

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 14

11. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ



11. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

11.5. Теоремы двойственности и равновесия.



11.5. Теоремы двойственности и равновесия. Справедлива следующая теорема,

которую обычно называют теоремой двойственности.

Теорема 1. *Либо обе взаимнодвойственные задачи линейного программирования*

Задача 3 и **Задача 3д(а)** *не имеют решения, либо они обе имеют решение и при этом справедливо равенство*

$$I(u_*) = - I_D(l^*),$$

где u_* - решение прямой, а l^* - решение двойственной задачи.

Доказательство. Выпишем функцию Лагранжа для задачи 3.

Задача 3.

$$\langle c, u \rangle \rightarrow \inf,$$

$$Aw - b \leq 0,$$

$$\hat{A}\bar{w} - \hat{b} = 0$$

$$u \in U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in R^k \times R^{n-k} \mid w \geq 0 \right\}.$$

$$w = \begin{pmatrix} u^1 \\ \boxtimes \\ u^k \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ \boxtimes \\ u^n \end{pmatrix}$$

$$L(u, \lambda) = \langle c, u \rangle +$$

$$+ \langle \mu, Au - b \rangle + \langle \bar{\mu}, \hat{A}u - \hat{b} \rangle =$$

$$= \langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}, u \rangle - \langle b, \mu \rangle - \langle \hat{b}, \bar{\mu} \rangle,$$

$$\mu = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \boxtimes \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in R^m, \quad \bar{\mu} = \begin{pmatrix} \lambda_{m+1} \\ \boxtimes \\ \lambda_s \end{pmatrix} \in R^{s-m}$$

Область ее определения

$$U_0 \times \Lambda^0, \quad \text{где}$$

$$U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in R^k \times R^{n-k} \mid w \geq 0 \right\},$$

$$\Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \mid \mu \geq 0 \right\}.$$

Выпишем функцию Лагранжа для задачи 3д(а).

Задача 3д(а).

$$\langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \bar{\mu} \rangle \rightarrow \inf,$$

$$\left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \bar{\mu} \right)^i \leq 0, \quad i \in \{1, \dots, k\};$$

$$\left(c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu} \right)^i = 0, \quad i \in \{k+1, \dots, n\};$$

$$\lambda \in \Lambda^0 =$$

$$= \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \mid \mu \geq 0 \right\}.$$

$$\begin{aligned} L_D(\lambda, u) &= \langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \bar{\mu} \rangle + \\ &+ \sum_{j=1}^k u^j \left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \bar{\mu} \right)^j + \sum_{j=k+1}^n u^j \left(-c - A^T \mu - \hat{A}^T \bar{\mu} \right)^j = \\ &= \langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \bar{\mu} \rangle - \langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}, u \rangle. \end{aligned}$$

и область ее определения

$$U_{0D} = \Lambda^0 = \left\{ \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in R^m \times R^{s-m} \mid \mu \geq 0 \right\}.$$

$U_{0D} \times \Lambda_D^0$, где

$$\Lambda_D^0 = U_0 = \left\{ u = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in R^k \times R^{n-k} \mid w \geq 0, i \in K \right\},$$

Сравним функцию Лагранжа для двойственной задачи

$$L_D(\lambda, u) = \langle b, \mu \rangle + \langle \hat{b}, \bar{\mu} \rangle - \langle c + A^T \mu + \hat{A}^T \bar{\mu}, u \rangle$$

с функцией Лагранжа для основной задачи

$$L(u, \lambda) = \langle c + A^T \mu + \bar{A}^T \bar{\mu}, u \rangle - \langle b, \mu \rangle - \langle \bar{b}, \bar{\mu} \rangle.$$

Приходим к равенству

$$L(u, \lambda) \equiv -L_D(\lambda, u), \quad u \in U_0, \lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in \Lambda^0.$$

Пусть $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda^0$ — седловая точка функции $L(u, \lambda)$. Тогда

$$L(u_*, \lambda) \leq L(u_*, \lambda^*) \leq L(u, \lambda^*), \quad u \in U_0, \lambda \in \Lambda^0 \Rightarrow$$

$$-L(u_*, \lambda) \geq -L(u_*, \lambda^*) \geq -L(u, \lambda^*), \quad u \in U_0, \lambda \in \Lambda^0 \Rightarrow$$

$$-L(u, \lambda^*) \leq -L(u_*, \lambda^*) \leq -L(u_*, \lambda), \quad \lambda \in \Lambda^0 = U_{0D}, u \in U_0 = \Lambda_D^0 \Rightarrow$$

$$L_D(\lambda, u_*) \leq L_D(\lambda^*, u_*) \leq L_D(\lambda^*, u), \quad \lambda \in U_{0D}, u \in \Lambda_D^0.$$

Таким образом, $(\lambda^*, u_*) \in \Lambda^0 \times U_0$ — седловая точка функции $L_D(\lambda, u)$.

