

Digital Signal Processing

Лекция 6

Анализ и проектирование цифровых фильтров

- Примеры КИХ- и БИХ-фильтров первого и второго порядков и их применения
- Основные структурные схемы при построении БИХ-фильтров
- Основные структурные схемы при построении КИХ-фильтров
- Эффекты квантования параметров в цифровых фильтрах

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Выше было рассмотрено представление дискретных линейных систем, для которых соотношение между входной и выходной последовательностями определялось разностным уравнением, а передаточная функция – их z -преобразованиями. При этом основное внимание обращалось на характер взаимосвязи между входом и выходом. При построении цифрового фильтра программным путем на универсальной ЦВМ или в виде специализированного устройства эта взаимосвязь между входом и выходом должна быть преобразована в форму алгоритма вычисления. В зависимости от способа построения такой алгоритм будет определяться совокупностями либо основных математических операций, либо элементов схемы. Для построения дискретных систем, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, в качестве основных операций целесообразно выбрать суммирование, задержку и умножение на константу. В этом случае расчетный алгоритм будет определен либо структурой программы, либо схемой устройства, устанавливающими взаимосвязь этих основных операций.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Рассмотрим систему с передаточной функцией

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b(k)z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a(k)z^{-k}}$$

для которой разностное уравнение, определяющее зависимость между входом и выходом, при $a(0)=1$ имеет вид

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k).$$

Это уравнение можно трактовать как расчетный алгоритм, в котором задержанные величины входной и выходной последовательностей умножаются на коэффициенты $b(k)$ и $a(k)$ соответственно и результаты умножения суммируются. В дальнейшем будет показано, что существует очень много структур, которые в результате будут давать одну и ту же зависимость между входными $x(n)$ и выходными $y(n)$ выборками. Следует однако учитывать, что две структуры могут быть эквивалентны (по отношению к характеристике взаимосвязи между входом и выходом) в случае, когда точность представления коэффициентов и переменных в фильтре неограничена, и они могут иметь существенно различные характеристики, когда указанная точность ограничена. С этой точки зрения одни структуры оказываются предпочтительнее других. Прежде чем обсуждать этот круг вопросов, рассмотрим несколько примеров фильтров первого и второго порядков с анализом их характеристик.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Примеры КИХ- и БИХ-фильтров первого и второго порядков и их применения

КИХ-фильтры первого и второго порядков.

Простейший КИХ-фильтр имеет передаточную функцию:

$$H(z) = b(0) + b(1)z^{-1}$$

частотную характеристику:

$$H(e^{j\omega}) = b(0) + b(1)e^{-j\omega}$$

и разностное уравнение, связывающее выход и вход:

$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1)$$

Импульсная характеристика такого фильтра имеет только два ненулевых отсчета:

$$h(n) = b(0)\delta(n) + b(1)\delta(n-1)$$

1). Выберем параметры $b(0)=1$, $b(1)=-1$, тогда передаточная функция будет:

$$H(z) = 1 - z^{-1}$$

с нулем в точке $z_1=1$, а частотная характеристика примет вид:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega} = 2je^{-j\omega/2} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{2j} = 2je^{-j\omega/2} \sin(\omega/2) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

где $|H(e^{j\omega})| = 2|\sin(\omega/2)|$ - АЧХ фильтра,

$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}$, ($0 \leq \omega \leq 2\pi$) - ФЧХ фильтра.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

На рис.1 представлена структурная схема фильтра, соответствующая его разностному уравнению: $y(n] = x(n] - x(n - 1]$, и содержащая элемент задержки на отсчет, обозначенный оператором z^{-1} , умножитель на константу (-1) , обозначенный стрелкой, и сумматор.

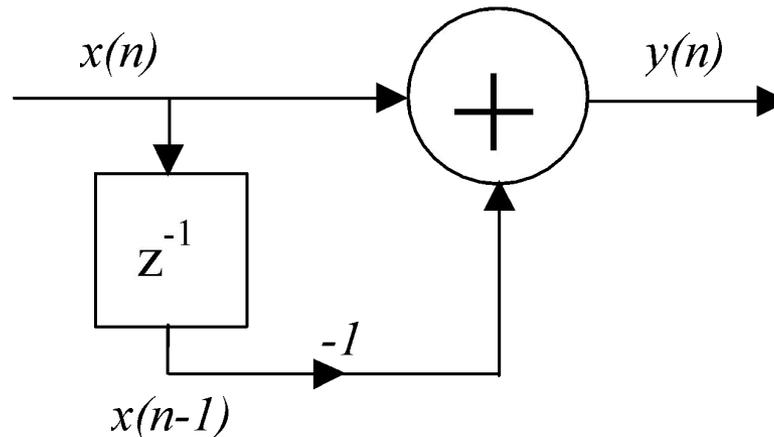


Рисунок 1. Структурная схема КИХ-фильтра.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

