

Конечные автоматы

Основные определения

ДМПА:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F),$$

где

- Q – конечное множество состояний;
- Σ – конечный входной алфавит;
- Γ – конечный алфавит магазинных символов;
- δ – функция, переходов, отображение множества $Q \times (\Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}) \times \Gamma$ во множество $Q \times \Gamma^*$;
- $q_0 \in Q$ – начальное состояние;
- $Z_0 \in \Gamma$ – начальный символ;
- $F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний.

Основные определения

Конфигурация ДМПА P

$$(q, w, \alpha) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*,$$

где:

- q – текущее состояние устройства;
 - w – неиспользованная часть входной цепочки;
 - α – содержимое магазина;
- « \perp » – маркер конца входной цепочки. Начальная конфигурация – (q_0, w, Z_0) , где $w \in \Sigma^*$,
заключительная конфигурация – (q, \perp, α) , где $q \in F$
и $\alpha \in \Gamma^*$.

Основные определения

Такт работы ДМПА P при $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$, где $q, q' \in Q, a \in \Sigma \cup \{e\} \cup \{\perp\}, w \in \Sigma^*, Z \in \Gamma, \alpha, \gamma \in \Gamma^*$:

$$(q, aw, Z\alpha) \vdash (q', w, \gamma\alpha),$$

Если $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$, то ДМПА P может:

- перейти в состояние q' ;
- сдвинуть головку на одну ячейку вправо;
- заменить верхний символ магазина цепочкой γ магазинных символов.

Частные случаи: $Z = e, \gamma = e, a = e, a = \perp$.

Основные определения

ДКА:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

где

- Q – конечное множество состояний;
- Σ – конечное множество входных символов;
- δ – функция переходов, отображение множества $Q \times (\Sigma \cup \{ \perp \})$ во множество Q ;
- $q_0 \in Q$ – начальное состояние;
- $F \subseteq Q$ – множество заключительных состояний.

Основные определения

Конфигурация ДКА M

$$(q, w) \in Q \times \Sigma^*,$$

Начальная конфигурация – (q_0, w) , где $w \in \Sigma^*$,
заключительная конфигурация – (q, \perp) , где $q \in F$.

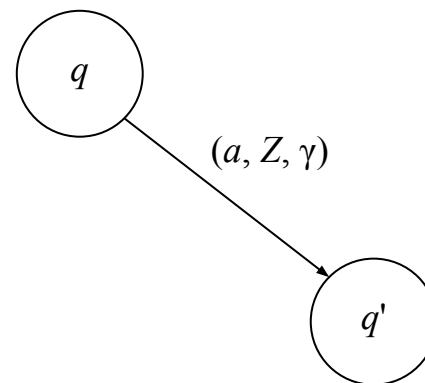
Такт работы ДКА M при $\delta(q, a) = q'$, где $q, q' \in Q$,
 $a \in \Sigma \cup \{\perp\}$:

$$(q, aw) \vdash (q', w)$$

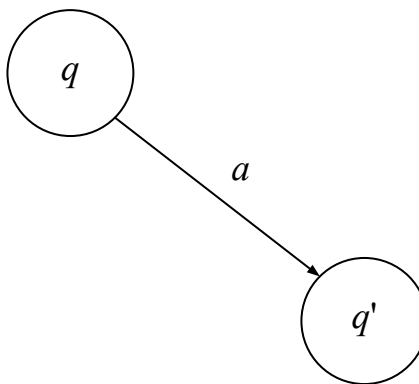
Способы задания функции переходов

Граф переходов

Переход ДМПА $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$:



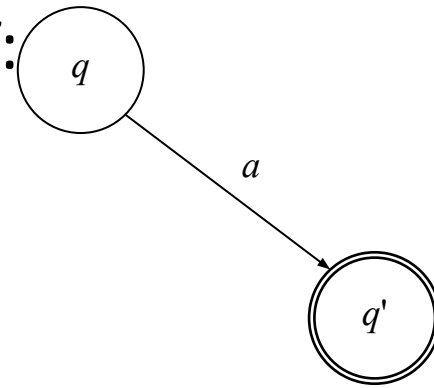
Переход ДКА $\delta(q, a) = q'$:



