

Аналитическая геометрия

Прямая на плоскости

Определение. Уравнением линии на плоскости Oxy называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y любой точки данной линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

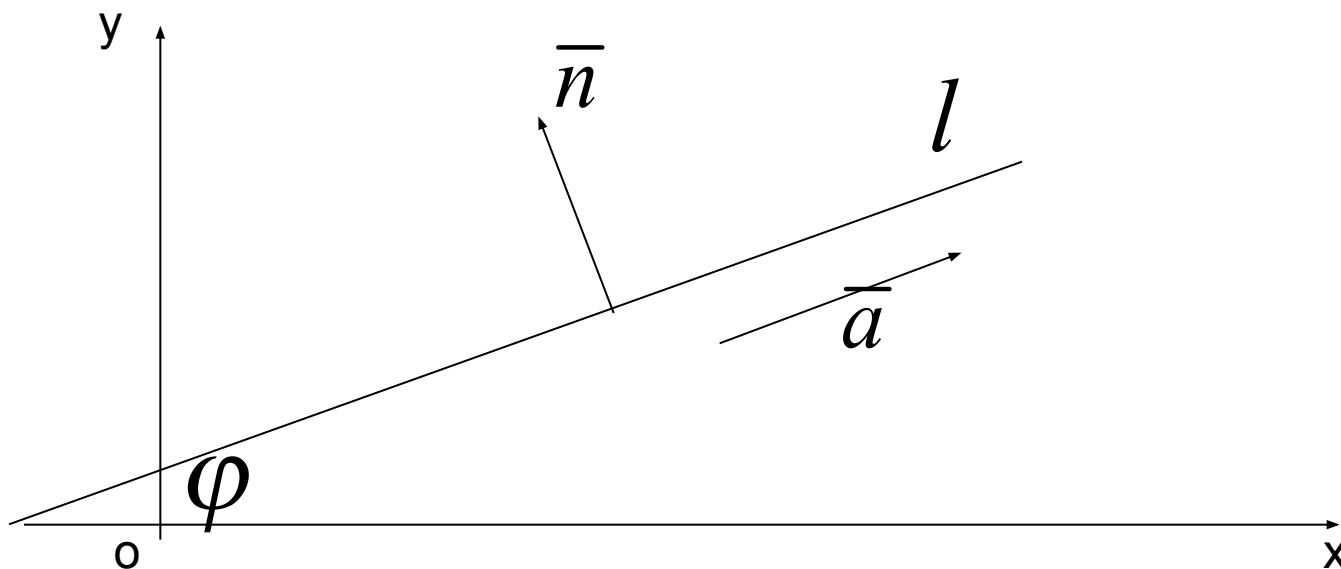
Теорема. Всякое уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$,
где A и B не обращаются в нуль одновременно, представляет собой уравнение некоторой прямой линии на плоскости Oxy .

**Уравнение прямой,
проходящей через точку
перпендикулярно вектору**

Введем следующие понятия. Вектор, перпендикулярный прямой l , будем называть нормалью прямой и обозначать $\bar{n}$. Итак, $\bar{n} \perp l$.

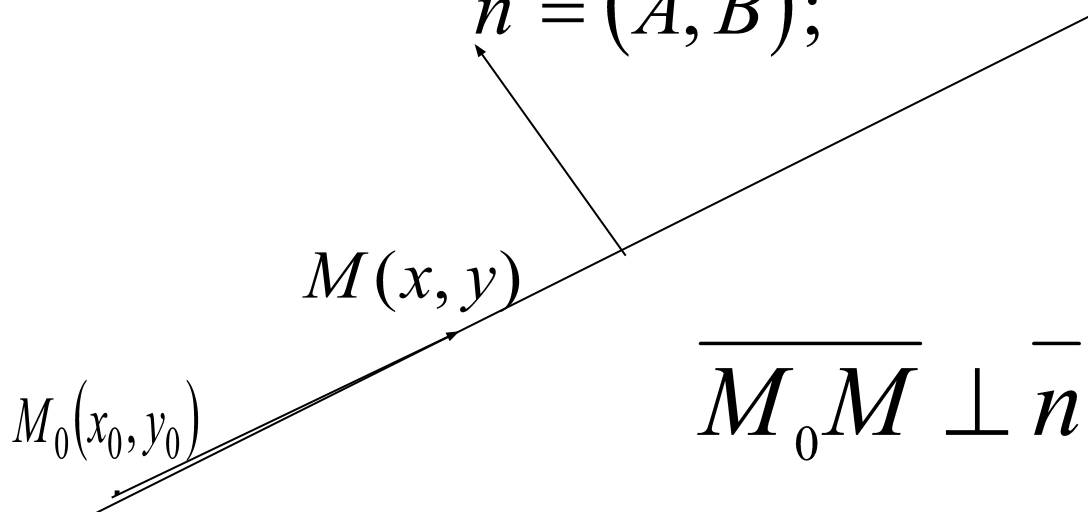
Вектор, параллельный прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой. Обозначим его $\bar{a} = (m, p)$.