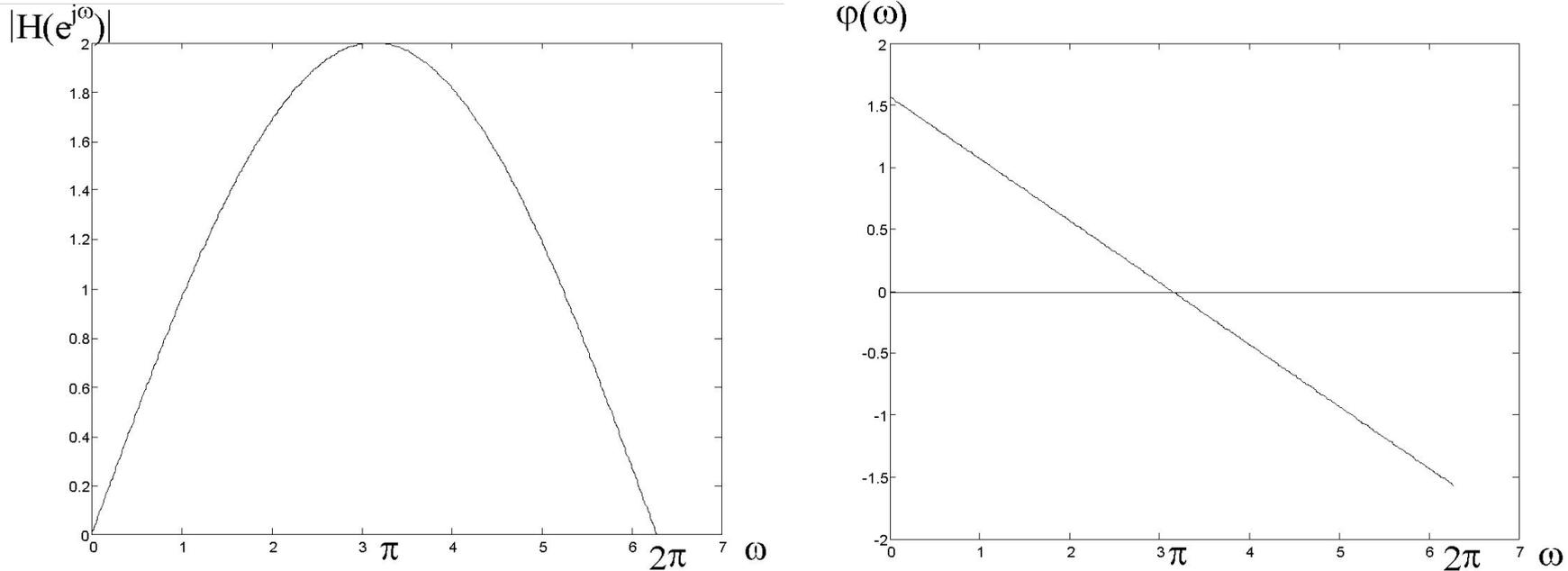


Рисунок 2. АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра.

На рис.2 представлены графически АЧХ и ФЧХ фильтра для диапазона частот ($0 \leq \omega \leq 2\pi$). Такой фильтр носит название **череспериодного вычитателя (ЧПВ)** и широко применяется в радиолокации в устройствах селекции движущихся целей (СДЦ) для борьбы с помехами, образованными отражениями от земли и местных предметов, спектр которых локализован в окрестности нулевой частоты. При этом спектр полезного сигнала, образованного отражением от движущейся цели, будет локализован в окрестности доплеровской частоты, и пропускается на выход фильтра, а спектр помехи существенно подавляется (**режектируется**).

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Лучшее подавление помех от местных предметов обеспечивает каскадное включение двух таких фильтров 1-го порядка, которое эквивалентно КИХ-фильтру 2-го порядка с передаточной функцией: $H(z) = 0,5 - z^{-1} + 0,5z^{-2}$ и АЧХ: $|H(e^{j\omega})| = 2 \sin^2(\omega/2)$.

