

# Конечные автоматы

# Основные определения

ДМПА:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F),$$

где

- $Q$  – конечное множество состояний;
- $\Sigma$  – конечный входной алфавит;
- $\Gamma$  – конечный алфавит магазинных символов;
- $\delta$  – функция, переходов, отображение множества  $Q \times (\Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}) \times \Gamma$  во множество  $Q \times \Gamma^*$ ;
- $q_0 \in Q$  – начальное состояние;
- $Z_0 \in \Gamma$  – начальный символ;
- $F \subseteq Q$  – множество заключительных состояний.

# Основные определения

Конфигурация ДМПА  $P$

$$(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

где:

- $q$  – текущее состояние устройства;
  - $w$  – неиспользованная часть входной цепочки;
  - $\alpha$  – содержимое магазина;
- «  $\perp$  » – маркер конца входной цепочки. Начальная конфигурация –  $(q_0, w, Z_0)$ , где  $w \in \Sigma^*$ ,  
заключительная конфигурация –  $(q, \perp, \alpha)$ , где  $q \in F$   
и  $\alpha \in \Gamma^*$ .

# Основные определения

Такт работы ДМПА  $P$  при  $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$ , где  $q, q' \in Q, a \in \Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma, \alpha, \gamma \in \Gamma^*$ :

$$(q, aw, Z\alpha) \vdash (q', w, \gamma\alpha),$$

Если  $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$ , то ДМПА  $P$  может:

- перейти в состояние  $q'$ ;
- сдвинуть головку на одну ячейку вправо;
- заменить верхний символ магазина цепочкой  $\gamma$  магазинных символов.

Частные случаи:  $Z = e, \gamma = e, a = e, a = \perp$ .

# Основные определения

ДКА:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

где

- $Q$  – конечное множество состояний;
- $\Sigma$  – конечное множество входных символов;
- $\delta$  – функция переходов, отображение множества  $Q \times (\Sigma \cup \{\perp\})$  во множество  $Q$ ;
- $q_0 \in Q$  – начальное состояние;
- $F \subseteq Q$  – множество заключительных состояний.

# Основные определения

Конфигурация ДКА  $M$

$$(q, w) \in Q \times \Sigma^*,$$

Начальная конфигурация –  $(q_0, w)$ , где  $w \in \Sigma^*$ ,  
заключительная конфигурация –  $(q, \perp)$ , где  $q \in F$ .

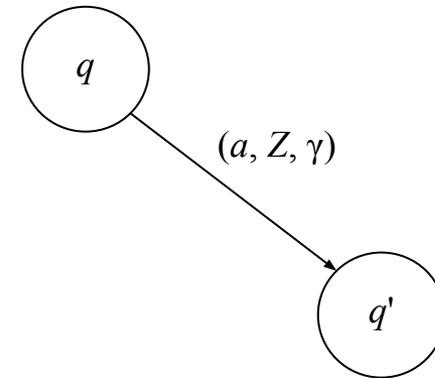
Такт работы ДКА  $M$  при  $\delta(q, a) = q'$ , где  $q, q' \in Q$ ,  
 $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$ :

$$(q, aw) \vdash (q', w)$$

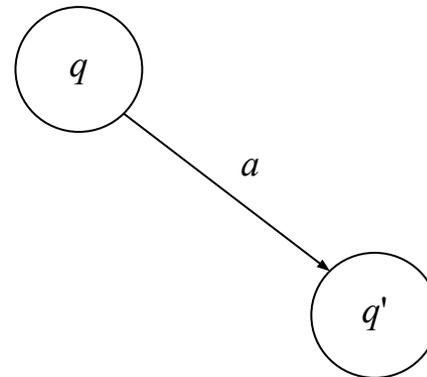
# Способы задания функции переходов

## Граф переходов

Переход ДМПА  $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$ :