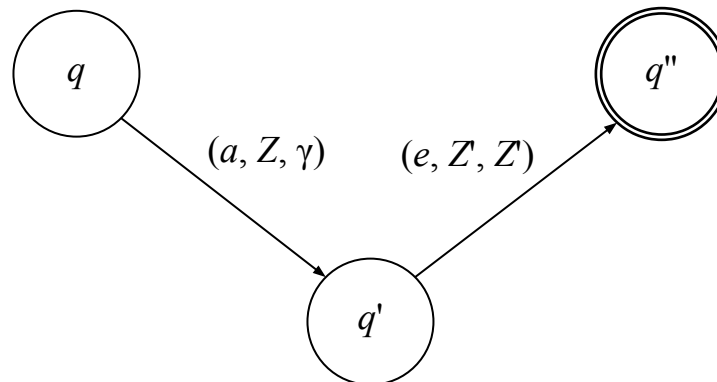
Способы задания функции переходов

Переход в конечное состояние

Переход ДКА $\delta(q, a) = q'$, где $q' \in F$:



Переход ДМПА $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma)$, где $q' \in F$:



Способы задания функции переходов

Таблица переходов

Таблица переходов ДМПА:

	(a_1, z_1)	(a_2, z_2)	(a_3, z_3)	...
q_0	$\delta(q_0, a_1, z_1)$	$\delta(q_0, a_2, z_2)$	$\delta(q_0, a_3, z_3)$...
q_1	$\delta(q_1, a_1, z_1)$	$\delta(q_1, a_2, z_2)$	$\delta(q_1, a_3, z_3)$...
q_2	$\delta(q_2, a_1, z_1)$	$\delta(q_2, a_2, z_2)$	$\delta(q_2, a_3, z_3)$...
...

$\delta(q, a, Z) :$

- $(q', \gamma);$
- $HALT (a = \perp, q \in F);$
- $ERROR.$

Способы задания функции переходов

Таблица переходов

Таблица переходов ДКА:

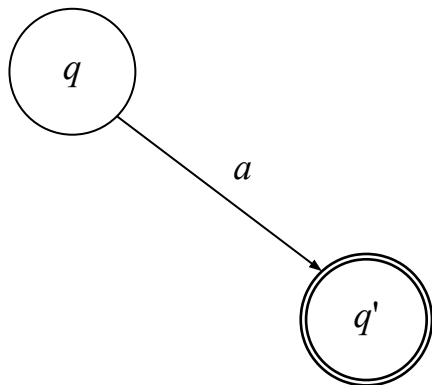
	a_1	a_2	...	\perp
q_0	$\delta(q_0, a_1)$	$\delta(q_0, a_2)$...	$\delta(q_0, \perp)$
q_1	$\delta(q_1, a_1)$	$\delta(q_1, a_2)$...	$\delta(q_1, \perp)$
q_2	$\delta(q_2, a_1)$	$\delta(q_2, a_2)$...	$\delta(q_2, \perp)$
...

$\delta(q, a) :$

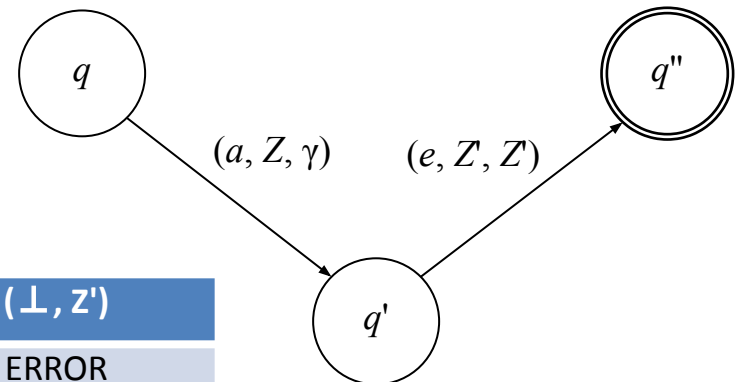
- q' ;
- $HALT (a = \perp, q \in F)$;
- $ERROR$.