При этом

$$L(u_*, \lambda^*) = -L_D(\lambda^*, u_*). \quad (1)$$

Пусть одна из взаимно двойственных задач имеет решение. Например, u_* — решение задачи **3**. Тогда по теореме 9.3 существует седловая точка $(u_*, \lambda^*) \in U_0 \times \Lambda^0$ функции Лагранжа для этой задачи. При этом $I(u_*) = L(u_*, \lambda^*)$.

Выше установлено, что $(\lambda^*, u_*) \in \Lambda^0 \times U_0$ – седловая точка функции $L_D(\lambda, u)$.

Тогда по **теореме 9.2** точка λ^* является решением задачи **Зд(а)** и

$$L_D(\lambda^*, u_*) = I_D(\lambda^*).$$

В силу (1) $L(u_*, \lambda^*) = -L_D(\lambda^*, u_*)$ (1) справедливо равенство

$$I(u_*) = -I_D(\lambda^*).$$

Аналогично устанавливается, что из существования решения двойственной задачи следует существование решения основной задачи. Из приведенных рассуждений следует также, что если одна из взаимно двойственных задач не имеет решения, то и другая не может его иметь. Теорема доказана.

Установим условия разрешимости взаимно двойственных задач.

Теорема 2. *Для существования решения взаимодвойственных задач достаточно, чтобы обе взаимодвойственные задачи были допустимыми.*

Доказательство. Достаточно установить ограниченность снизу целевых функций

взаимно двойственных задач. Пусть $u = \begin{pmatrix} w \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in U$, $\lambda = \begin{pmatrix} \mu \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} \in U_D$. Тогда

$$\begin{aligned}
I(u) &= \langle c, u \rangle = \sum_{j=1}^n c_j u^j = \sum_{j=1}^k c_j u^j + \sum_{j=k+1}^n c_j u^j \\
&= \sum_{j=1}^k \left(-A^T m - \hat{A}^T \bar{m} \right)^j u^j + \sum_{j=k+1}^n \left(-A^T m - \hat{A}^T \bar{m} \right)^j u^j = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(-A^T m - \hat{A}^T \bar{m} \right)^j u^j = \left\langle -A^T m - \hat{A}^T \bar{m}, u \right\rangle = \\
&= \left\langle -A^T m, u \right\rangle + \left\langle -\hat{A}^T \bar{m}, u \right\rangle = \left\langle m, -Au \right\rangle + \left\langle \bar{m}, -\hat{A}u \right\rangle \\
&= \langle m, b \rangle - \langle \bar{m}, \hat{b} \rangle = -I_D(l) - I(u). \quad (2)
\end{aligned}$$

Из (2) выводим

$$\begin{aligned}
I(u) - I_D(l), & \quad " u \in U_0, l \in L^0. \\
I_D(l) - I(u), &
\end{aligned} \quad (3)$$

Таким образом, если u - допустимая точка основной задачи, то целевая функция

двойственной задачи ограничена снизу числом $-I(u)$. Наоборот, если l - допустимая точка двойственной задачи, то целевая функция основной задачи ограничена снизу числом $-I_D(l)$. Ограниченность целевой функции (снизу при решении задачи линейного программирования на минимум) является достаточным условием ее разрешимости. Теорема доказана.

Теорема 3 (равновесия). Пусть $u_* \in U$ и $l^* \in L$ - решения взаимодвойственных задач 3 и 3Д(а) соответственно. Тогда для всех $j \in \{1, L, k\}$ выполнено

$$u_*^j > 0, j \in \{1, L, k\} \Rightarrow c_j = \left(-A^T \mu^* - \bar{A}^T \bar{\mu}^*\right)^j, \quad (4)$$

$$c_j > \left(-A^T \mu^* - \bar{A}^T \bar{\mu}^*\right)^j \Rightarrow u_*^j = 0,$$

а для всех $i \in \{1, L, m\}$ выполнено

$$l_i^* > 0 \Rightarrow (Au_*)^i = b^i, \quad (Au_*)^i < b^i \Rightarrow l_i^* = 0. \quad (5)$$

Доказательство. Из неравенства (2)

$$\begin{aligned}
I(u) = \langle c, u \rangle &= \sum_{j=1}^n c_j u^j = \sum_{j=1}^k c_j u^j + \sum_{j=k+1}^n c_j u^j \leq \sum_{j=1}^k (-A^T m - \hat{A}^T \bar{m})^j u^j + \\
&+ \sum_{j=k+1}^n (-A^T m - \hat{A}^T \bar{m})^j u^j = \sum_{j=1}^n (-A^T m - \hat{A}^T \bar{m})^j u^j = \langle -A^T m - \hat{A}^T \bar{m}, u \rangle = \\
&= \langle -A^T m, u \rangle + \langle -\hat{A}^T \bar{m}, u \rangle = \langle m - Au \rangle + \langle \bar{m} - \hat{A}u \rangle \leq \\
&\leq \langle m, b \rangle - \langle \bar{m}, \hat{b} \rangle = -I_D(l). \quad (2)
\end{aligned}$$

