ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ №8

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ПЛАН ЛЕКЦИИ

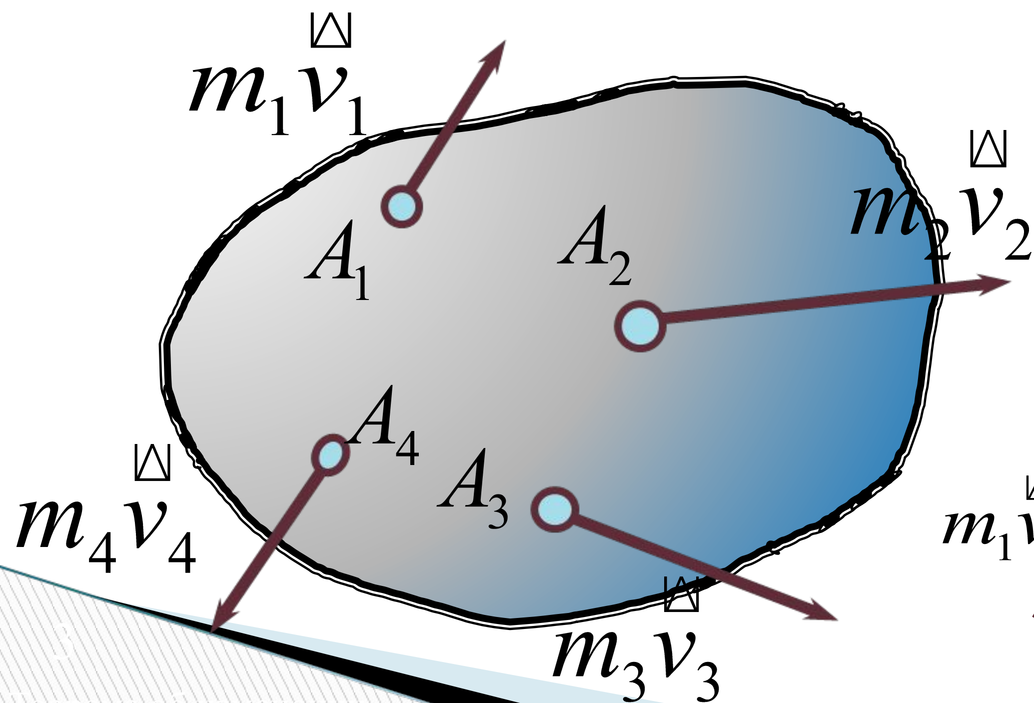
- Понятие импульса механической системы
- Теорема об изменении импульса системы
- Закон сохранения импульса системы

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

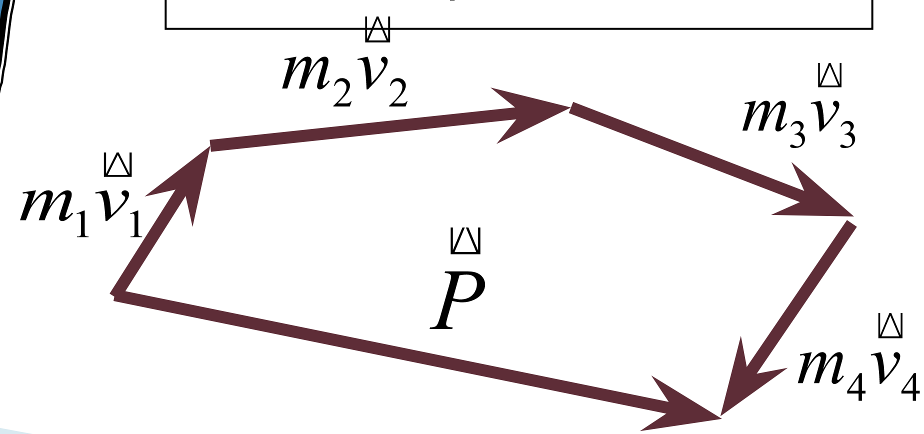
- Ознакомиться с теоремой изменения импульса МС и примерами ее практического применения.