Способы задания функции переходов

Переход в конечное состояние



	a	\perp
q	q'	ERROR
q'	ERROR	HALT



	(a, Z)	(e, Z')	(\perp , Z')
q	(q', γ)	ERROR	ERROR
q'	ERROR	(q'', Z')	ERROR
q''	ERROR	ERROR	HALT

	(a, Z)	(\perp , Z')
q	(q', γ)	ERROR
q'	ERROR	HALT

Определение функции переходов

1. Построить граф переходов, а потом преобразовать его в таблицу переходов.
2. Построение графа начинается с начального состояния q_0 . Если начальное состояние может являться также и конечным, помечаем это двойной границей окружности.
3. Для каждого состояния графа q_i определяем, есть ли из данного состояния такие переходы (a, Z, γ) , которые соответствуют допустимому символу a из входной цепочки и допустимому символу Z на вершине стека (если автомат с магазинной памятью), которые пока еще отсутствуют в графе. Если есть, то проверяем, ведет ли данный переход в уже имеющееся состояние. Если да, то добавляем в граф только новый переход (a, Z, γ) . Если нет, то добавляем в граф новое состояние и переход (a, Z, γ) в него. Если новое состояние может являться конечным, помечаем это двойной границей окружности.
4. Если в процессе выполнения шага 3 в графе появились новые состояния или переходы, возвращаемся на шаг 3, иначе граф переходов построен.

Включение действий в синтаксис

Действия:

$$\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots$$

Функция переходов ДМПА:

$$\delta(q, a, Z) = (q', \gamma, \langle A \rangle).$$

Функция переходов ДКА:

$$\delta(q, a) = (q', \langle A \rangle).$$

Отсутствие действия:

$$\langle A \rangle = \epsilon \text{ или } \langle A \rangle = \emptyset.$$

Алгоритм работы ДМПА

Пусть M – магазин (стек), $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \perp$ – входная цепочка.

Тогда:

1. $q := q_0, M := Z_0, k := 1$.
2. Ищем $\delta(q, a, Z)$, где: $a = a_k, M = Z\beta$ или $a = a_k, Z = e$ или $a = e, M = Z\beta$.
3. Если $\delta(q, a, Z)$ не определена, то ошибка в позиции k . Если значений $\delta(q, a, Z)$ несколько – таблица переходов построена неверно. Если $\delta(q, a, Z) = (q', \gamma, \langle A \rangle)$, то:
 - 3.1. Если $\langle A \rangle \neq e$ и $\langle A \rangle \neq \emptyset$, то выполнить действие $\langle A \rangle$.
 - 3.2. $q := q'$.
 - 3.3. $M := \gamma\beta$.
 - 3.4. Если $a \neq e$, то $k := k + 1$.
4. Если $\delta(q, a, Z) = HALT$, то разбор успешно завершен.
5. Если $\delta(q, a, Z) = ERROR$, то имеем во входной цепочке синтаксическую ошибку в позиции k .

Алгоритм работы ДКА

Пусть $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n \perp$ – входная цепочка. Тогда:

1. $q := q_0, k := 1$.
2. Ищем $\delta(q, a)$, где $a = a_k$.
3. Если $\delta(q, a)$ не определена, то ошибка в позиции k . Если значений $\delta(q, a)$ несколько – таблица переходов построена неверно. Если $\delta(q, a) = (q', \langle A \rangle)$, то:
 - 3.1. Если $\langle A \rangle \neq \epsilon$ и $\langle A \rangle \neq \emptyset$, то выполнить действие $\langle A \rangle$.
 - 3.2. $q := q'$.
 - 3.3. $k := k + 1$.
4. Если $\delta(q, a) = HALT$, то разбор успешно завершен.
5. Если $\delta(q, a) = ERROR$, то имеем во входной цепочке синтаксическую ошибку в позиции k .