следует

$$\begin{aligned}
I(u) = \langle c, u \rangle \leq \langle -A^T m - \hat{A}^T \bar{m}, u \rangle = \langle m - Au \rangle + \langle \bar{m} - \hat{A}u \rangle \leq \\
\leq \langle m, b \rangle - \langle \bar{m}, \hat{b} \rangle = -I_D(l). \quad (6)
\end{aligned}$$

В силу **теоремы 1** справедливо равенство

$$I(u_*) = -I_D(l^*).$$

Тогда при $u = u_*, l = l^*$ все знаки неравенства в (6) следует заменить на знаки равенства. Имеем

$$\begin{aligned}
 I(u_*) &= \langle c, u_* \rangle = \langle -A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^*, u_* \rangle = \langle \bar{m}^*, -Au_* \rangle + \langle \bar{m}^*, -\hat{A}u_* \rangle = \\
 &= -\langle \bar{m}^*, b \rangle - \langle \bar{m}^*, \hat{b} \rangle = -I_D(l^*). \quad (7)
 \end{aligned}$$

Из (7) выводим

$$\begin{aligned}
 \langle c, u_* \rangle &= \langle -A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^*, u_* \rangle \text{ и } \langle -A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^* - c, u_* \rangle = 0 \text{ и} \\
 &\quad = 0 \text{ Задача 3 Д(а)} \\
 \sum_{j=1}^k (-A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^* - c)^j u_*^j + \sum_{j=k+1}^n (-A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^* - c)^j u_*^j &= 0 \text{ и} \\
 \sum_{j=1}^k (-A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^* - c)^j u_*^j &= 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\text{В силу } (-A^T \bar{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^* - c)^j \stackrel{\text{Задача 3 Д(а)}}{\leq} 0, \quad u_*^j \stackrel{\text{Задача 3}}{\geq} 0, \quad j = 1, \dots, k$$

из (8) следует утверждение (4) теоремы

$$\begin{aligned}
 u_*^j > 0, j \in \{1, \dots, k\} \text{ и } c_j &= (-A^T \bar{m}^* - \bar{A}^T \bar{m}^*)^j, \\
 c_j > (-A^T \bar{\mu}^* - \bar{A}^T \bar{\mu}^*)^j &\Rightarrow u_*^j = 0, \quad j = 1, \dots, k \quad (4)
 \end{aligned}$$

Аналогично из (7) $I(u_*) = \langle c, u_* \rangle = \langle -A^T \dot{m}^* - \hat{A}^T \bar{m}^*, u_* \rangle = \langle \dot{m}^*, -Au_* \rangle +$
 $+ \langle \bar{m}^*, -\hat{A}u_* \rangle = -\langle \dot{m}^*, b \rangle - \langle \bar{m}^*, \hat{b} \rangle = -I_D(I^*)$. (7) следует

$$\langle \dot{m}^*, -Au_* \rangle + \langle \bar{m}^*, -\hat{A}u_* \rangle = -\langle \dot{m}^*, b \rangle - \langle \bar{m}^*, \hat{b} \rangle \quad \text{и}$$

$$0 = -\langle \dot{m}^*, b \rangle + \langle \dot{m}^*, Au_* \rangle - \langle \bar{m}^*, \hat{b} \rangle + \langle \bar{m}^*, \hat{A}u_* \rangle \quad \text{и}$$

= 0 Задача 3

$$\langle \dot{m}^*, Au_* - b \rangle + \langle \bar{m}^*, \hat{A}u_* - \hat{b} \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle \dot{m}^*, Au_* - b \rangle = 0 \quad \text{и}$$

$$\sum_{i=1}^m l_i^* (Au_* - b)^i = 0. \quad (9)$$

В силу $(Au_* - b)^i \leq 0$, $l_i^* \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ из (9) следует утверждение (5) теоремы

$$l_i^* > 0 \Rightarrow (Au_*)^i = b^i, \\ (Au_*)^i < b^i \Rightarrow l_i^* = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5)$$

Теорема доказана.

$$\dot{m}^* = \begin{pmatrix} \dot{m}_1^* \\ \vdots \\ \dot{m}_L^* \\ \vdots \\ \dot{m}_m^* \end{pmatrix}$$