Структурная схема такого фильтра, соответствующая разностному уравнению:

$$y(n] = 0,5x(n) - x(n - 1) + 0,5x(n - 2)$$

представлена на рис.3а. На рис.3б отображен график АЧХ фильтра для диапазона частот ($0 \leq \omega \leq 2\pi$).

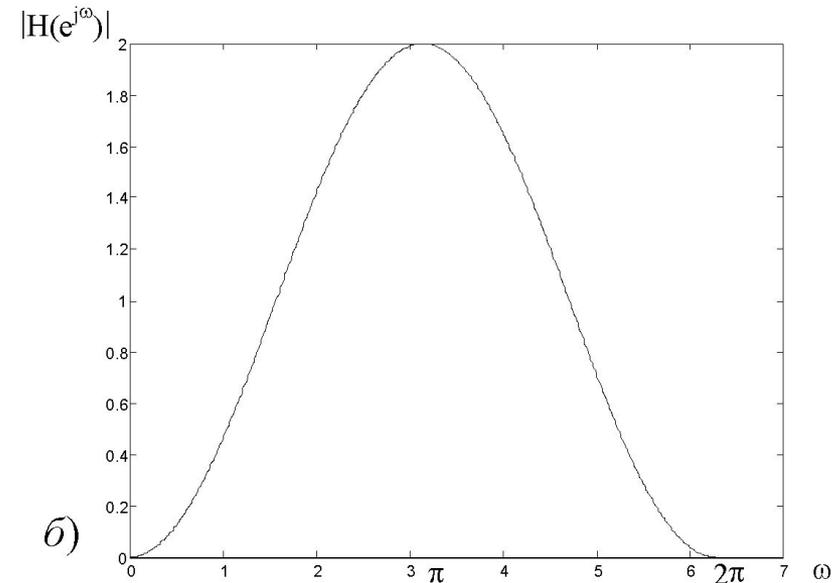
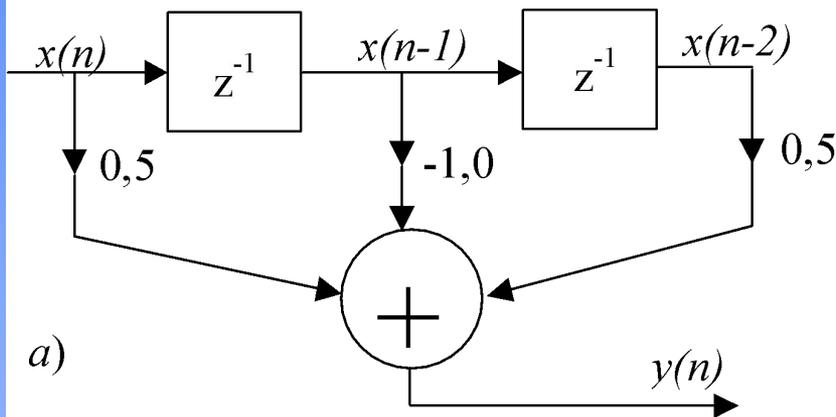


Рисунок 3. Структурная схема (а) и АЧХ (б) фильтра.

Заметим, что фильтр, описываемый уравнением $y(n] = x(n] - x(n - 1]$, может считаться аналогом *дифференцирующего фильтра* для медленных процессов.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

2). Выберем теперь параметры КИХ-фильтра $b(0)=1$, $b(1)=-e^{j\omega_0}$, тогда передаточная функция будет равна:

$$H(z) = 1 - e^{j\omega_0} z^{-1}$$

с нулем в точке $z_1 = e^{j\omega_0}$, а частотная характеристика примет вид:

$$H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j(\omega - \omega_0)} = 2je^{-j(\omega - \omega_0)/2} \sin[(\omega - \omega_0)/2] = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

и, следовательно, АЧХ фильтра:

$$|H(e^{j\omega})| = 2|\sin[(\omega - \omega_0)/2]|$$

а ФЧХ фильтра:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega - \omega_0}{2}$$

Такой фильтр может подавлять помехи, спектр которых сосредоточен в окрестности частоты ω_0 , что, в частности, имеет место для радиолокационных отражений от местных предметов с учетом скорости ветра. На рис.4.4 представлена графически АЧХ фильтра ($\omega_0=\pi/4$) для диапазона частот ($0 \leq \omega \leq 2\pi$).