Тангенс угла наклона прямой к
положительному направлению оси Ox
будем называть угловым
коэффициентом этой прямой: $\operatorname{tg} \varphi = k$



Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой. Точка $M(x, y)$ - произвольная точка прямой.

$$\vec{n} = (A, B);$$



Тогда скалярное произведение

$$\overline{n} \cdot \overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Получили уравнение прямой,
проходящей через заданную точку,
перпендикулярно данному вектору:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

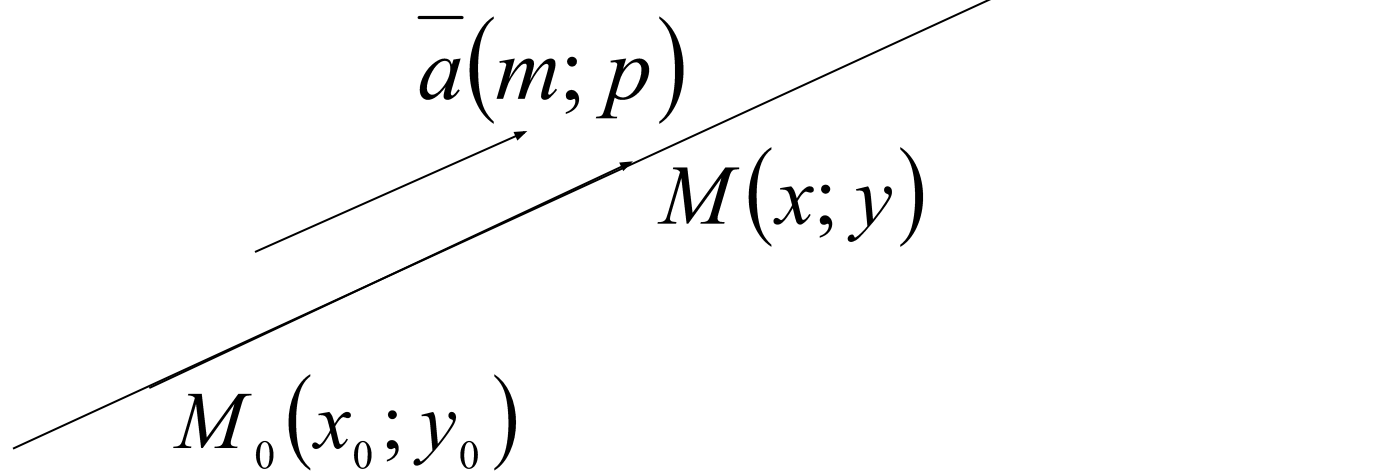
Общее уравнение прямой

Из предыдущего уравнения легко получаем общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

Каноническое уравнение прямой

Пусть $M_0(x_0; y_0) \in l$ и $\bar{a} \parallel l$



Тогда из условия коллинеарности векторов $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ и $\bar{a} = (m, p)$; получаем каноническое, т. е. простейшее уравнение прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p}$$

Пример

Написать уравнения прямых,
проходящих через точку $M_0(2, -1)$
параллельно и перпендикулярно
вектору $\overline{AB} = (3, -1)$.