ИМПУЛЬС МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Импульс (количество движения) МС – **векторная величина $\vec{P}$, равная геометрической сумме импульсов всех точек системы.**



$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_k \vec{v}_k$$



ФОРМУЛА ИМПУЛЬСА МС

По определению можно вывести формулу, по которой значительно легче вычислить величину $\vec{P}$

$$\vec{P} = \sum m_k \vec{v}_k, \qquad \vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum m_k \vec{r}_k \Rightarrow \sum m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c$$

От этого выражения возьмем производную по времени

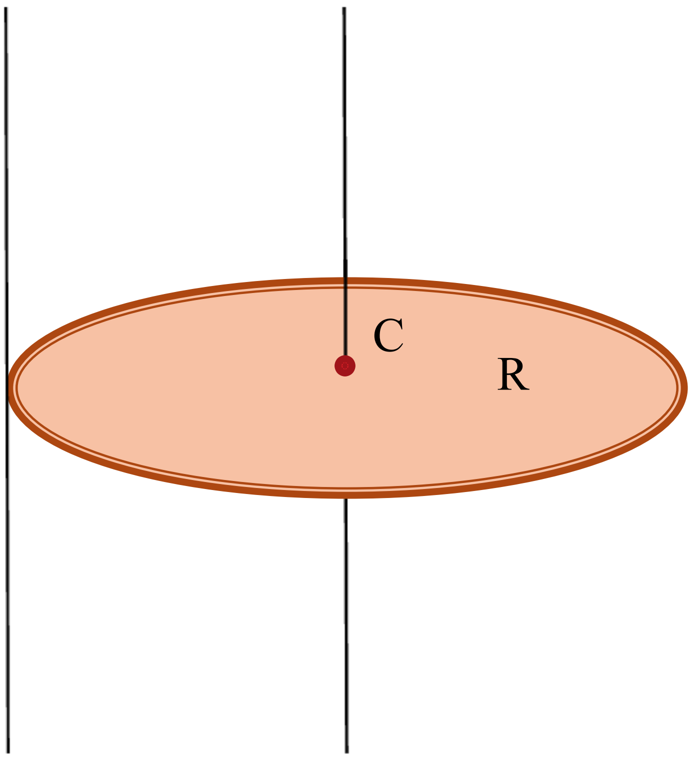
$$\sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = M\frac{d\vec{r}_c}{dt}$$, или $$\sum m_k \vec{v}_k = M\vec{v}_c$$

Следовательно, $\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_c}$ то есть

Количество движения системы равно произведению массы всей системы на скорость её центра масс.

Из этого следует, что **если центр масс при движении системы остаётся неподвижным, то импульс системы равен нулю.**

ПРИМЕР



Дано:

M

ω

R

$P - ?$

Решение:

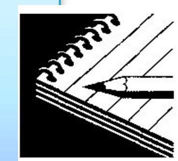
$$P = Mv = M\omega R$$

$$P = 0$$

В каком случае выражение $P = M\omega R$ является ответом данной задачи?

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА МС

Производная по времени вектора количества движения МС равна главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.



$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \quad \ldots, m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^i$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{v}_k = \vec{F}^e, \quad \text{или} \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^e,$$

что доказывает теорему.

В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ:

Изменение импульса МС за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов действующих на систему внешних сил за тот же промежуток времени.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e \Rightarrow d\vec{P} = \left(\sum \vec{F}_k^e\right) dt \Rightarrow \int_{P_0}^{P_1} d\vec{P} = \sum \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_k^e dt;$$

$$\vec{S}^e = \sum \vec{S}_k^e = \sum \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_k^e dt\,;$$

$$\vec{P}_1 - \vec{P}_0 = \vec{S}^e$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ

Закон сохранения импульса

1. Если сумма импульсов внешних сил, действующих на систему за некоторый промежуток времени равна нулю, то вектор импульса системы не изменится за этот промежуток времени.

$$\sum \vec{S}_k^e = 0 \to \quad \vec{P}(t_1) = \vec{P}(t_0)$$

2. Если сумма проекций импульсов внешних сил, действующих на систему, на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция вектора импульса системы не изменится за этот промежуток времени.

$$\sum S_{kx}^e = 0 \to P_x(t_1) = P_x(t_0)$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ

1. Если главный вектор всех внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то вектор импульса системы остаётся постоянным по величине и направлению.