Анализ и проектирование цифровых фильтров

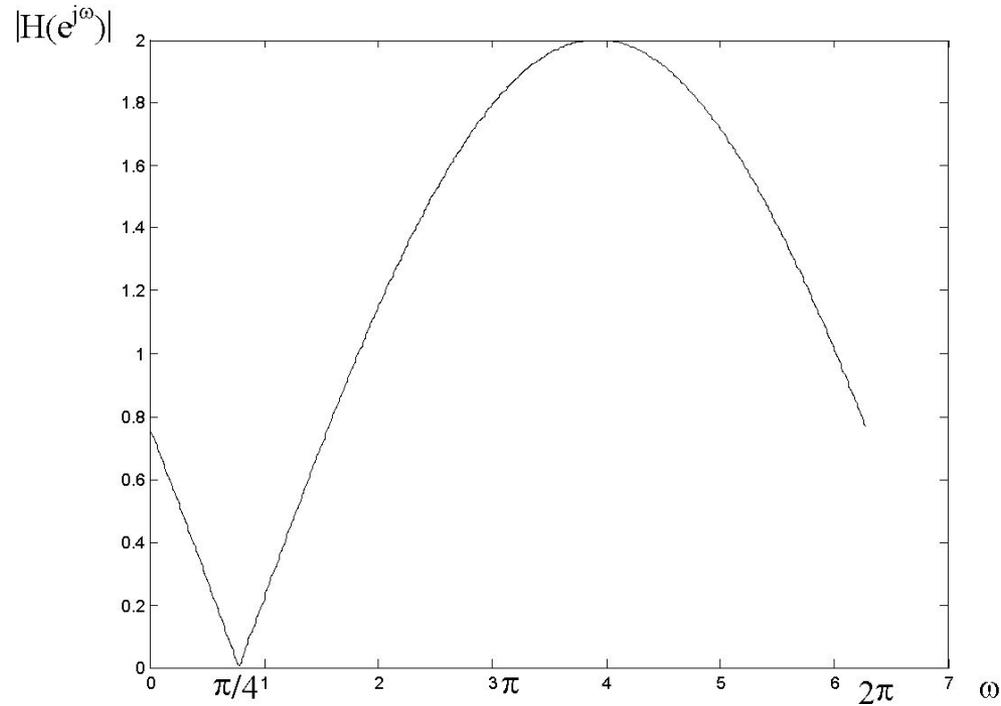


Рисунок 4. АЧХ комплексного КИХ-фильтра ($\omega_0 = \pi/4$).

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Рассмотрим структуру фильтра, описываемого уравнением

$$y(n) = x(n) + b(1)x(n-1)$$

с комплексным коэффициентом $b(1)$. Подставляя в уравнение фильтра комплексные формы сигналов и коэффициента:

$$x(n) = x_c(n) + jx_s(n), \quad y(n) = y_c(n) + jy_s(n), \quad b(1) = b_c(1) + jb_s(1)$$

получим:

$$\begin{aligned} y_c(n) + jy_s(n) &= [x_c(n) + jx_s(n)] + [b_c(1) + jb_s(1)][x_c(n-1) + jx_s(n-1)] = \\ &= x_c(n) + b_c(1)x_c(n-1) - b_s(1)x_s(n-1) + j[x_s(n) + b_c(1)x_s(n-1) + b_s(1)x_c(n-1)]. \end{aligned}$$

Приравнявая порознь действительные и мнимые части, получим эквивалентную систему действительных уравнений:

$$\begin{aligned} y_c(n) &= x_c(n) + b_c(1)x_c(n-1) - b_s(1)x_s(n-1); \\ y_s(n) &= x_s(n) + b_c(1)x_s(n-1) + b_s(1)x_c(n-1). \end{aligned}$$

Структурная схема КИХ-фильтра с комплексным коэффициентом представлена на рис.5.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