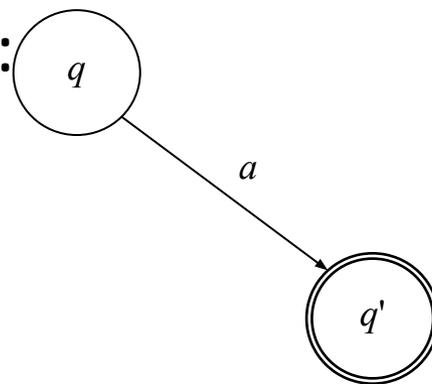
Переход ДКА  $\delta(q, a) = q'$ :



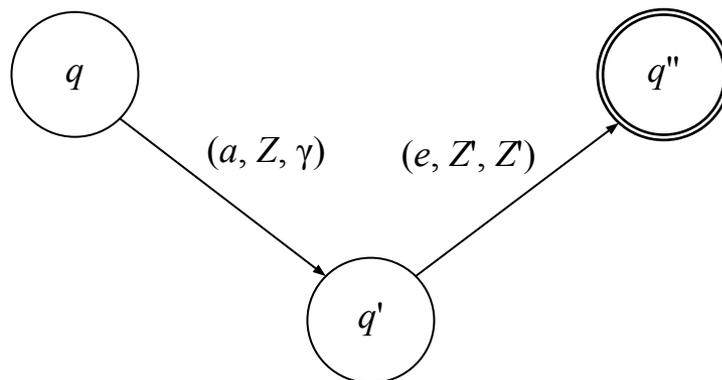
# Способы задания функции переходов

## Переход в конечное состояние

Переход ДКА  $\delta(q, a) = q'$ , где  $q' \in F$ :



Переход ДМПА  $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$ , где  $q' \in F$ :



# Способы задания функции переходов

## Таблица переходов

Таблица переходов ДМПА:

	$(a_1, z_1)$	$(a_2, z_2)$	$(a_3, z_3)$	...
$q_0$	$\delta(q_0, a_1, z_1)$	$\delta(q_0, a_2, z_2)$	$\delta(q_0, a_3, z_3)$	...
$q_1$	$\delta(q_1, a_1, z_1)$	$\delta(q_1, a_2, z_2)$	$\delta(q_1, a_3, z_3)$	...
$q_2$	$\delta(q_2, a_1, z_1)$	$\delta(q_2, a_2, z_2)$	$\delta(q_2, a_3, z_3)$	...
...	...	...	...	...

$\delta(q, a, Z) :$

- $(q', \gamma)$ ;
- *HALT* ( $a = \perp, q \in F$ );
- *ERROR*.

# Способы задания функции переходов

## Таблица переходов

Таблица переходов ДКА:

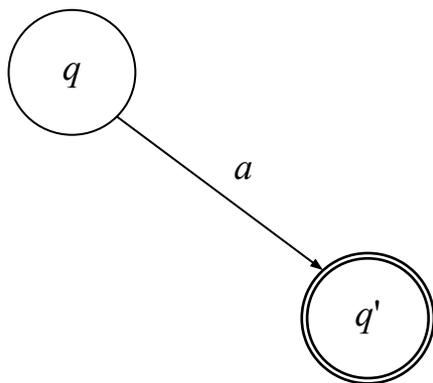
	$a_1$	$a_2$	...	$\perp$
$q_0$	$\delta(q_0, a_1)$	$\delta(q_0, a_2)$	...	$\delta(q_0, \perp)$
$q_1$	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$	...	$\delta(q_1, \perp)$
$q_2$	$\delta(q_2, a_1)$	$\delta(q_2, a_2)$	...	$\delta(q_2, \perp)$
...	...	...	...	...