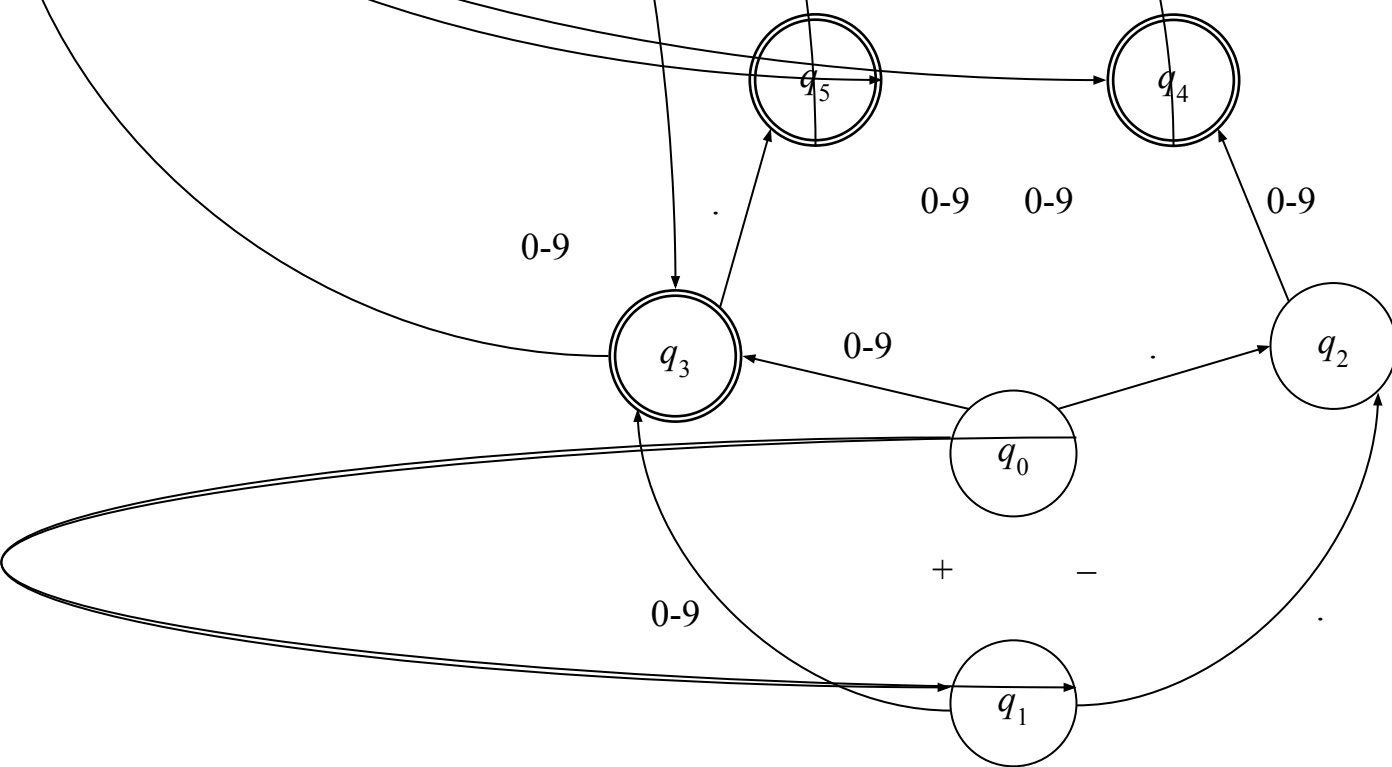
Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Примеры:

« $N.M$ », « $N.$ », « $.M$ », « N »,

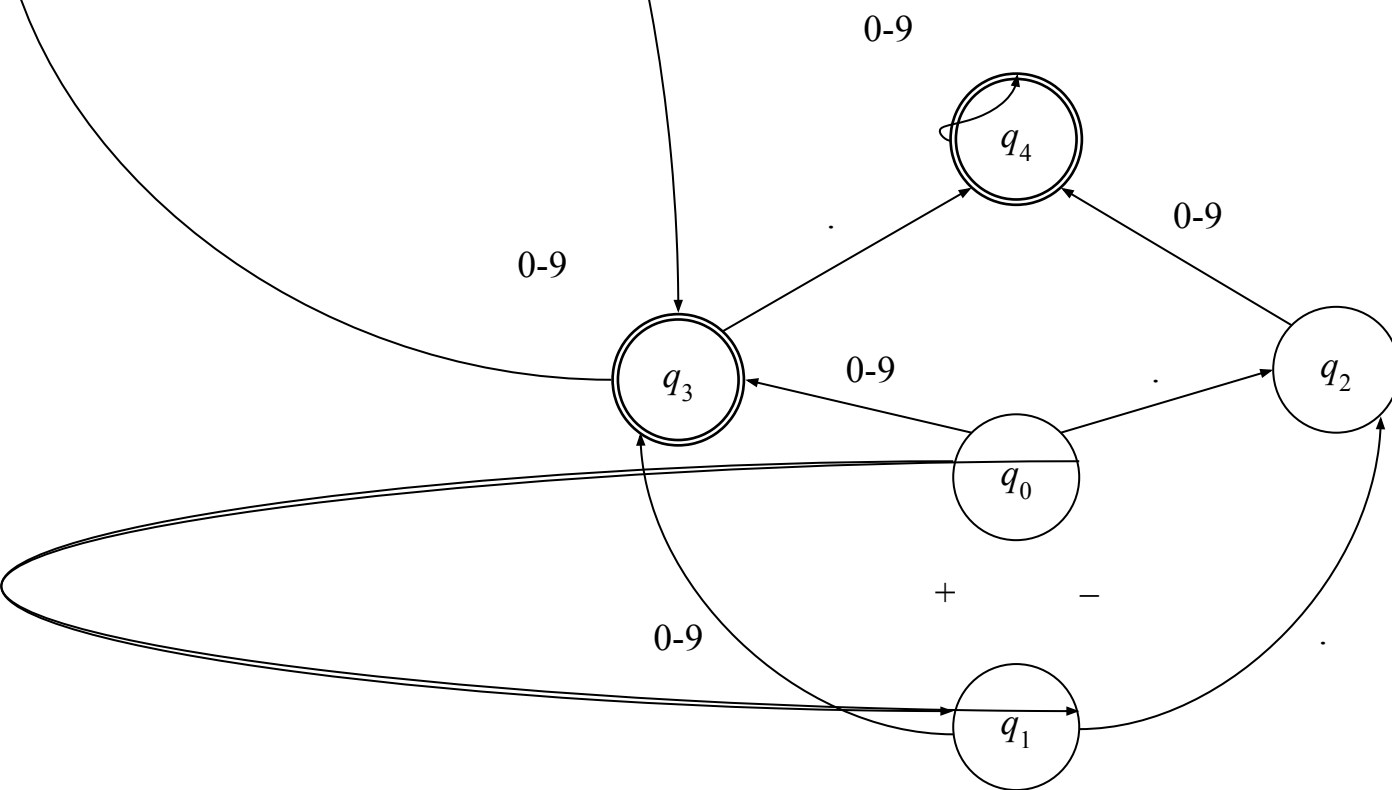
где N – целая, а M – дробная часть числа.



Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Граф переходов после минимизации:



Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Таблица переходов ДКА:

	+ −	.	0-9	⊥
q_0	q_1	q_2	q_3	
q_1		q_2	q_3	
q_2			q_4	
q_3		q_4	q_3	HALT
q_4			q_4	HALT

Примечание: объединение символов алфавита.

Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Получили ДКА $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$;
- $\Sigma = \{+, -, ., 0-9\}$;
- $\delta(Q \times \Sigma) = \{\{q_1, q_2, q_3, ERROR\}, \{ERROR, q_2, q_3, ERROR\}, \{ERROR, ERROR, q_5, ERROR\}, \{ERROR, q_4, q_3, HALT\}, \{ERROR, ERROR, q_4, HALT\}\}$;
- $F = \{q_3, q_4\}$.

Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Пример разбора цепочки «-15.2»:

$$\begin{aligned}
 (q_0, \text{«-15.2 } \perp \text{»}) & \quad \square^1 \vdash (q_1, \text{«15.2 } \perp \text{»}) \\
 & \quad \square^2 (q_3, \text{«5|2 } \perp \text{»}) \\
 & \quad \square^3 (q_3, \text{«.2 } \perp \text{»}) \\
 & \quad \square^4 (q_4, \text{«2 } \perp \text{»}) \\
 & \quad \square^5 (q_4, \text{« } \vdash \text{»}) \\
 & \quad \square^6 \text{HALT } \vdash
 \end{aligned}$$

Разбор завершен успешно. Другой пример:

$$\begin{aligned}
 (q_0, \text{«.2. } \perp \text{»}) & \quad \square^1 \vdash (q_2, \text{«2. } \perp \text{»}) \\
 & \quad \square^2 (q_4, \text{«. } \vdash \text{»}) \\
 & \quad \square^3 \text{ERROR } \vdash
 \end{aligned}$$

Имеем синтаксическую ошибку в позиции 3.

Посимвольный разбор

Число с фиксированной точкой

Ограничение количества значащих цифр:

	$+ -$	$.$	$0-9$	\perp
q_0	q_1, \emptyset	q_2, \emptyset	$q_3, \langle A_1 \rangle$	
q_1		q_2, \emptyset	$q_3, \langle A_1 \rangle$	
q_2			$q_4, \langle A_1 \rangle$	
q_3		q_4, \emptyset	$q_3, \langle A_2 \rangle$	HALT
q_4			$q_4, \langle A_2 \rangle$	HALT

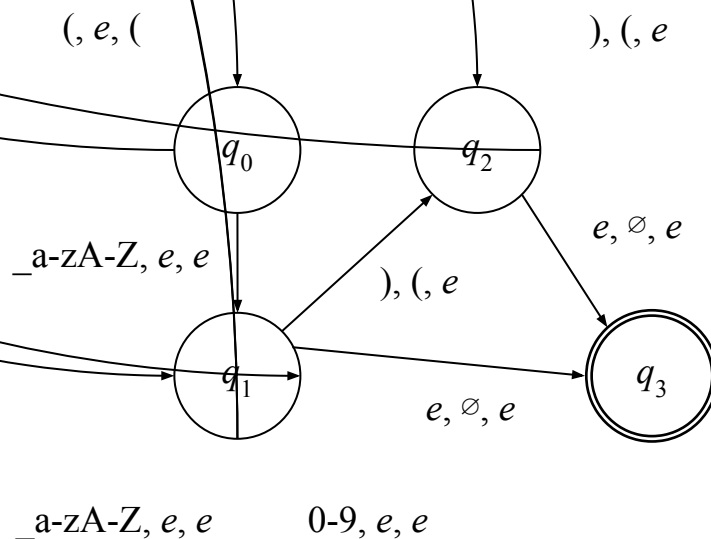
Действия:

- $\langle A_1 \rangle$ – $\text{count} := 1$;
- $\langle A_2 \rangle$ – $\text{count} := \text{count} + 1$; если $\text{count} > N$, $\delta(q, a) = \text{ERROR}$.

Посимвольный разбор Идентификатор в скобках

Примеры:

xyz, (((abc))), ...



