highlights and deep shadows, creating a sense of depth and texture.

*Случайные величины,
законы их распределения и
числовые характеристики*

Основные вопросы:

- **Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины.**
- **Числовые характеристики дискретных случайных величин.**

Определение

Случайной величиной называется переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

● Пример

Случайными величинами являются: *температура больного в некоторое наугад выбранное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента.*

Определение

- **Дискретной случайной величиной** называется такая величина, которая в результате опыта может **принимать определенные значения с определенной вероятностью**, образующие **счетное множество** (множество, элементы которого могут быть занумерованы).
- Это множество может быть как **конечным**, так и **бесконечным**.
- **Например**, число посетителей аптеки в течение дня, количество яблок на дереве.

Определение

- **Непрерывной случайной величиной** называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.
- Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины **бесконечно**.
- **Например**: температура больного в фиксированное время суток, масса наугад выбранной таблетки некоторого препарата, рост наугад выбранного студента

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины X_1, X_2, X_3, \dots и соответствующими им вероятностями p_1, p_2, p_3, \dots .

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**.

Рассмотрим дискретную случайную величину X с возможными значениями x_1, x_2, \dots, x_n . Каждое из этих значений возможно, но не достоверно, и величина X может принять каждое из них с некоторой вероятностью. В результате опыта величина X примет одно из этих значений, т. е. произойдет одно из полной группы несовместных событий.

Обозначим вероятности этих событий буквами p с соответствующими индексами:

$$P(X=x_1)=p_1; \quad P(X=x_2) = p_2; \quad \dots; \quad P(X = x_n) = p_n.$$

Так как *несовместные* события образуют полную группу, то сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна единице

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Ряд распределения случайной величины X имеет следующий вид

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Чтобы придать ряду распределения более наглядный вид, часто прибегают к его **графическому изображению**: по *оси абсцисс* откладываются возможные значения случайной величины X , а по *оси ординат* — вероятности этих значений P .

Такая фигура называется **многоугольником распределения (полигон частот)**.

Пример 2. По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень. Найти ее закон распределения.

△ Случайная величина X может принимать следующие значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3.$$

Для определения соответствующих вероятностей составим производящий многочлен:

$$(0,2 + 0,8x)^3 = 0,2^3 + 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8x + 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 x^2 + 0,8^3 x^3.$$

Известно, что коэффициент при x^k дает вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное k . Поэтому

$$p_1 = 0,2^3 = 0,008,$$

$$p_2 = 3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8 = 0,096,$$

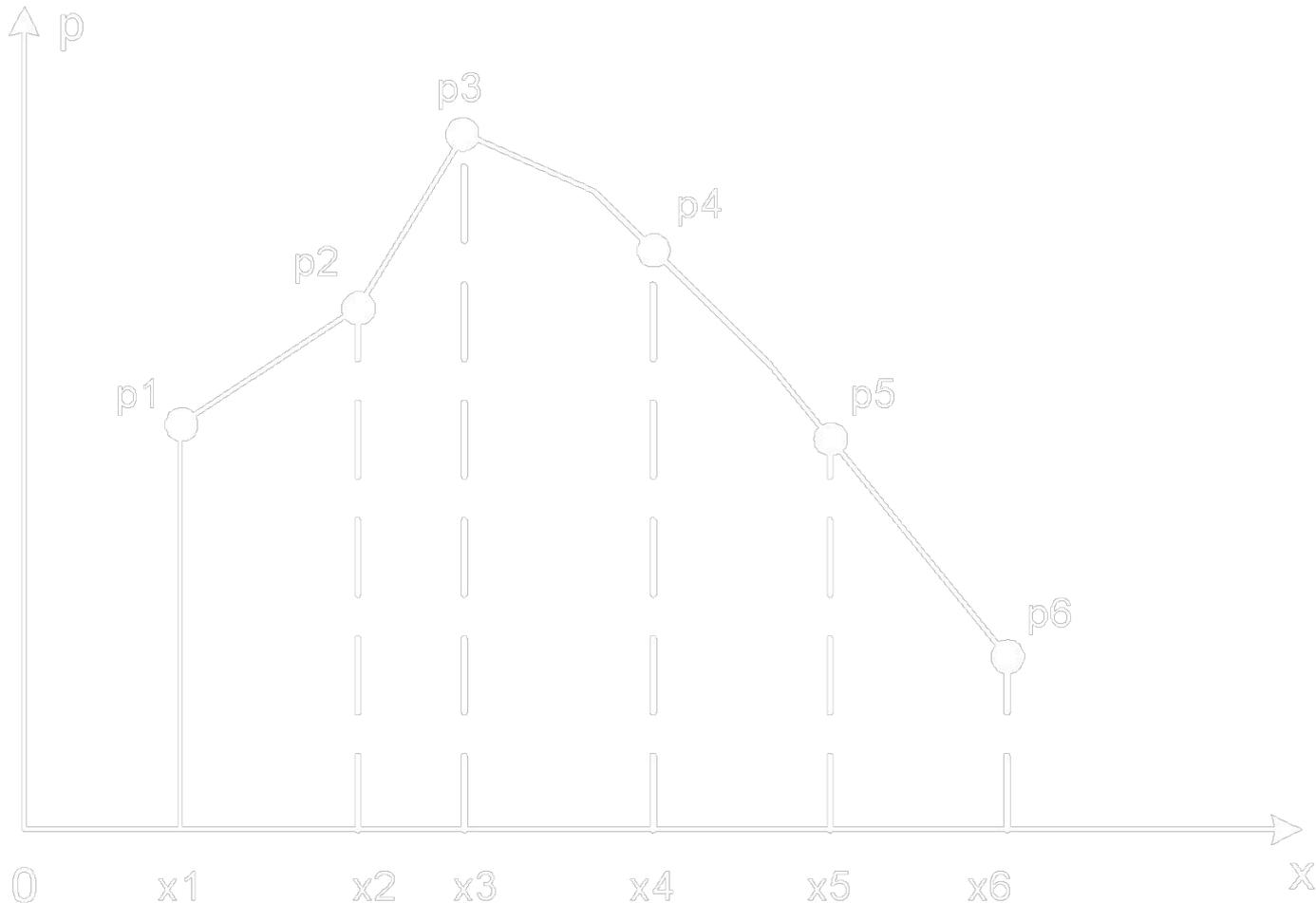
$$p_3 = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384,$$