$\delta(q, a)$  :

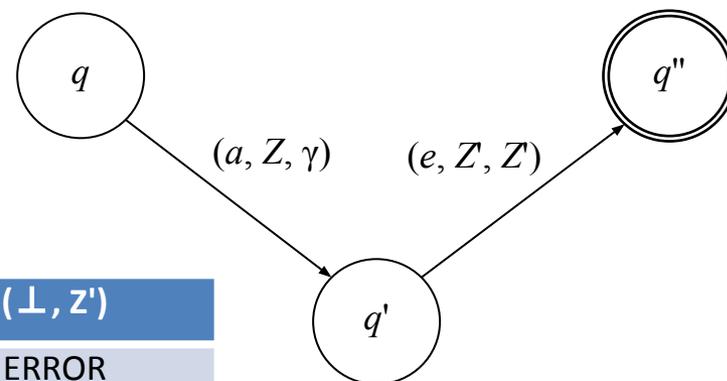
- $q'$ ;
- *HALT* ( $a = \perp, q \in F$ );
- *ERROR*.

# Способы задания функции переходов

## Переход в конечное состояние



	a	$\perp$
q	q'	ERROR
q'	ERROR	HALT



	(a, Z)	( $\epsilon$ , Z')	( $\perp$ , Z')
q	(q', $\gamma$ )	ERROR	ERROR
q'	ERROR	(q'', Z')	ERROR
q''	ERROR	ERROR	HALT

	(a, Z)	( $\perp$ , Z')
q	(q', $\gamma$ )	ERROR
q'	ERROR	HALT

# Определение функции переходов

1. Построить граф переходов, а потом преобразовать его в таблицу переходов.
2. Построение графа начинается с начального состояния  $q_0$ . Если начальное состояние может являться также и конечным, помечаем это двойной границей окружности.
3. Для каждого состояния графа  $q_i$  определяем, есть ли из данного состояния такие переходы  $(a, Z, \gamma)$ , которые соответствуют допустимому символу  $a$  из входной цепочки и допустимому символу  $Z$  на вершине стека (если автомат с магазинной памятью), которые пока еще отсутствуют в графе. Если есть, то проверяем, ведет ли данный переход в уже имеющееся состояние. Если да, то добавляем в граф только новый переход  $(a, Z, \gamma)$ . Если нет, то добавляем в граф новое состояние и переход  $(a, Z, \gamma)$  в него. Если новое состояние может являться конечным, помечаем это двойной границей окружности.
4. Если в процессе выполнения шага 3 в графе появились новые состояния или переходы, возвращаемся на шаг 3, иначе граф переходов построен.

# Включение действий в синтаксис

Действия:

$$\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots$$

Функция переходов ДМПА:

$$\delta(q, a, Z) = (q', \gamma, \langle A \rangle).$$

Функция переходов ДКА:

$$\delta(q, a) = (q', \langle A \rangle).$$

Отсутствие действия:

$$\langle A \rangle = \epsilon \text{ или } \langle A \rangle = \emptyset.$$

# Алгоритм работы ДМПА

Пусть  $M$  – магазин (стек),  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \perp$  – входная цепочка.

Тогда:

1.  $q := q_0, M := Z_0, k := 1$ .

2. Ищем  $\delta(q, a, Z)$ , где:  $a = a_k, M = Z\beta$  или  $a = a_k, Z = e$  или  $a = e, M = Z\beta$ .

3. Если  $\delta(q, a, Z)$  не определена, то ошибка в позиции  $k$ . Если значений  $\delta(q, a, Z)$  несколько – таблица переходов построена неверно. Если  $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma, \langle A \rangle)$ , то:

3.1. Если  $\langle A \rangle \neq e$  и  $\langle A \rangle \neq \emptyset$ , то выполнить действие  $\langle A \rangle$ .

3.2.  $q := q'$ .

3.3.  $M := \gamma\beta$ .

3.4. Если  $a \neq e$ , то  $k := k + 1$ .

4. Если  $\delta(q, a, Z) = HALT$ , то разбор успешно завершен.

5. Если  $\delta(q, a, Z) = ERROR$ , то имеем во входной цепочке синтаксическую ошибку в позиции  $k$ .

# Алгоритм работы ДКА

Пусть  $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \perp$  – входная цепочка. Тогда:

1.  $q := q_0, k := 1$ .

