



Тригонометрические уравнения


$$\sin x = a$$

$$\cos x = a$$

Определение.

- Уравнения вида $f(x) = a$, где a – данное число, а $f(x)$ – одна из тригонометрических функций, называются простейшими тригонометрическими уравнениями.



Решение простейших тригонометрических уравнений.

Чтобы успешно решать простейшие тригонометрические уравнения нужно

- 1) уметь отмечать точки на числовой окружности;**
- 2) уметь определять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для точек числовой окружности;**
- 3) знать свойства основных тригонометрических функций;**
- 4) знать понятие арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и уметь отмечать их на числовой окружности.**

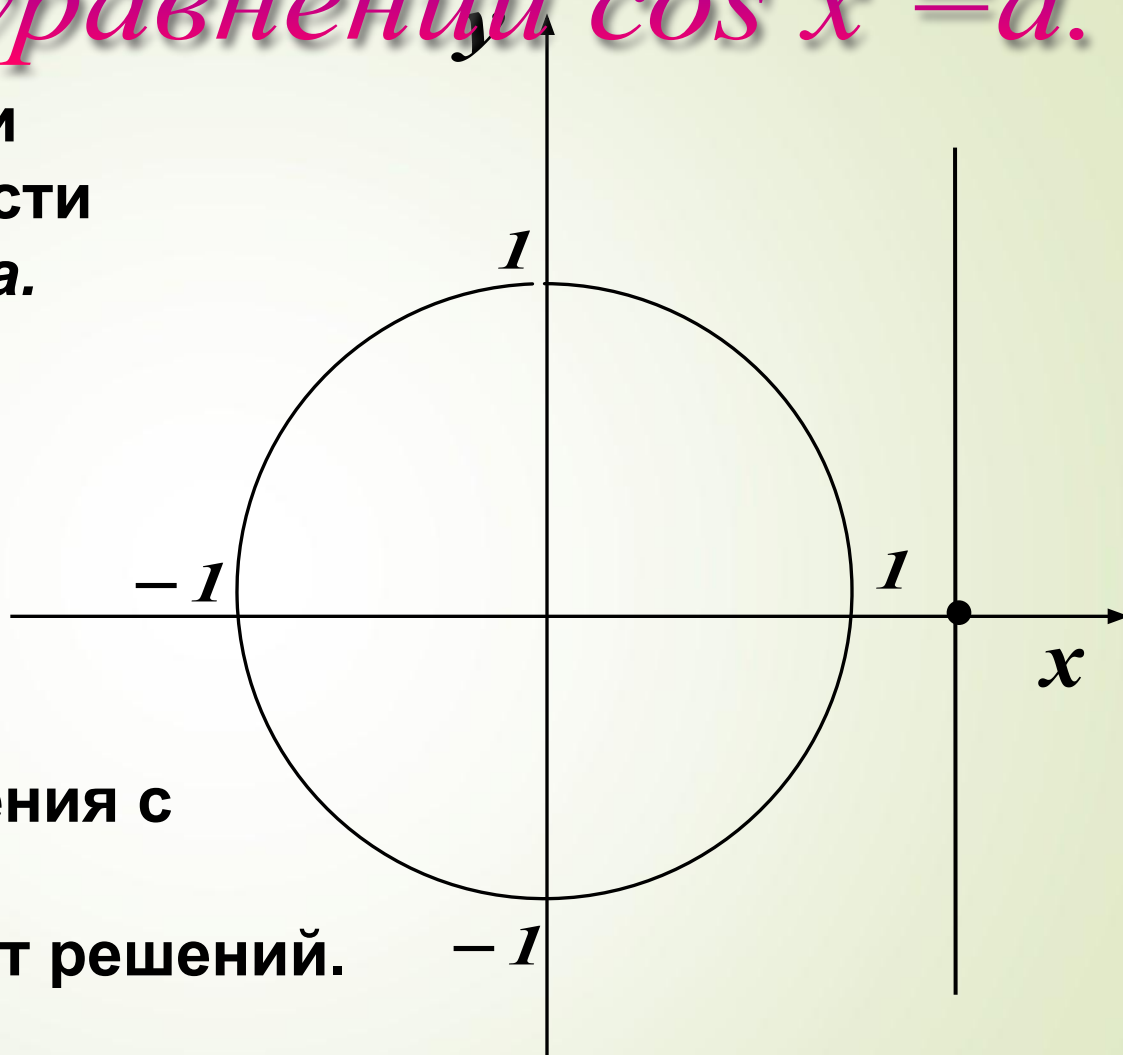
Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