Первое уравнение $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1}$ и

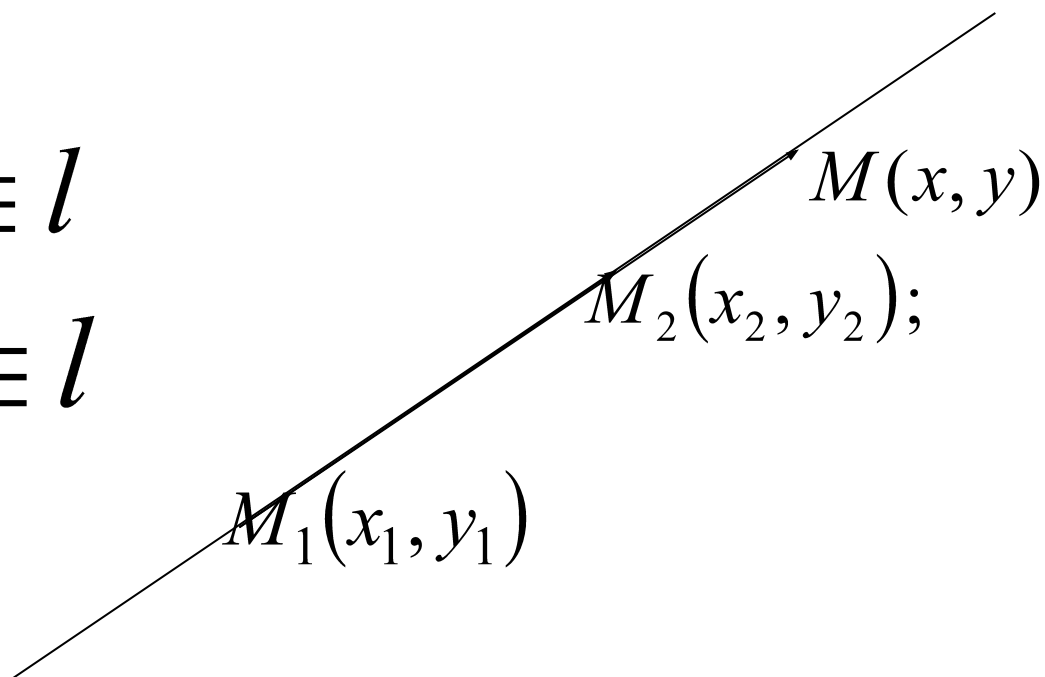
второе $3(x-2) - (y+1) = 0$.

**Уравнение прямой,
проходящей через две точки**

Пусть

$$M_1(x_1; y_1) \in l$$

$$M_2(x_2; y_2) \in l$$



$$\overline{M_1 M} \parallel \overline{M_1 M_2}$$

Координаты этих векторов
пропорциональны:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Получили уравнение прямой, проходящей
через две точки.

Параметрические уравнения прямой

Приравняем обе части соотношения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

к t . Получим параметрические уравнения
прямой

$$x = mt + x_0$$

$$y = pt + y_0$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Преобразуем уравнение $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