$$\sum \vec{F}_k^e = 0 \rightarrow \qquad P = const$$

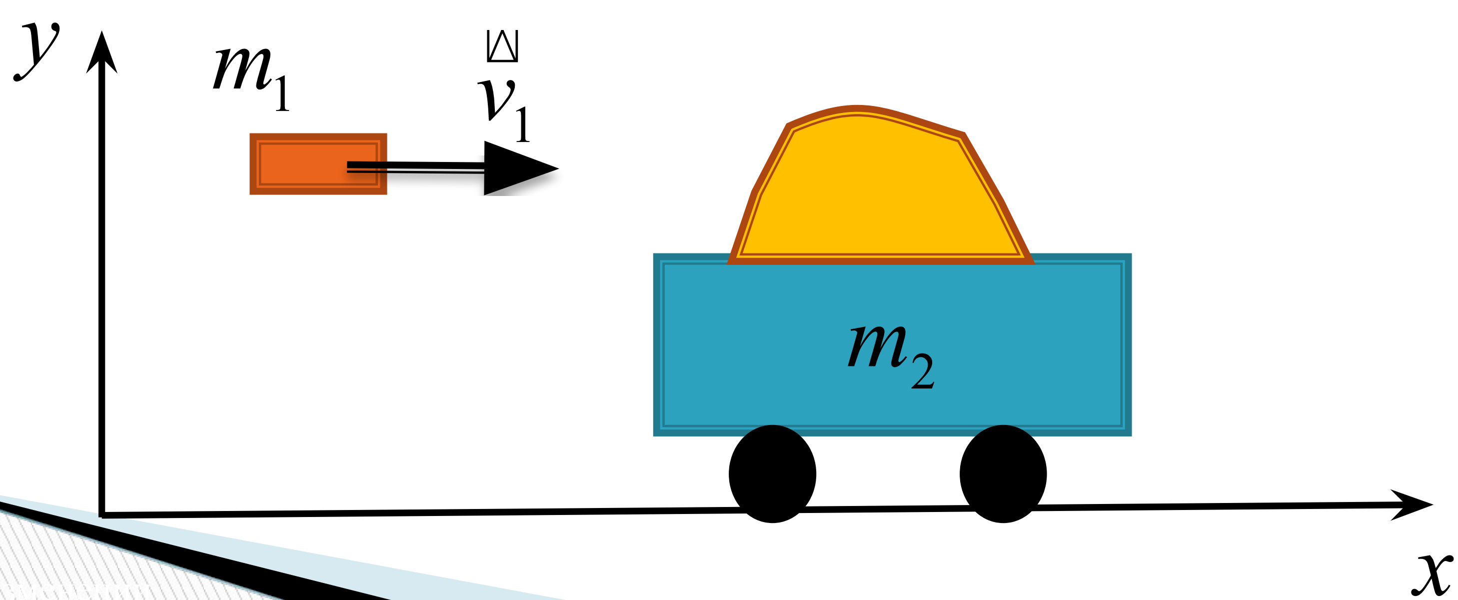
2. Если проекция главного вектора всех внешних сил, приложенных к системе, на некоторую неподвижную ось равна нулю, то проекция импульса системы на эту ось остаётся постоянной.

$$\sum F_{kx}^e = 0 \rightarrow \qquad P_x = const$$

ПРИМЕР

Снаряд массой $m_1 = 100$ кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью $\vec{v}_1 = 500$ м/с, попадает в вагон с песком, масса которого $m_2 = 10$ т, и застревает в нем. Какую скорость и получит вагон,

а) если вагон стоял неподвижно;