1) $|a| > 1$

Нет точек пересечения с
окружностью.

Уравнение не имеет решений.



Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

$$2) |a| = 1$$

$$\cos x = 1$$
$$x = 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$
$$x = \pi + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$



Частные
решения

Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

3) $a = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$



Частное
решение

Решение уравнений $\cos x = a$.

Решим при помощи
числовой окружности
уравнение $\cos x = a$.

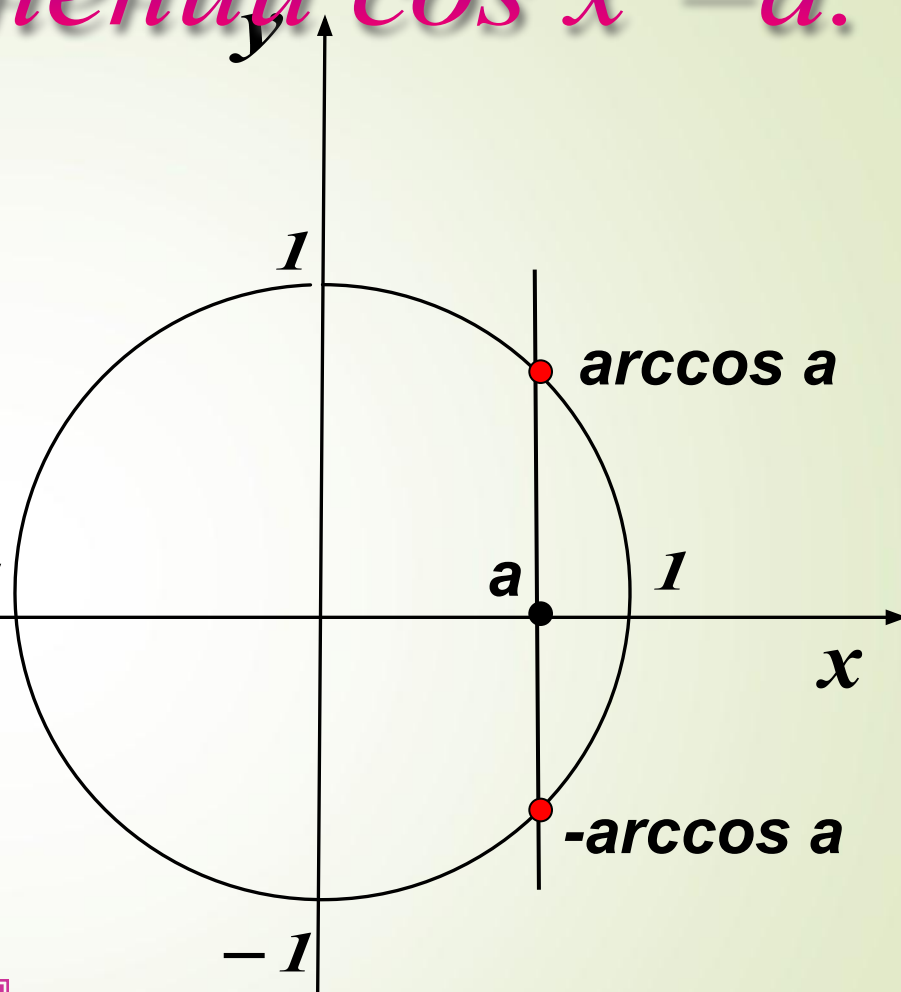
$$4) |a| < 1$$

Корни, симметричные
относительно Ох
могут быть записаны:

$$x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi k \\ -\arccos a + 2\pi k \end{cases}$$