$$p_4 = 0,8^3 = 0,512.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

Многоугольник распределения, так же как и ряд распределения, полностью характеризует случайную величину; он является одной из форм закона распределения.



Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Решение:

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов |

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!1!} p^4 (1-p) = 0,0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!2!} p^3 (1-p)^2 = 0,2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$$

Итак,

$$P_{5,5} = 0,01024, \quad P_{4,5} = 0,0768, \quad P_{3,5} = 0,2304$$

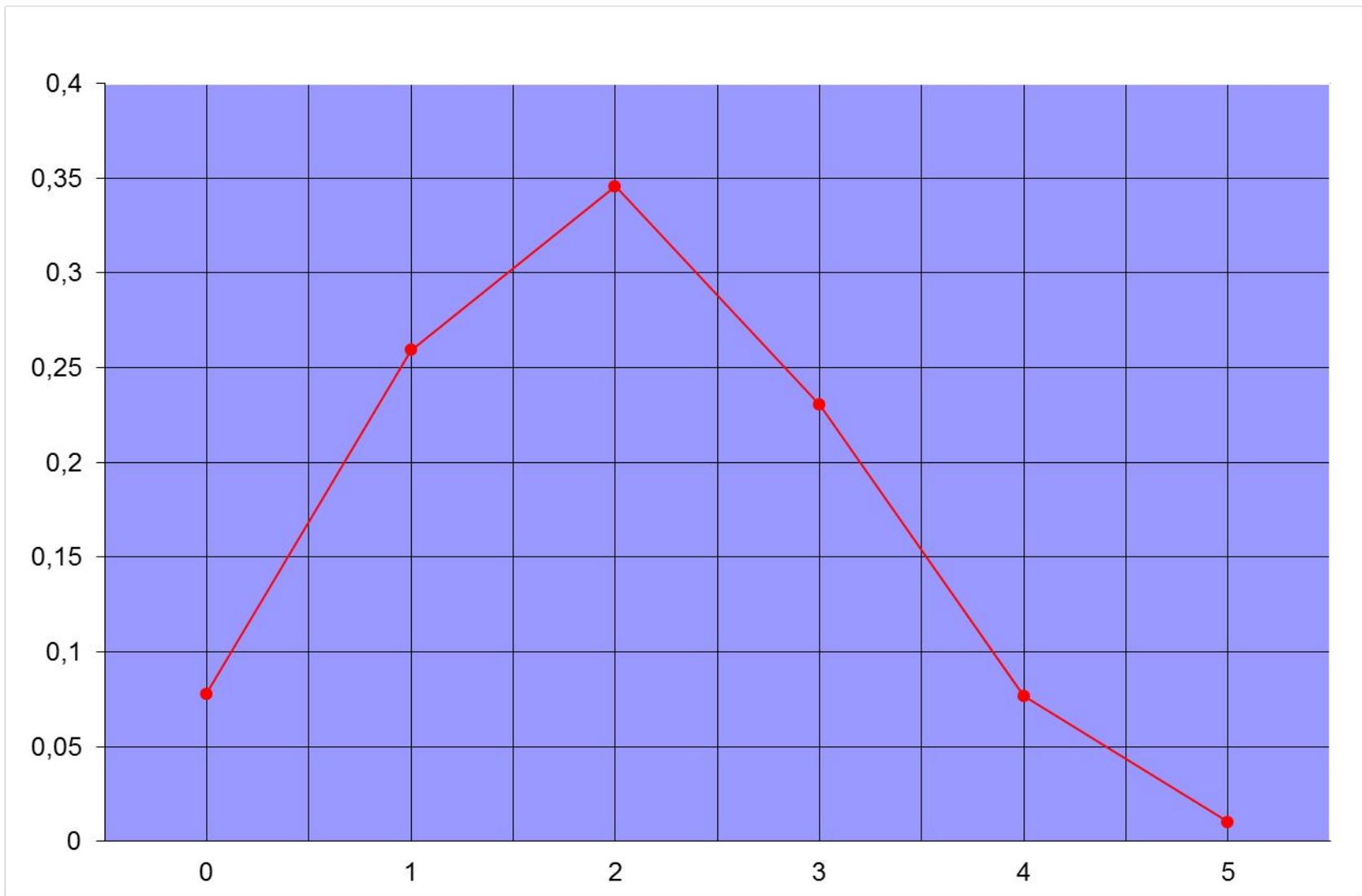
Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!3!} 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,3456$$