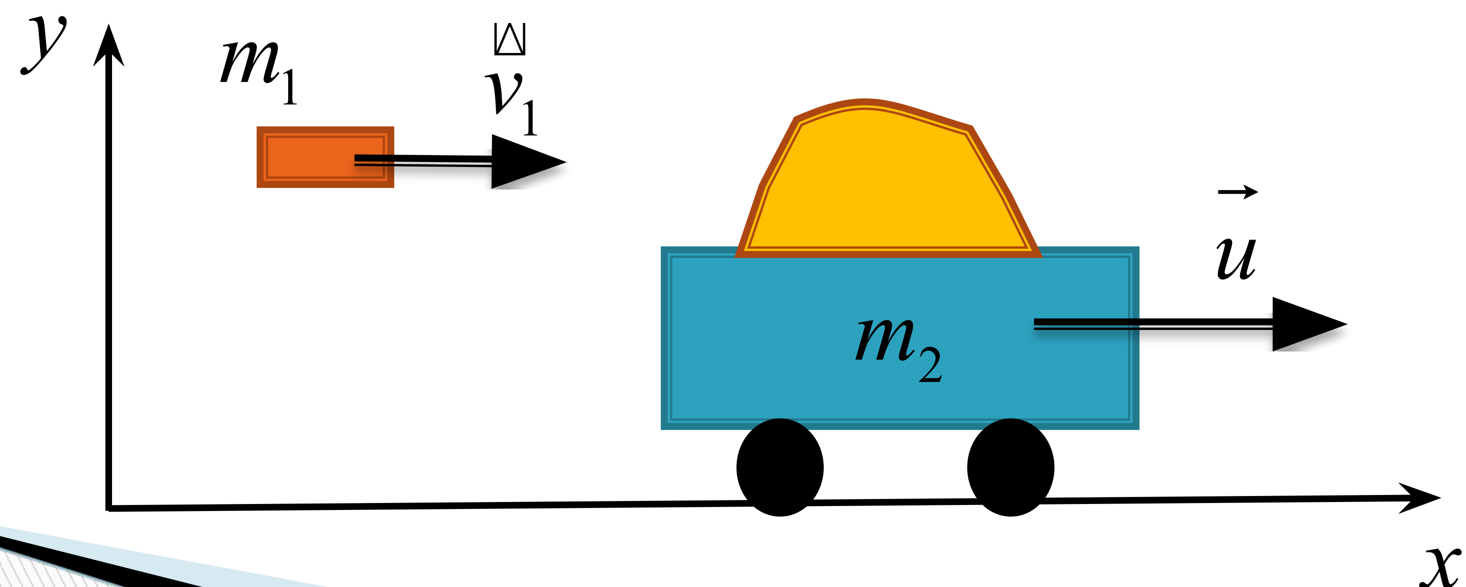
ПРИМЕР

Закон сохранения импульса в данном случае имеет вид

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$$

а) Будем считать удар абсолютно неупругим, тогда в проекции на горизонтальную ось по закону сохранения импульса:

$$u = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = \frac{500 * 100}{10000 + 100} \approx 4{,}95(\textit{м} / \textit{с})$$