или

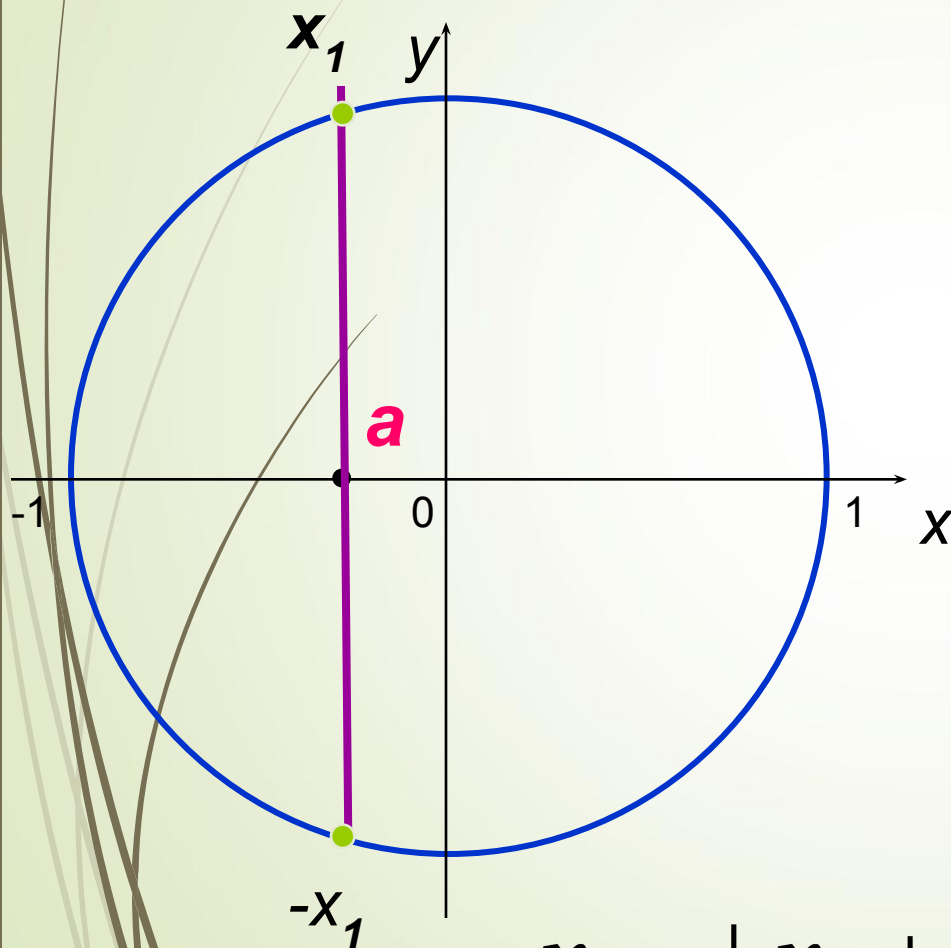
$$x = \pm \arccos a + 2\pi k$$



Общее решение

Уравнение $\cos x = a$ называется простейшим тригонометрическим уравнением

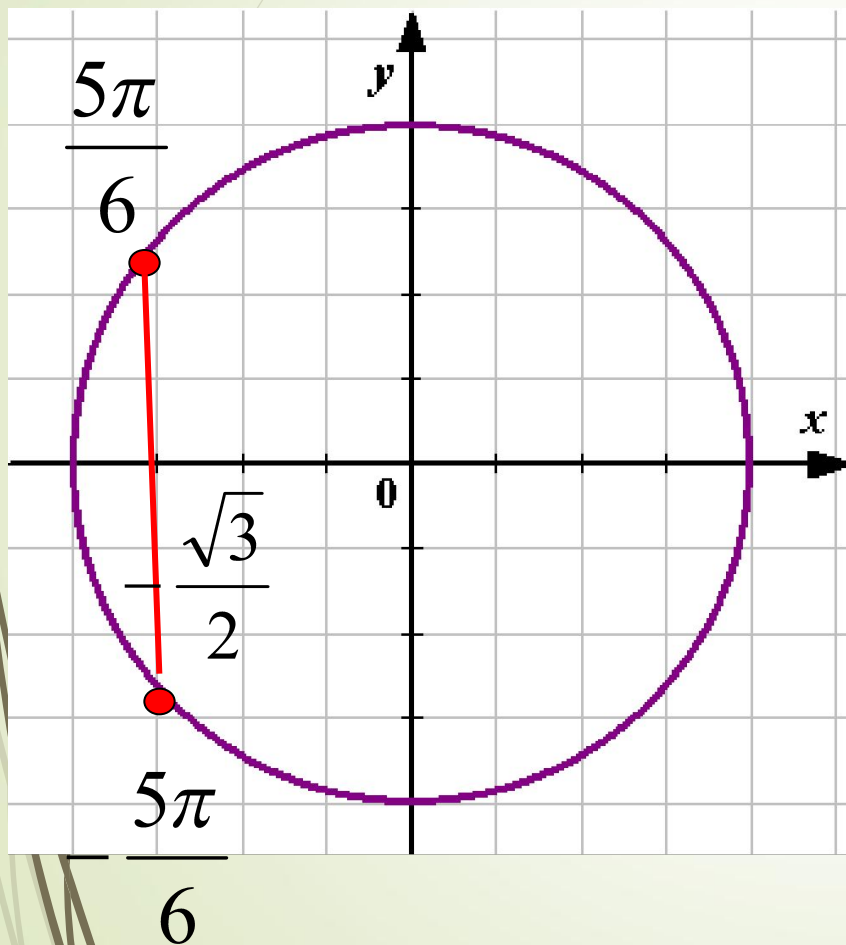
Решается с помощью единичной окружности



1. Проверить условие $|a| \leq 1$
2. Отметить точку a на оси абсцисс (линии косинусов)
3. Провести перпендикуляр из этой точки к окружности
4. Отметить точки пересечения перпендикуляра с окружностью.
5. Полученные числа— решения уравнения $\cos x = a$.
6. Записать общее решение уравнения.