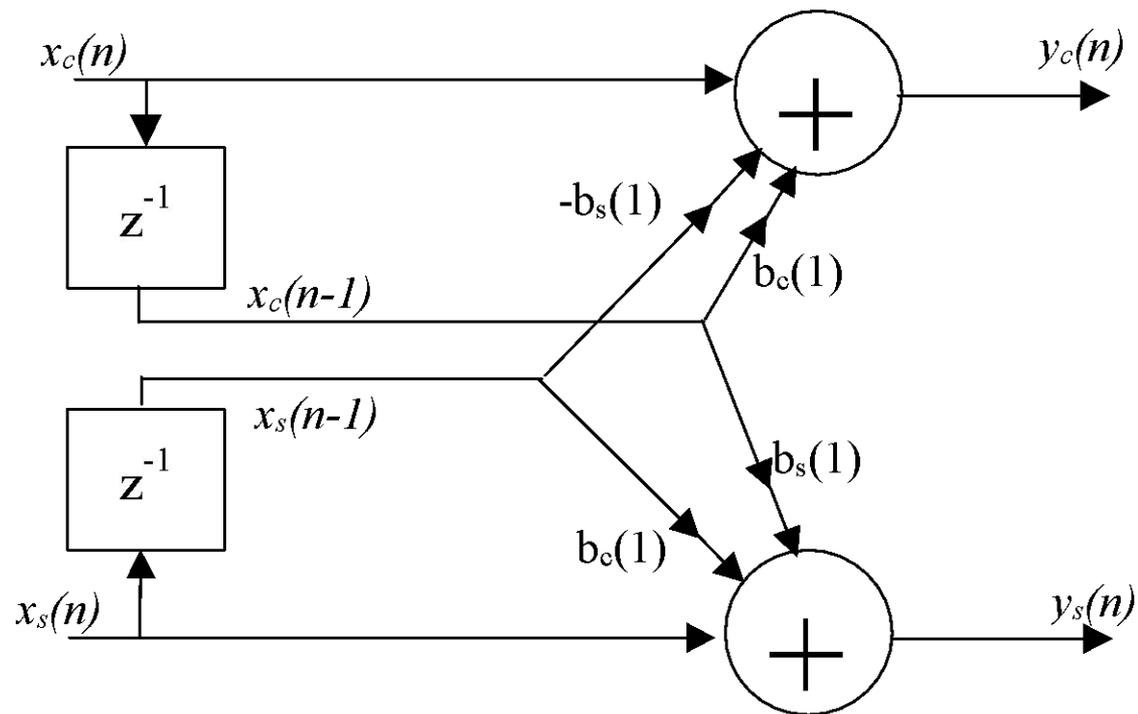


Рисунок 5. Структурная схема КИХ-фильтра с комплексным коэффициентом.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

БИХ-фильтры первого и второго порядков.

Простейший БИХ-фильтр первого порядка имеет передаточную функцию:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a(1)z^{-1}},$$

которая имеет один полюс при $p_1 = -a(1)$. Для устойчивости необходимо, чтобы $|a(1)| < 1$. Разностное уравнение фильтра:

$$y(n] = -a(1)y(n-1) + x(n),$$

а импульсная характеристика:

$$h(n) = [-a(1)]^n u(n).$$

Структурная схема БИХ-фильтра представлена на рис.6.

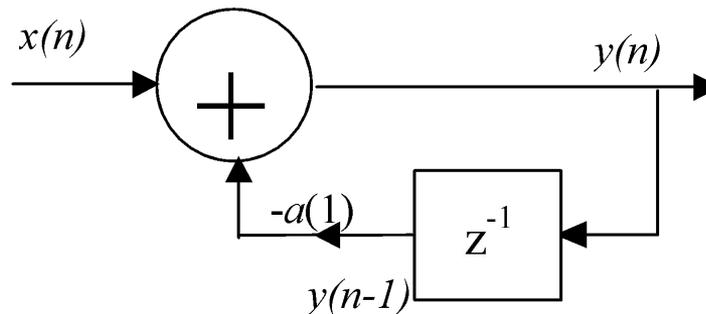


Рисунок 6. Структурная схема БИХ-фильтра первого порядка.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Рассмотрим частные случаи.

1). Пусть действительный коэффициент $a(1) = -r$, ($1 > r > 0$), тогда $H(z) = \frac{1}{1 - rz^{-1}}$

с одним полюсом при $p_1 = r$. Импульсная характеристика будет равна:

$$h(n) = r^n u(n).$$

Частотная характеристика примет вид:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - re^{-j\omega}} = \frac{1}{1 - r \cos \omega + jr \sin \omega} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

и, следовательно, АЧХ фильтра:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \omega}},$$

а ФЧХ фильтра:

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{r \sin \omega}{1 - r \cos \omega}\right).$$

Анализ и проектирование цифровых фильтров

На рис.7 представлены графики АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра первого порядка с действительным коэффициентом ($r=0,7$) для диапазона частот ($0 \leq \omega \leq 2\pi$).