$$P_{1,5} = \frac{5!}{1!4!} 0,4^1 \cdot 0,6^4 = 0,2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!5!} 0,4^0 \cdot 0,6^5 = 0,6^5 = 0,0778$$

Представим графически зависимость числа попаданий от их вероятностей.



При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности

Биномиальное распределение

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X .

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле *Бернулли*.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется биномиальным.

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Решение:

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0!4!} 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1!3!} 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!2!} 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486$$

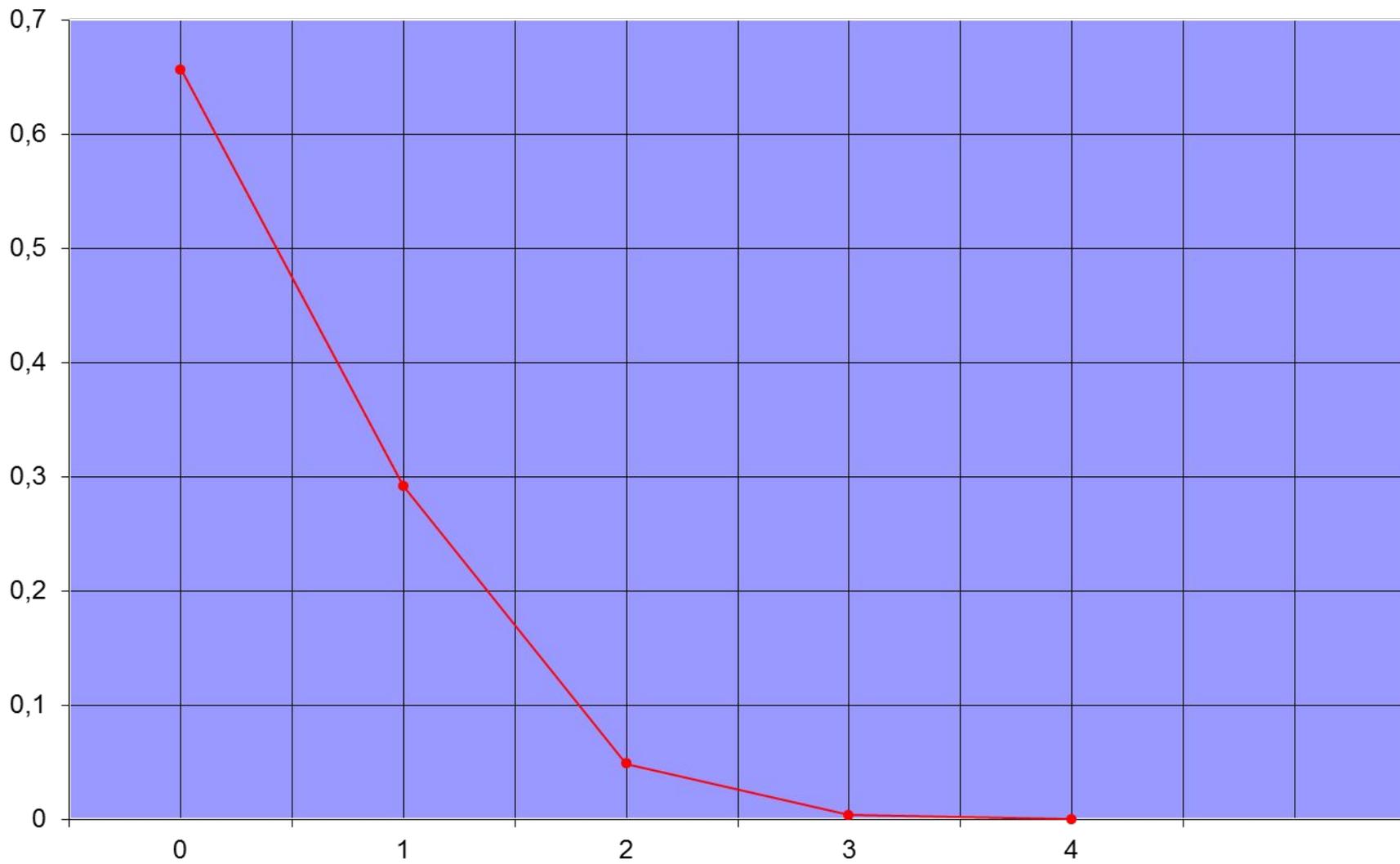
4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!1!} 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4!0!} 0,1^4 \cdot 0,9^0 = 0,0001$$