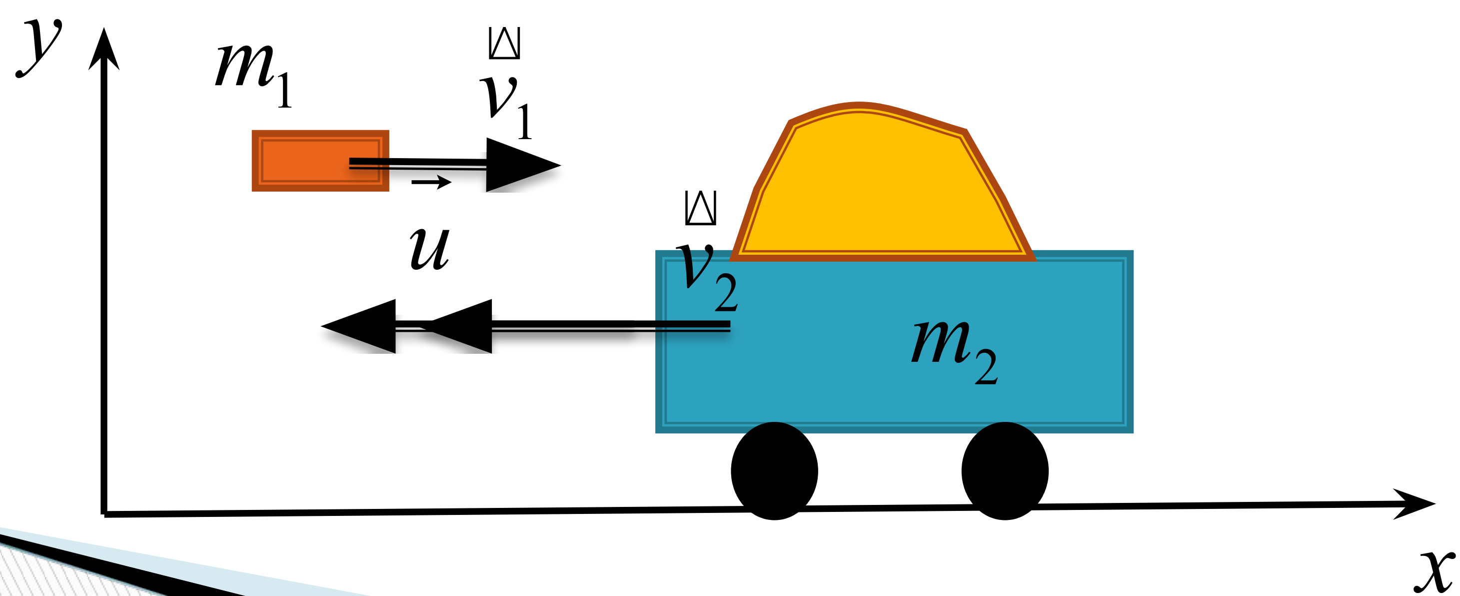


ПРИМЕР

б) вагон двигался со скоростью v2 = 36 км/ч в направлении, противоположном движению снаряда;

Когда снаряд и вагон движутся навстречу друг другу, то их скорости имеют разные знаки. Тогда, в проекции на ось x

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{100 * 500 - 1000 * 10}{10000 + 100} \approx 4{,}95 (м/с)$$

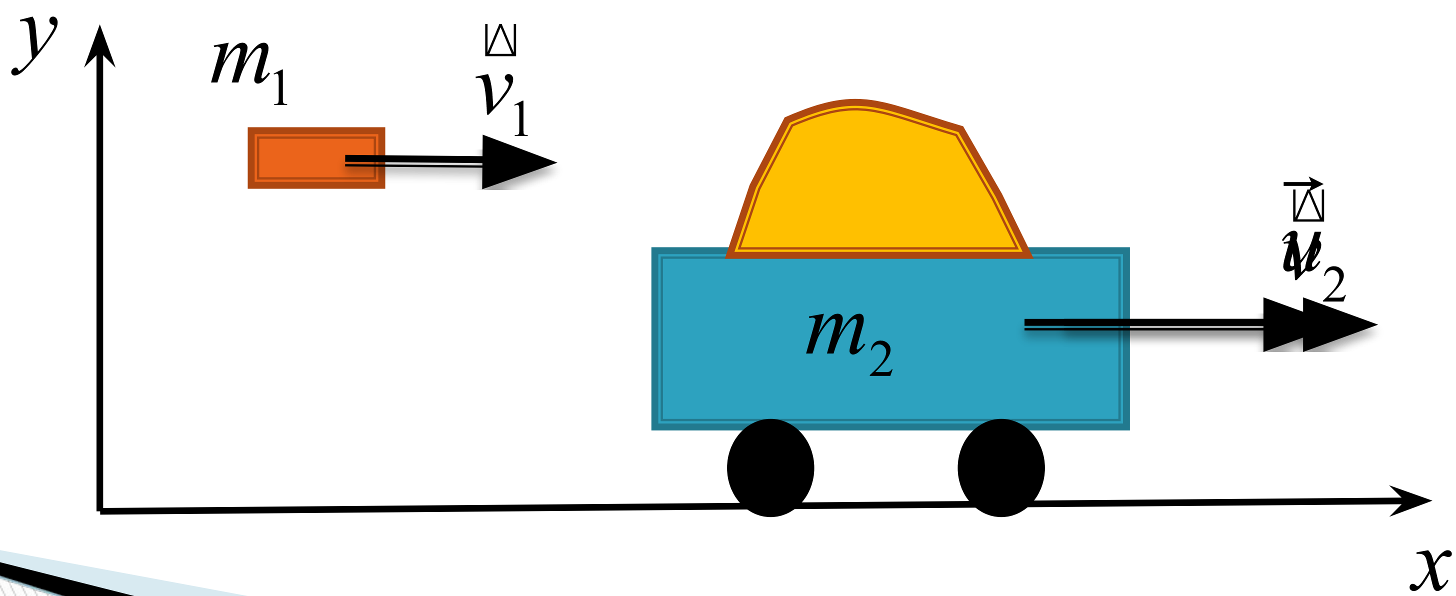


ПРИМЕР

в) вагон двигался со скоростью v2 = 36 км/ч в таком же направлении, что и снаряд.