Посимвольный разбор

Идентификатор в скобках

Таблица переходов ДМПА:

	(, e	_a-zA-Z, e	0-9, e), (e, ∅	⊥, ∅
q ₀	q ₀ , (q ₁ , e				
q ₁		q ₁ , e	q ₁ , e	q ₂ , e	q ₃ , e	
q ₂				q ₂ , e	q ₃ , e	
q ₃						HALT

Убираем лишнее состояние:

	(, e	_a-zA-Z, e	0-9, e), (⊥, ∅
q ₀	q ₀ , (q ₁ , e			
q ₁		q ₁ , e	q ₁ , e	q ₂ , e	HALT
q ₂				q ₂ , e	HALT

Посимвольный разбор

Идентификатор в скобках

Получили ДМПА $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, где:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$;
- $\Sigma = \{ (,), _, a-z, A-Z, 0-9 \}$;
- $\Gamma = \{ (\}$;
- $\delta(Q \times (\Sigma \cup \{e\} \cup \{ \perp \}) \times \Gamma) = \{ \{ (q_0, \langle (\rangle), (q_1, e), ERROR, ERROR, ERROR \}, \{ ERROR, (q_1, e), (q_1, e), (q_2, e), HALT \}, \{ ERROR, ERROR, ERROR, (q_2, e), HALT \} \}$;
- $Z_0 = e$;
- $F = \{q_1, q_2\}$.

Посимвольный разбор

Идентификатор в скобках

Пример разбора цепочки «((a123))»:

$$(q_0, \langle((a123)) \perp \rangle, e) \quad {}^1 \vdash (q_0, \langle(a123)) \perp \rangle, \langle(\rangle)$$

$${}^2 (q_0, \langle a123 \rangle \perp \rangle, \langle((\rangle)$$

$$\square^3 (q_1, \langle 123 \rangle \perp \rangle, \langle((\rangle)$$

$$\square^4 (q_1, \langle 23 \rangle \perp \rangle, \langle((\rangle)$$

$$\square^5 (q_1, \langle 3 \rangle \perp \rangle, \langle((\rangle)$$

$$\square^6 (q_1, \langle \rangle \perp \rangle, \langle((\rangle)$$

$$\square^7 (q_2, \langle \rangle \perp \rangle, \langle(\rangle)$$

$$\square^8 (q_2, \langle \perp \rangle, e)$$

$$\square^9 \text{ HALT}$$

Разбор завершен успешно.

Посимвольный разбор

Идентификатор в скобках

Пример разбора цепочки «(x)»:

$(q_0, \text{«(x)»} \perp \text{«», } e)$ ¹ ~~$(q_0, \text{«(x)»} \perp \text{«», «(»)$~~
² $(q_1, \text{«)»} \perp \text{«», «(»)$
³ $(q_1, \text{«)»} \perp \text{«», } e)$
⁴ ~~$ERROR$~~

Имеем ошибку в позиции 4. Пример разбора цепочки «()»:

$(q_0, \text{«()»} \perp \text{«», } e)$ ¹ ~~$(q_0, \text{«)»} \perp \text{«», «(»)$~~
² $ERROR$

Ошибка в позиции 2.

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Язык L описывает вложенные операторы языка Pascal «**begin end**;». Таблица переходов ДМПА при посимвольном разборе:

	b, e	e, b	g, e	i, e	n, e	d, e	«;», e	_, e	⊥, ∅
q_0	q_1, b	q_6, e						q_0, e	HALT
q_1		q_2, b							
q_2			q_3, e						
q_3				q_4, e					
q_4					q_5, e				
q_5								q_0, e	
q_6					q_7, e				
q_7						q_8, e			
q_8							q_0, e	q_8, e	

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Таблица переходов ДМПА при разборе по лексемам

	begin, e	end, b	«;», e	\perp , \emptyset
q_0	q_0, b	q_1, e		HALT
q_1			q_0, e	

$$\Sigma = \{b, e, g, i, n, d, \text{«;»}, _ \} \rightarrow \Sigma' = \{begin, end, \text{«;»}\}$$

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Алфавит языка Σ делится на три подмножества:

1. Подмножество символов-разделителей $\Sigma_s \subset \Sigma$;
2. Подмножество символов пунктуации $\Sigma_p \subset \Sigma$;
3. Подмножество лексемных символов $\Sigma_L \subset \Sigma$:

$$\Sigma_L = \Sigma - (\Sigma_s \cup \Sigma_p).$$

Алфавит Σ' :

$$\Sigma' \subseteq \Sigma_p \cup \Sigma_L^+.$$

Лексема x – либо $x \in \Sigma_p$, либо $x \in \Sigma_L^+$, отделенная от других лексем символами алфавитов Σ_s и Σ_p .