к виду

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

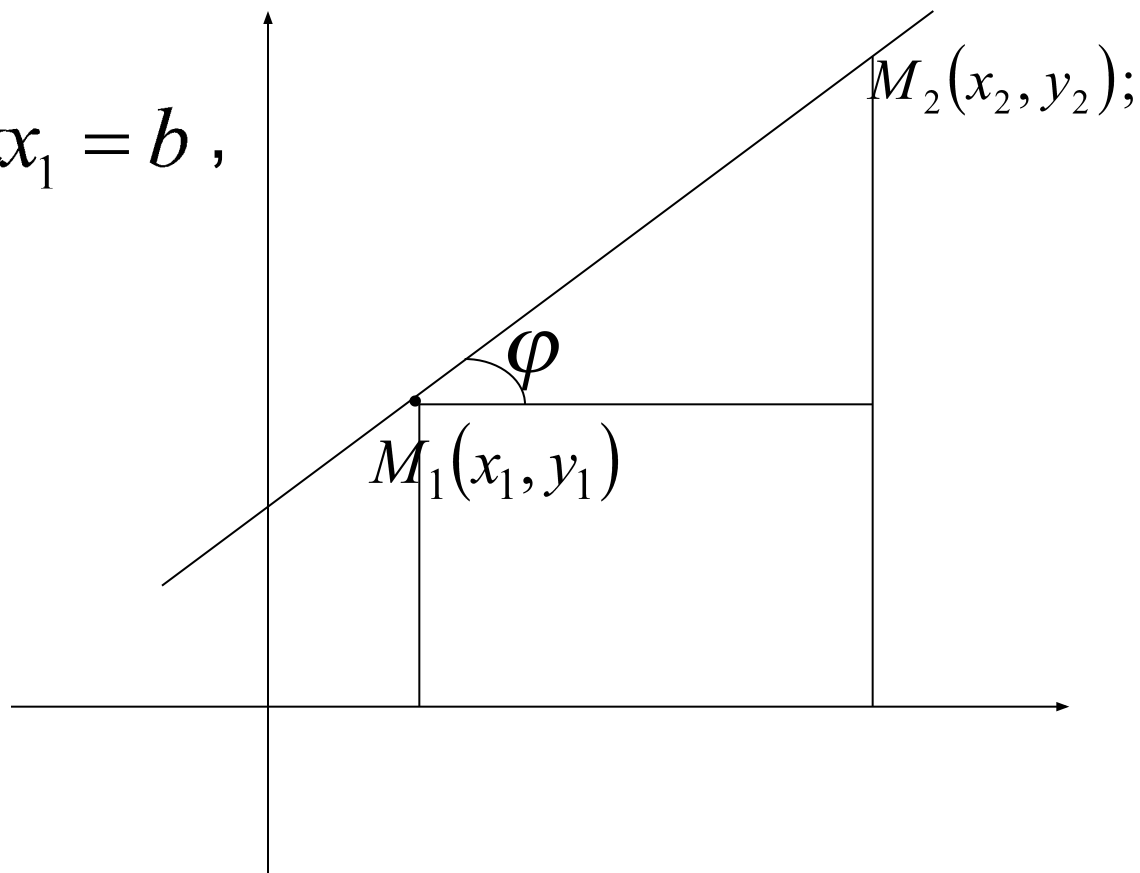
Обозначив

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k, \quad y_1 - kx_1 = b,$$

где $k = \operatorname{tg} \varphi$,

получим

$$y = kx + b$$



Уравнение прямой ,проходящей через точку

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на
прямой $y = k \cdot x + b$. Тогда $y_0 = kx_0 + b$.

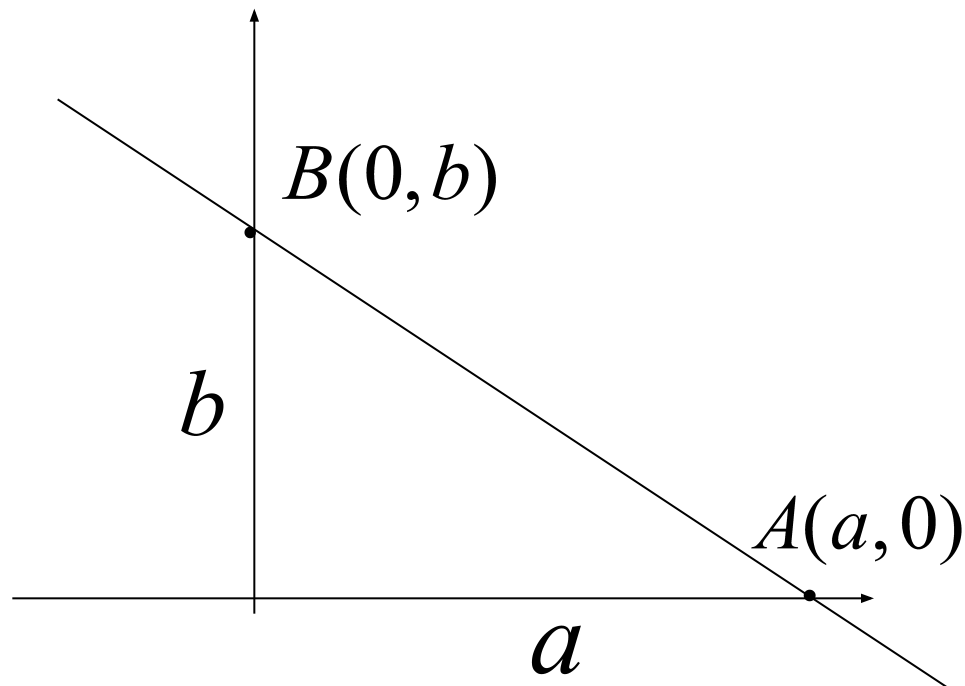
Вычтем из первого второе соотношение .