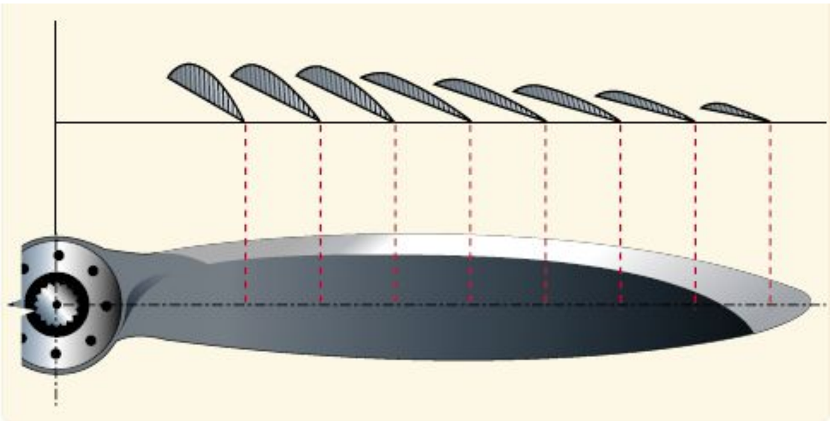
Когда снаряд и вагон движутся в одном направлении, то их скорости имеют одинаковые знаки. Тогда, в проекции на ось *x*

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{100 * 500 + 1000 * 10}{10000 + 100} \approx 14{,}85 (м/с)$$



ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ.

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ТЕОРЕМЫ



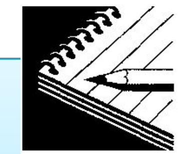
Почему двигается самолет?

От чего оттолкнуться в космосе?

РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ

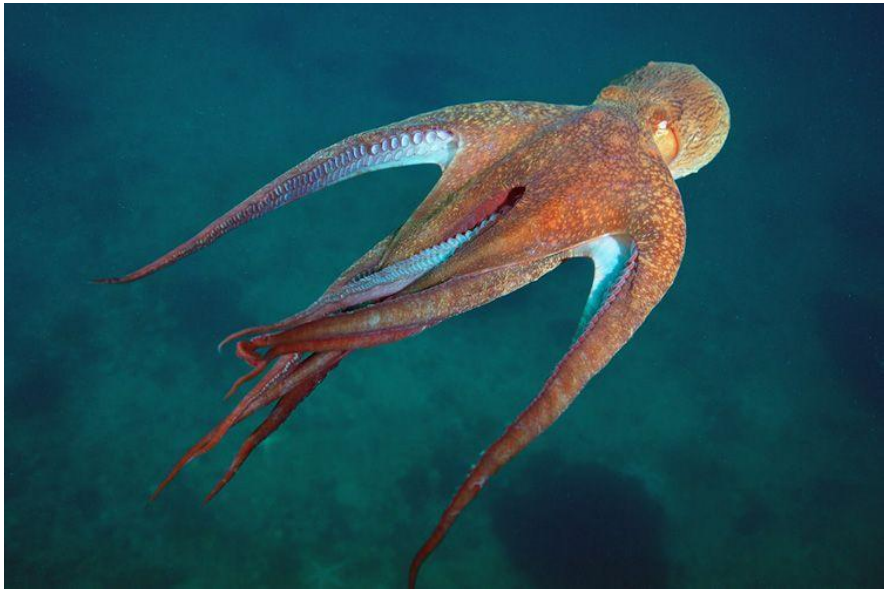
«Земля — это колыбель разума, но нельзя вечно жить в колыбели.»