2. Ищем  $\delta(q, a)$ , где  $a = a_k$ .

3. Если  $\delta(q, a)$  не определена, то ошибка в позиции  $k$ . Если значений  $\delta(q, a)$  несколько – таблица переходов построена неверно. Если  $\delta(q, a) = (q', \langle A \rangle)$ , то:

3.1. Если  $\langle A \rangle \neq \epsilon$  и  $\langle A \rangle \neq \emptyset$ , то выполнить действие  $\langle A \rangle$ .

3.2.  $q := q'$ .

3.3.  $k := k + 1$ .

4. Если  $\delta(q, a) = HALT$ , то разбор успешно завершен.

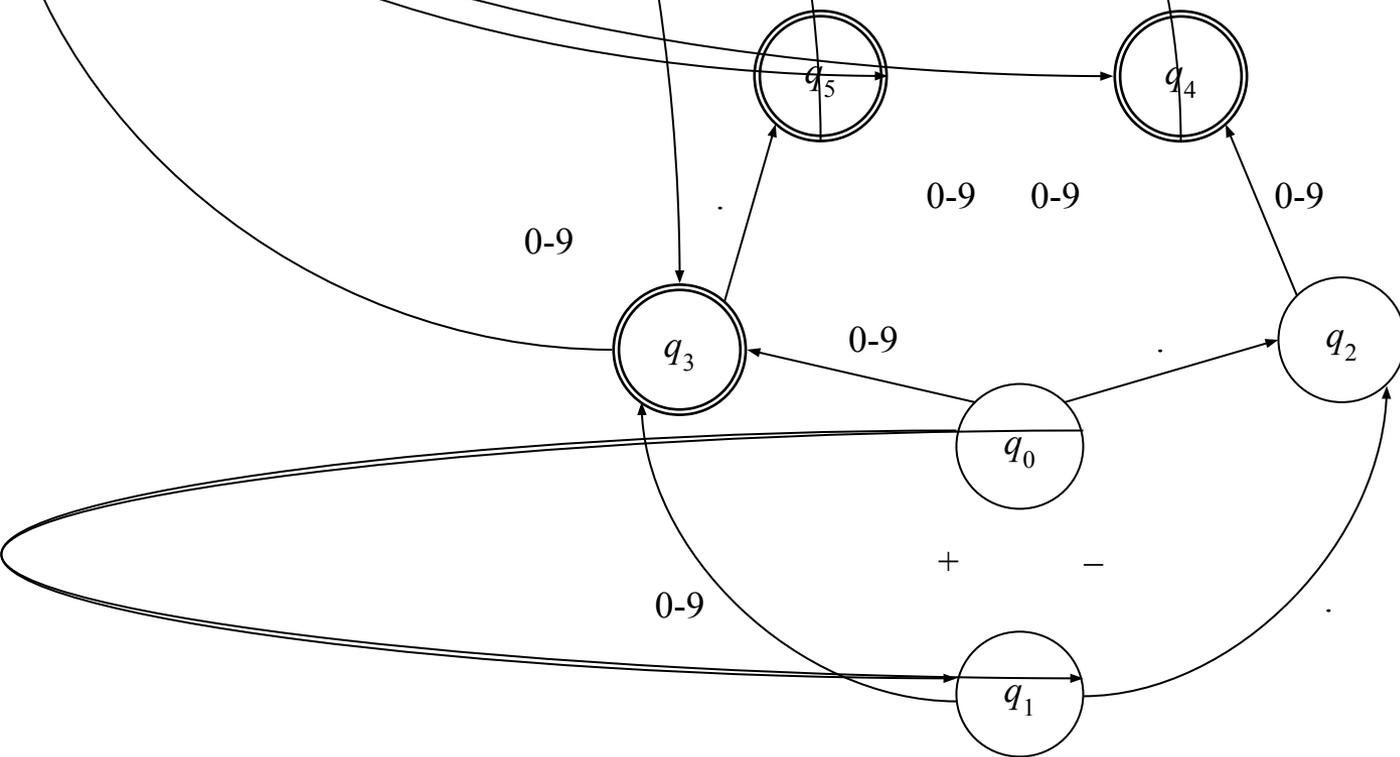
5. Если  $\delta(q, a) = ERROR$ , то имеем во входной цепочке синтаксическую ошибку в позиции  $k$ .

# Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Примеры:

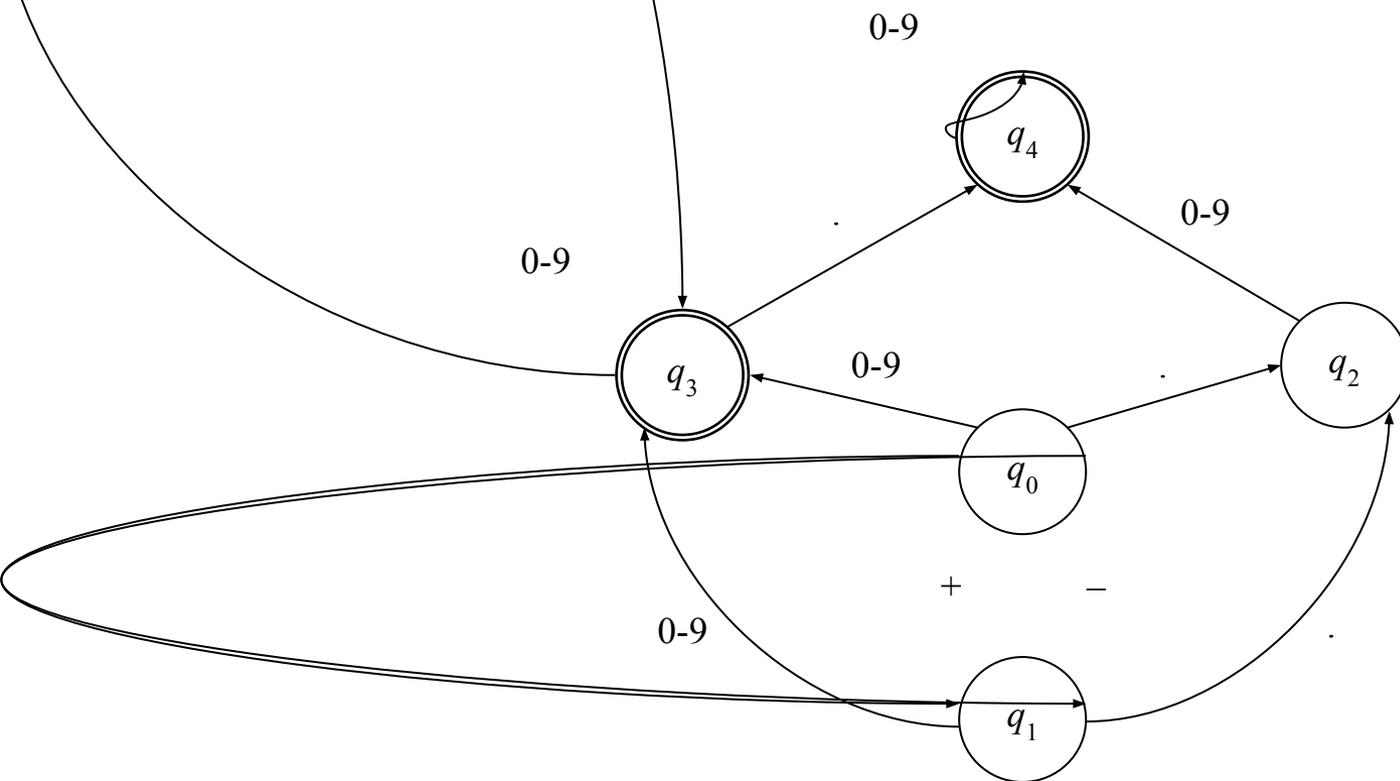
« $N.M$ », « $N.$ », « $.M$ », « $N$ »,

где  $N$  – целая, а  $M$  – дробная часть числа.



# Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Граф переходов после минимизации:



# Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Таблица переходов ДКА:

	+ -	.	0-9	⊥
$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	
$q_1$		$q_2$	$q_3$	
$q_2$			$q_4$	
$q_3$		$q_4$	$q_3$	HALT
$q_4$			$q_4$	HALT

Примечание: объединение символов алфавита.

# Посимвольный разбор

## Число с фиксированной точкой

Получили ДКА  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , где:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ;
- $\Sigma = \{+, -, ., 0-9\}$ ;
- $\delta(Q \times \Sigma) = \{\{q_1, q_2, q_3, ERROR\}, \{ERROR, q_2, q_3, ERROR\}, \{ERROR, ERROR, q_5, ERROR\}, \{ERROR, q_4, q_3, HALT\}, \{ERROR, ERROR, q_4, HALT\}\}$ ;
- $F = \{q_3, q_4\}$ .

# Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Пример разбора цепочки «-15.2»:

- $(q_0, \text{«-15.2 } \perp \text{»}) \quad \square \vdash (q_1, \text{«15.2 } \perp \text{»})$
- $\square^2 (q_3, \text{«5|2 } \perp \text{»})$
- $\square^3 (q_3, \text{«.2 } \perp \text{»})$
- $\square^4 (q_4, \text{«2 } \perp \text{»})$
- $\square^5 (q_4, \text{« } \perp \text{»})$
- $\square^6 \text{ } \textit{HALT} \vdash$

Разбор завершен успешно. Другой пример:

- $(q_0, \text{«.2. } \perp \text{»}) \quad \square \vdash (q_2, \text{«2. } \perp \text{»})$
- $\square^2 (q_4, \text{«. } \perp \text{»})$
- $\square^3 \text{ } \textit{ERROR} \vdash$

Имеем синтаксическую ошибку в позиции 3.

# Посимвольный разбор Число с фиксированной точкой

Ограничение количества значащих цифр:

	$+-$	$.$	$0-9$	$\perp$
$q_0$	$q_1, \emptyset$	$q_2, \emptyset$	$q_3, \langle A_1 \rangle$	
$q_1$		$q_2, \emptyset$	$q_3, \langle A_1 \rangle$	
$q_2$			$q_4, \langle A_1 \rangle$	
$q_3$		$q_4, \emptyset$	$q_3, \langle A_2 \rangle$	HALT
$q_4$			$q_4, \langle A_2 \rangle$	HALT

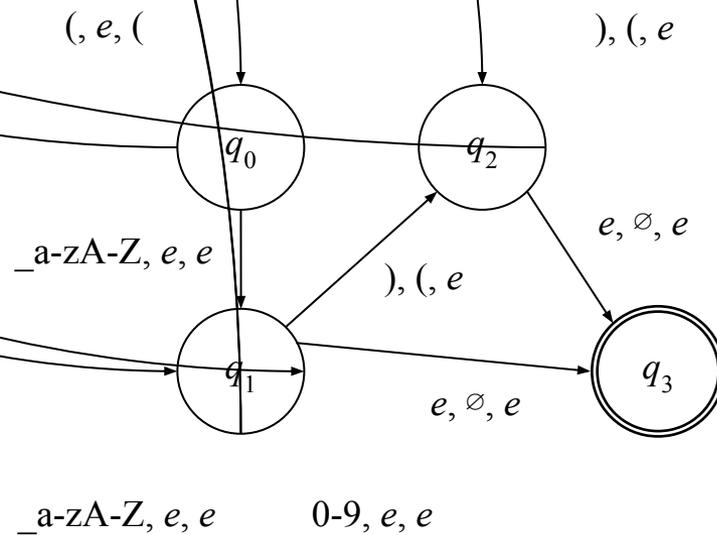
Действия:

- $\langle A_1 \rangle$  –  $\text{count} := 1$ ;
- $\langle A_2 \rangle$  –  $\text{count} := \text{count} + 1$ ; если  $\text{count} > N$ ,  $\delta(q, a) = \text{ERROR}$ .

# Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Примеры:

xyz, (((abc))), ...



# Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Таблица переходов ДМПА:

	(, e	_a-zA-Z, e	0-9, e	), (	e, ∅	⊥, ∅
q <sub>0</sub>	q <sub>0</sub> , (	q <sub>1</sub> , e				
q <sub>1</sub>		q <sub>1</sub> , e	q <sub>1</sub> , e	q <sub>2</sub> , e	q <sub>3</sub> , e	
q <sub>2</sub>				q <sub>2</sub> , e	q <sub>3</sub> , e	
q <sub>3</sub>						HALT

Убираем лишнее состояние:

	(, e	_a-zA-Z, e	0-9, e	), (	⊥, ∅
q <sub>0</sub>	q <sub>0</sub> , (	q <sub>1</sub> , e			
q <sub>1</sub>		q <sub>1</sub> , e	q <sub>1</sub> , e	q <sub>2</sub> , e	HALT
q <sub>2</sub>				q <sub>2</sub> , e	HALT

# Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Получили ДМПА  $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , где:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ;
- $\Sigma = \{(\, , \_ , a-z, A-Z, 0-9\}$ ;
- $\Gamma = \{(\, )\}$ ;
- $\delta(Q \times (\Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}) \times \Gamma) = \{(q_0, \langle \langle \rangle \rangle), (q_1, e), ERROR, ERROR, ERROR\}, \{ERROR, (q_1, e), (q_1, e), (q_2, e), HALT\}, \{ERROR, ERROR, ERROR, (q_2, e), HALT\}$ ;
- $Z_0 = e$ ;
- $F = \{q_1, q_2\}$ .

# Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Пример разбора цепочки «((a123))»:

$(q_0, \langle \langle (a123) \rangle \rangle, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \langle (a123) \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{2}{\vdash} (q_0, \langle a123 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{3}{\vdash} (q_1, \langle 123 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{4}{\vdash} (q_1, \langle 23 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{5}{\vdash} (q_1, \langle 3 \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{6}{\vdash} (q_1, \langle \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{7}{\vdash} (q_2, \langle \rangle, \langle \langle \rangle \rangle)$

$\stackrel{8}{\vdash} (q_2, \langle \rangle, e)$

$\text{HALT}$

Разбор завершен успешно.



# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Язык  $L$  описывает вложенные операторы языка Pascal «**begin end**;». Таблица переходов ДМПА при посимвольном разборе:

	b, e	e, b	g, e	i, e	n, e	d, e	«;», e	_, e	⊥, ∅
$q_0$	$q_1, b$	$q_6, e$						$q_0, e$	HALT
$q_1$		$q_2, b$							
$q_2$			$q_3, e$						
$q_3$				$q_4, e$					
$q_4$					$q_5, e$				
$q_5$								$q_0, e$	
$q_6$					$q_7, e$				
$q_7$						$q_8, e$			
$q_8$							$q_0, e$	$q_8, e$	

# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Таблица переходов ДМПА при разборе по лексемам

	begin, e	end, b	«;», e	⊥, ∅
q <sub>0</sub>	q <sub>0</sub> , b	q <sub>1</sub> , e		HALT
q <sub>1</sub>			q <sub>0</sub> , e	

$$\Sigma = \{\mathbf{b, e, g, i, n, d, \langle\langle; \rangle\rangle, \_}\} \rightarrow \Sigma' = \{\mathbf{begin, end, \langle\langle; \rangle\rangle}\}$$

# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Алфавит языка  $\Sigma$  делится на три подмножества:

1. Подмножество символов-разделителей  $\Sigma_S \subset \Sigma$ ;
2. Подмножество символов пунктуации  $\Sigma_P \subset \Sigma$ ;
3. Подмножество лексемных символов  $\Sigma_L \subset \Sigma$ :

$$\Sigma_L = \Sigma - (\Sigma_S \cup \Sigma_P).$$

Алфавит  $\Sigma'$ :

$$\Sigma' \subseteq \Sigma_P \cup \Sigma_L^+.$$

Лексема  $x$  – либо  $x \in \Sigma_P$ , либо  $x \in \Sigma_L^+$ , отделенная от других лексем символами алфавитов  $\Sigma_S$  и  $\Sigma_P$ .

# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Пример:

**begin**

**begin end ;**

**end;**

**begin**

**end;**

1. **begin (1:1);**

2. **begin (2:3);**

3. **end (2:9);**

4. **;(2:13);**

5. **end (3:1);**

6. **;(3:4);**

7. **begin (4:1);**

8. **end (5:1);**

9. **;(5:4).**

# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Пример разбора:

- $$(q_0, \text{«bbe;e;be; } \perp \text{»}, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \text{«be;e;be; } \perp \text{»}, b)$$
- $$\stackrel{2}{\vdash} (q_0, \text{«e;e;be; } \perp \text{»}, bb)$$
- $\stackrel{3}{\vdash} (q_1, \text{«;e;be; } \perp \text{»}, b)$
  - $\stackrel{4}{\vdash} (q_0, \text{«e;be; } \perp \text{»}, b)$
  - $\stackrel{5}{\vdash} (q_1, \text{«;be; } \perp \text{»}, e)$
  - $\stackrel{6}{\vdash} (q_0, \text{«be; } \perp \text{»}, e)$
  - $\stackrel{7}{\vdash} (q_0, \text{«e; } \perp \text{»}, b)$
  - $\stackrel{8}{\vdash} (q_1, \text{«; } \perp \text{»}, e)$
  - $\stackrel{9}{\vdash} (q_0, \text{« } \perp \text{»}, e)$
  - $\stackrel{10}{\vdash} \text{HALT } \perp$

# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Пример:  
**begin end;**  
**end;**

1. **begin** (1:1);
2. **end** (1:7);
3. **;** (1:10);
4. **end** (2:1);
5. **;** (2:4);

$(q_0, \langle \text{be}; e; \perp \rangle, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \langle e; e; \perp \rangle, b)$   
 $\stackrel{2}{\vdash} (q_1, \langle ; e; \perp \rangle, e)$   
  $\stackrel{3}{\vdash} (q_0, \langle e; \perp \rangle, e)$   
  $\stackrel{4}{\vdash} \text{ERROR}$

# Разбор по лексемам

## Вложенные операторы

Таблица переходов ДКА с действиями:

	{b, e, g, i, n, d}, e	«;», e	_ , e	⊥, ∅
q <sub>0</sub>	q <sub>1</sub> , e, ⟨A <sub>1</sub> ⟩	q <sub>0</sub> , e, ⟨A <sub>3</sub> ⟩	q <sub>0</sub> , e, ∅	HALT
q <sub>1</sub>	q <sub>1</sub> , e, ⟨A <sub>2</sub> ⟩	q <sub>0</sub> , e, ⟨A <sub>4</sub> ⟩	q <sub>0</sub> , e, ⟨A <sub>5</sub> ⟩	

Действия (в начале разбора buf := ""):

- ⟨A<sub>1</sub>⟩ – если buf ≡ "", то buf := a<sub>k</sub>, иначе *ERROR*.
- ⟨A<sub>2</sub>⟩ – buf := buf + a<sub>k</sub>.
- ⟨A<sub>3</sub>⟩ – если buf ≡ 'end', то buf := "", иначе *ERROR*.
- ⟨A<sub>4</sub>⟩ – если buf ≡ 'end', то ⟨A<sub>5</sub>⟩; ⟨A<sub>3</sub>⟩, иначе *ERROR*.
- ⟨A<sub>5</sub>⟩: если buf ≡ 'begin', то M ← b и buf := ""; если же buf ≡ 'end' и M = bα, то M → b, иначе *ERROR*.