Получим

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Взаимное расположение прямых

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые заданы общими уравнениями

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \overline{n_1}(A_1; B_1)$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \overline{n_2}(A_2; B_2)$$

Тогда угол между этими прямыми равен углу между их нормальями , т. е.

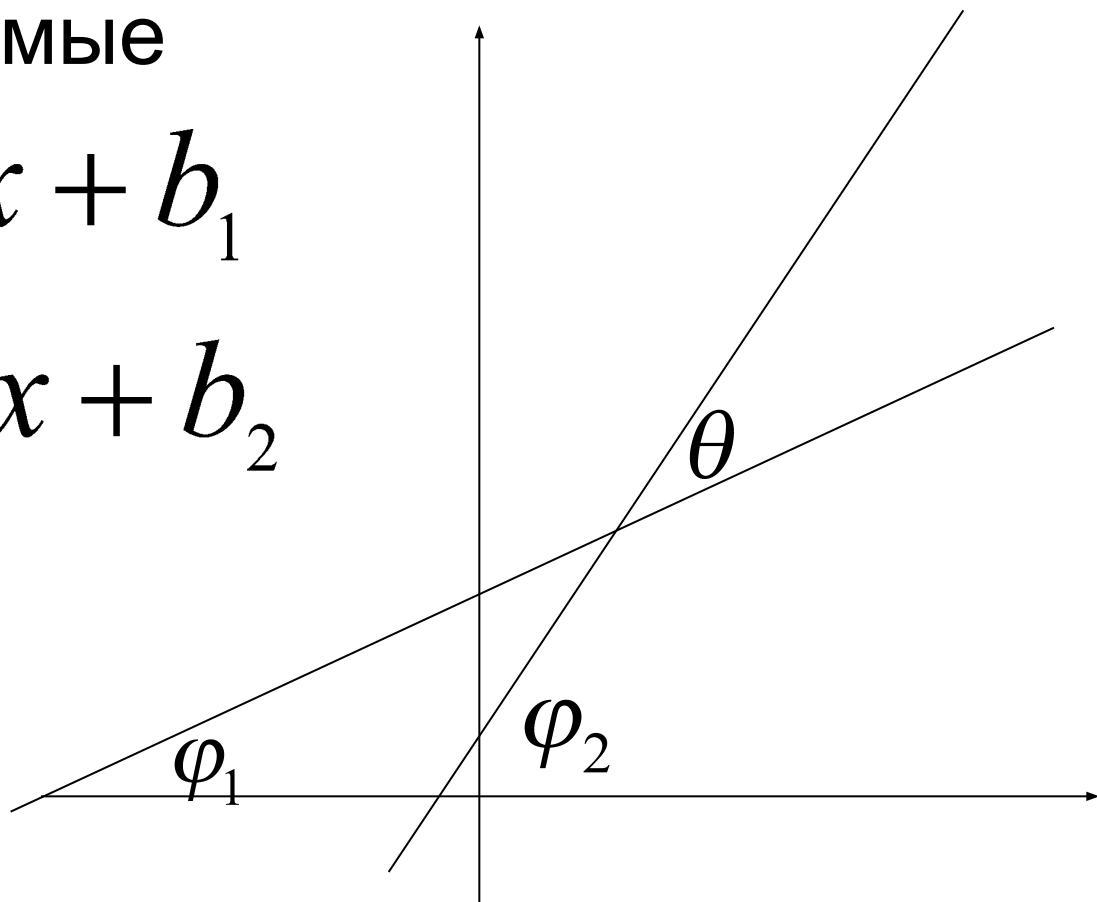
$$\cos \alpha = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Пусть даны прямые

$$l_1 : y = k_1 x + b_1$$

$$l_2 : y = k_2 x + b_2$$

$$\theta = \varphi_2 - \varphi_1$$



Тогда

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

Условия параллельности

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий (в зависимости от вида уравнений прямых).

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Условие перпендикулярности

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находят по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример

Найти уравнение прямой, проходящей
через точки $A_1(5, -1)$ и $A_2(2, 5)$.