К.Э.Циолковский

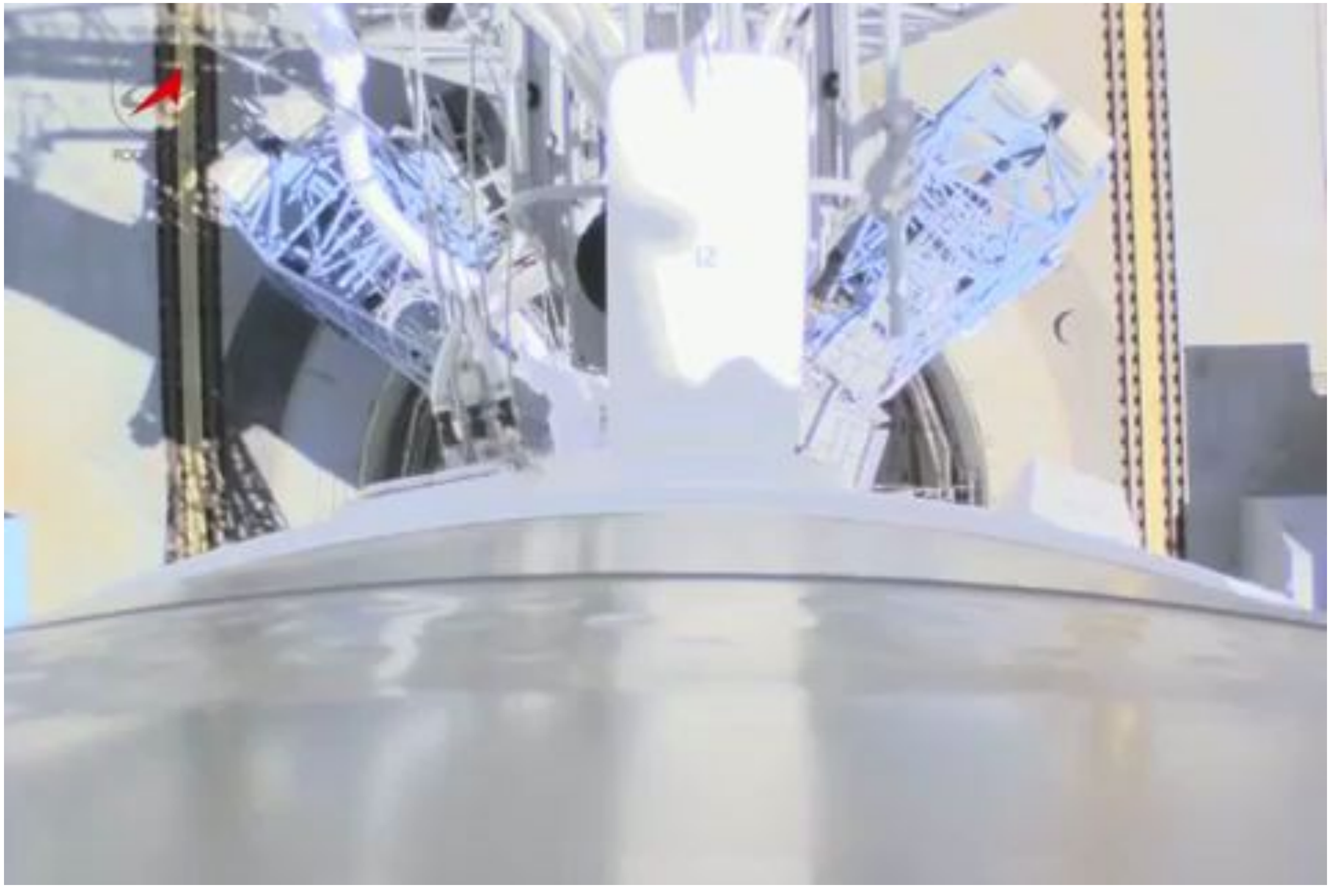


Движение тела, возникающее вследствие отделения от него части его массы с некоторой скоростью, называют реактивным.

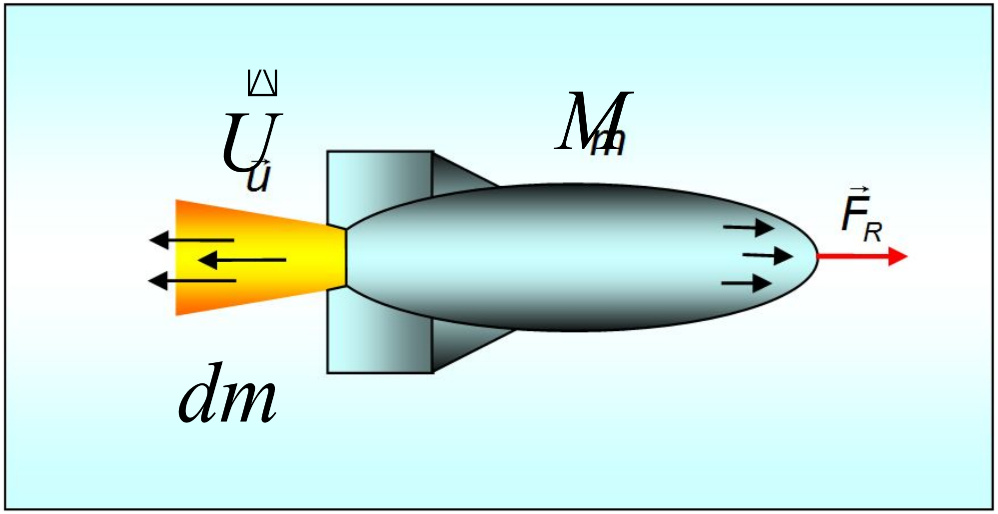
ПРИМЕРЫ РЕАКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ



ЗАПУСК РАКЕТЫ



ДВИЖЕНИЕ РАКЕТЫ



$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

$$d\vec{P} = Md\vec{v} + \vec{U}dm$$

$$d\vec{P} = Md\vec{v} - \vec{U}dM$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{U}\frac{dM}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \vec{U}\frac{dM}{dt}$$

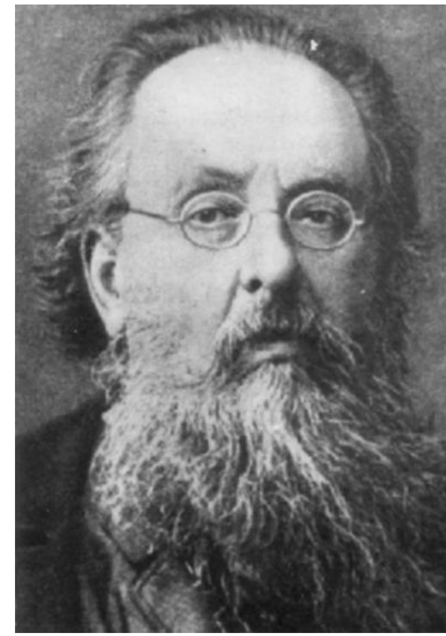
$$\boxed{\vec{F}_R = \vec{U}\frac{dM}{dt}}$$

ФОРМУЛА МЕЩЕРСКОГО

$$\boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \vec{F}_R}$$

$\vec{F}_R$ - реактивная сила

Иван Всеволодович
Мещерский



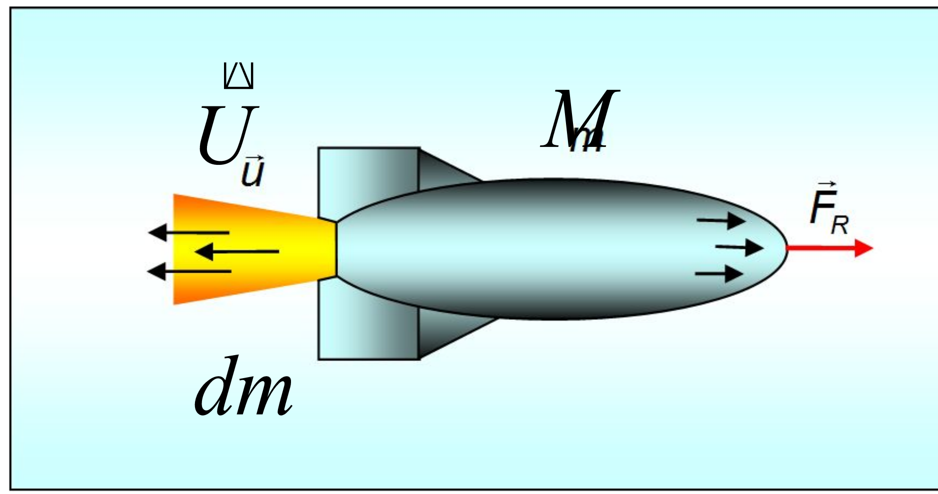
Константин Эдуардович
Циолковский

ФОРМУЛА ЦИОЛКОВСКОГО

$$\boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_R}$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{U}\frac{dM}{dt}=-\vec{U}\left|\frac{dM}{dt}\right|=-\mu\vec{U}$$

$$Mdv=-UdM \qquad dv=-U\frac{dM}{M}$$



$$\int_{v_0}^{v_k}dv=-U\int_{M_0}^{M_K}\frac{dM}{M}$$

$$v_k=v_0-U\left(\ln(M_K)-\ln(M_0)\right)$$

$$\boxed{v_k=v_0-U\ln(M_0/M_K)}$$