Пример 1. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$u^1 + 2u^2 - 3u^3 + 5u^4 - 4u^5 \rightarrow \min$$

$$u^1 + 2u^2 - 3u^3 + 4u^4 + 6u^5 \leq 8,$$

$$-2u^1 + 3u^2 - 4u^3 + u^4 + 5u^5 \leq 10,$$

$$-4u^1 + 6u^2 + 2u^3 - 5u^4 + u^5 = -4,$$

$$3u^1 - 5u^2 + 2u^3 + u^4 - 4u^5 = 8,$$

$$u^1 \geq 0, u^2 \geq 0, u^3 \geq 0$$

Построим двойственную к ней задачу:

$$8\lambda_1 + 10\lambda_2 - 4\lambda_3 + 8\lambda_4 \rightarrow \min$$

$$-\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - 3\lambda_4 \leq 1,$$

$$-2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 + 5\lambda_4 \leq 2,$$

$$3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 \leq -3,$$

$$-4\lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 - \lambda_4 = 5,$$

$$-6\lambda_1 - 5\lambda_2 - \lambda_3 + 4\lambda_4 = -4,$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

Точка $u \in R^5$ с координатами

$$u^1 = 0, u^2 = 0, u^3 = 0, u^4 = \frac{8}{19}, u^5 = -\frac{36}{19}$$

является допустимой для прямой задачи, так как выполняются соотношения

$$0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{8}{19} - 6 \cdot \frac{36}{19} = -\frac{184}{19} < 8,$$

$$-2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + \frac{8}{19} - 5 \cdot \frac{36}{19} = -\frac{172}{19} < 10,$$

$$-4 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot \frac{8}{19} - \frac{36}{19} = -4,$$

$$3 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + \frac{8}{19} + 4 \cdot \frac{36}{19} = 8.$$

Аналогично точка $\lambda \in R^4$ с координатами

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = \frac{207}{19}, \lambda_4 = \frac{389}{19}$$

является допустимой для двойственной задачи, так как выполняются соотношения

$$-5 + 2 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{207}{19} - 3 \cdot \frac{389}{19} = -\frac{92}{19} < 1, \quad -2 \cdot 5 - 3 \cdot 9 - 6 \cdot \frac{207}{19} + 5 \cdot \frac{389}{19} = 0 < 2,$$

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 9 - 2 \cdot \frac{207}{19} - 2 \cdot \frac{389}{19} = -\frac{223}{19} < -3,$$

$$-6 \cdot 5 - 5 \cdot 9 - \frac{207}{19} + 4 \cdot \frac{389}{19} = -4, \quad -4 \cdot 5 - 9 + 5 \cdot \frac{207}{19} - \frac{389}{19} = 5.$$

По **теореме 2** обе взаимодвойственные задачи имеют решение. Выпишем эти решения.

Решение прямой задачи:

$$u_*^1 = \frac{112}{11}, u_*^2 = 0, u_*^3 = 0, u_*^4 = -\frac{72}{11}, u_*^5 = 4, \quad I(u_*) = -\frac{424}{11}$$

Решение двойственной задачи:

$$\lambda_1^* = \frac{30}{11}, \lambda_2^* = 0, \lambda_3^* = 4, \lambda_4^* = \frac{45}{11}, \quad I_D(\lambda^*) = \frac{424}{11}$$

В соответствии с **теоремой 1** здесь выполнено равенство

$$I(u_*) = -I_D(\lambda^*).$$

В силу **теоремы 3** первое ограничение прямой задачи на оптимальном векторе u_*

и первое ограничение двойственной задачи на оптимальном векторе λ^* должны

выполняться со знаком «=». Действительно,

$$\frac{112}{11} + 2 \times 0 - 3 \times 0 + 4 \times \left(-\frac{72}{11}\right) + 6 \times 4 = 8, \quad -\frac{30}{11} + 2 \times 0 + 4 \times 4 - 3 \times \frac{45}{11} = 1.$$

Вычислим второе ограничение основной задачи, а также второе и третье ограничения двойственной задачи на оптимальных значениях переменных. Имеем

$$\left(-2u^1 + 3u^2 - 4u^3 + u^4 + 5u^5 - 10\right) \Big|_{\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{112}{11} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{72}{11} \\ 4 \end{pmatrix}} = -\frac{186}{11} < 0,$$

$$\left(-2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 6\lambda_3 + 5\lambda_4 - 2\right) \Big|_{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{11} \\ 0 \\ 4 \\ \frac{45}{11} \end{pmatrix}} = -\frac{125}{11} < 0,$$

$$\left(3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 + 3\right) \Big|_{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{30}{11} \\ 0 \\ 4 \\ \frac{45}{11} \end{pmatrix}} = -\frac{49}{11} < 0.$$

В полном соответствии с теоремой 3 выше было получено $\lambda_2^* = 0, u_*^2 = 0, u_*^3 = 0$.