Построим многоугольник распределения.



Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание

Математическим ожиданием случайной величины называется **сумма** произведений всех возможных **значений случайной величины** на **вероятности этих значений**.

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i, \text{ где}$$

X – прерывная случайная величина,

$M[X]$ – среднее значение случайной величины,

x_1, x_2, \dots, x_n – возможные значения величины X ,

$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ – вероятности значений.

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$

Пример 3. Найти математическое ожидание случайной величины X , зная закон ее распределения:

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Решение. По формуле (1) находим

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,3 = 1,25.$$

Пример В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб, 50 по 50 руб, 100 по 10 руб, 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

○ Ряд распределения с. в. X — суммы выигрыша на один билет таков:

X	500	50	10	1	0
p	0,01	0,05	0,1	0,15	0,69

(Контроль: $\sum_{i=1}^5 p_i = 1$.) Находим MX :

$$MX = 500 \cdot 0,01 + 50 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,15 + 0 \cdot 0,69 = 8,65 \text{ руб.}$$

Свойства математического ожидания:

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной.*

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.*

$$M(Cx) = CM(x)$$

Свойства математического ожидания:

3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.*

$$M(XY) = M(X)M(Y)$$

4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Пусть производится n независимых испытаний, вероятность появления события A в которых равна p .

Теорема. *Математическое ожидание $M(X)$ числа появления события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.*

$$M(X) = np$$

Дисперсия

Дисперсией (рассеиванием) $D(X)$

дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

Пример . Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $D(X)$.

Решение. Сначала находим

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9,$$

а затем

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 = 2,1.$$

По формуле (3) имеем:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2,1 - 0,81 = 1,29.$$

Теорема

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины **X** и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Свойства дисперсии:

- *Дисперсия постоянной величины равна нулю.*

$$D(C) = 0$$

- *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат.*

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

Свойства дисперсии:

- *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

- *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.*

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Теорема

Дисперсия числа появления события A в n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в каждом испытании.

$$D(X) = npq$$

Среднее квадратическое отклонение

Средним квадратическим отклонением случайной величины **X** называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Теорема

Среднее квадратичное отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин.

$$\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \dots + \sigma^2(X_n)}$$

Пример. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна $p = 0,96$.

Таким образом, закон распределения может считаться биномиальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0,96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0,96 \cdot 0,04 = 38,4;$$

Пример. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что $M(X) = 0,9$.

Т.к. случайная величина X распределена по биномиальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0,9; \Rightarrow p = 0,45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495.$$

Домашнее задание:

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятности, математической статистики и случайным процессам./Д. Письменный. – 3-е изд.- М.: Айрис-пресс, 2008 г. – 288 с.

гл.2, §2.1 – 2.7

2. конспект лекции

СВР: Составить опорный конспект по теории

Задачи

Выучить все определения.

- **Задача 1.** Случайная величина принимает все четные значения от -2 до 6 с равными вероятностями. Постройте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.
- **Задача 2.** Пять человек выстраиваются в очередь случайным образом. Среди этих пятерых в очереди стоит Иван Иванович. Постройте распределение случайной величины «число людей в очереди, стоящих перед Иваном Ивановичем».
- **Задача 3.** В таблице дано распределение некоторой случайной величины X . Найдите пропущенную вероятность.

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность	0,16	0,2	0,03	0,05	0,12	0,07	?	0,24