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Пример:

begin

begin end ;

end;

begin

end;

1. **begin** (1:1);

2. **begin** (2:3);

3. **end** (2:9);

4. **;** (2:13);

5. **end** (3:1);

6. **;** (3:4);

7. **begin** (4:1);

8. **end** (5:1);

9. **;** (5:4).

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Пример разбора:

$(q_0, \text{«bbe;e;be; } \perp \text{»}, e) \stackrel{1}{\vdash} (q_0, \text{«be;e;be; } \perp \text{»}, b)$

$\stackrel{2}{\vdash} (q_0, \text{«e;e;be; } \perp \text{»}, bb)$

$\square \stackrel{3}{\vdash} (q_1, \text{«;e;be; } \perp \text{»}, b)$

$\square \stackrel{4}{\vdash} (q_0, \text{«e;be; } \perp \text{»}, b)$

$\square \stackrel{5}{\vdash} (q_1, \text{«;be; } \perp \text{»}, e)$

$\square \stackrel{6}{\vdash} (q_0, \text{«be; } \perp \text{»}, e)$

$\square \stackrel{7}{\vdash} (q_0, \text{«e; } \perp \text{»}, b)$

$\square \stackrel{8}{\vdash} (q_1, \text{«; } \perp \text{»}, e)$

$\square \stackrel{9}{\vdash} (q_0, \text{« } \perp \text{»}, e)$

$\square \stackrel{10}{\vdash} HALT \vdash$

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Пример:

begin end;

end;

1. **begin** (1:1);

2. **end** (1:7);

3. ; (1:10);

4. **end** (2:1);

5. ; (2:4);

$(q_0, \text{«be;e;}\perp\text{»}, e) \stackrel{1}{\not\models} (q_0, \text{«e;e;}\perp\text{»}, b)$

$\stackrel{2}{(q_1, \text{«;e;}\perp\text{»}, e)$

$\square \stackrel{3}{(q_0, \text{«e;}\perp\text{»}, e)$

$\square \stackrel{4}{ERROR}$

Разбор по лексемам

Вложенные операторы

Таблица переходов ДКА с действиями:

	{b, e, g, i, n, d}, e	«;», e	_, e	⊥, ∅
q_0	$q_1, e, \langle A_1 \rangle$	$q_0, e, \langle A_3 \rangle$	q_0, e, \emptyset	HALT
q_1	$q_1, e, \langle A_2 \rangle$	$q_0, e, \langle A_4 \rangle$	$q_0, e, \langle A_5 \rangle$	

Действия (в начале разбора $\text{buf} := ''$):

- $\langle A_1 \rangle$ – если $\text{buf} \equiv ''$, то $\text{buf} := a_k$, иначе *ERROR*.
- $\langle A_2 \rangle$ – $\text{buf} := \text{buf} + a_k$.
- $\langle A_3 \rangle$ – если $\text{buf} \equiv \text{'end'}$, то $\text{buf} := ''$, иначе *ERROR*.
- $\langle A_4 \rangle$ – если $\text{buf} \equiv \text{'end'}$, то $\langle A_5 \rangle$; $\langle A_3 \rangle$, иначе *ERROR*.
- $\langle A_5 \rangle$: если $\text{buf} \equiv \text{'begin'}$, то $M \leftarrow b$ и $\text{buf} := ''$; если же $\text{buf} \equiv \text{'end'}$ и $M = b\alpha$, то $M \rightarrow b$, иначе *ERROR*.