$$x = \pm x_1 + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение

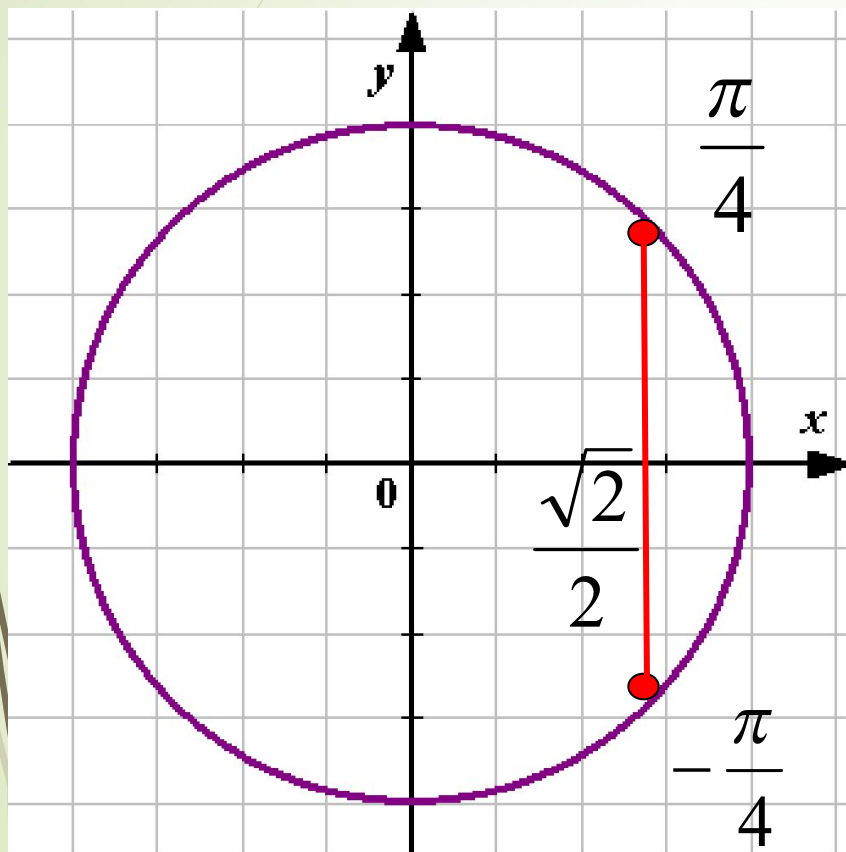


$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение



$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



□ Выписать в тетрадь

Уравнение $\cos t = a$

а) при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней

$$t_1 = \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\arccos a + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Эти серии можно записать так

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

Частные случаи:

б) при $a = 1$ имеет одну серию решений

$$t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

в) при $a = -1$ имеет одну серию решений

$$t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

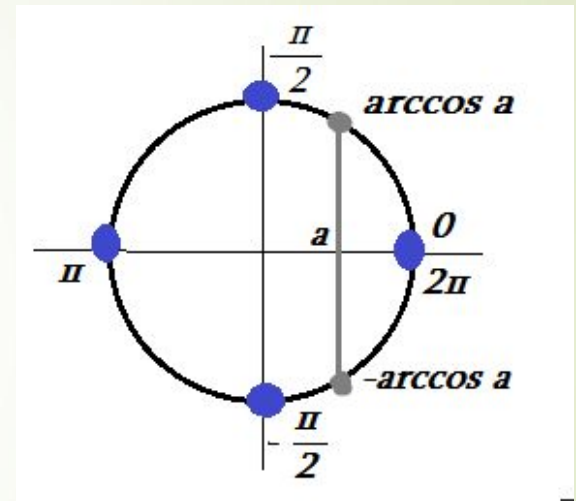
г) при $a = 0$ имеет две серии корней

$$t_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \text{ Обе серии можно записать в одну серию}$$

$$t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

д) при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение не имеет корней.



Уравнение $\sin t = a$

а) при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней

$$t_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти серии можно записать так

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

б) при $a = 1$ имеет одну серию решений

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

в) при $a = -1$ имеет одну серию решений

$$t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

г) при $a = 0$ имеет две серии корней

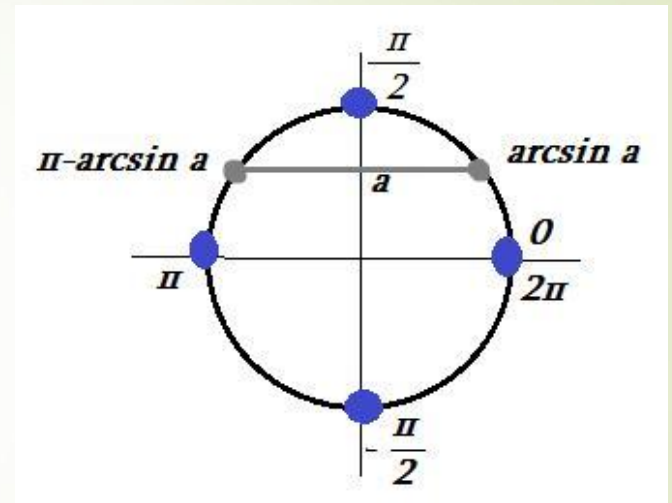
$$t_1 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$t_2 = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Обе серии можно записать в одну серию

$$t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

д) при $a > 1$ и $a < -1$ уравнение не имеет корней.



Решите уравнение

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x_1 = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решите уравнение

$$2) \sin x \cong \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$