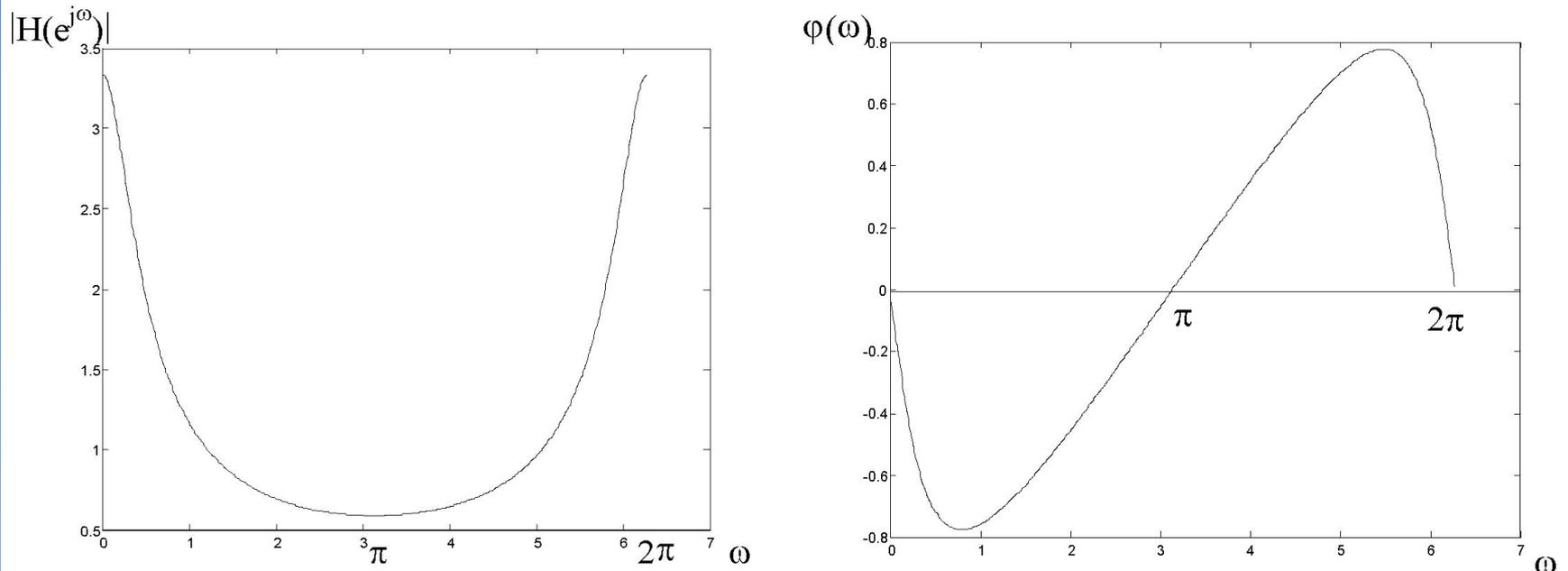


Рисунок 7. АЧХ и ФЧХ БИХ-фильтра первого порядка с действительным коэффициентом ($r=0,7$).

Анализ и проектирование цифровых фильтров

При ω близкой к нулю $\cos \omega \cong 1 - \omega^2 / 2$, поэтому АЧХ может быть описана соотношением:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| \cong \frac{1}{\sqrt{(1-2r+r^2)+r\omega^2}} = \frac{1/(1-r)}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{r}}{1-r}\right)^2 \omega^2}},$$

которое эквивалентно АЧХ *аналогового RC-интегратора* – фильтра нижних частот с постоянной времени

$$\tau = RC = \frac{T\sqrt{r}}{1-r}.$$

Такой фильтр можно использовать для выделения медленных сигналов, наблюдаемых на фоне широкополосных помех. В радиолокации такой фильтр, называемый *рециркулятором*, используется для последетекторного накопления отсчетов с экспоненциальным весом:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)r^k = x(n) + rx(n-1) + r^2x(n-2) + \dots$$

Анализ и проектирование цифровых фильтров

2). Пусть комплексный коэффициент $a(1) = -re^{j\omega_0}$, тогда $H(z) = \frac{1}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}}$

с одним полюсом при $p_1 = re^{j\omega_0}$ будет соответствовать передаточной функции так называемого **комплексного резонатора**. Импульсная характеристика будет равна:

$$h(n) = r^n e^{j\omega_0 n} u(n)$$

и представляет собой затухающую комплексную экспоненту с частотой ω_0 (резонансная частота). Параметр r определяет полосу пропускания (затухание) резонатора.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - re^{-j(\omega - \omega_0)}} = \frac{1}{1 - r \cos(\omega - \omega_0) + jr \sin(\omega - \omega_0)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

и, следовательно, АЧХ фильтра:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\omega - \omega_0)}},$$

а ФЧХ фильтра:

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \left(\frac{r \sin(\omega - \omega_0)}{1 - r \cos(\omega - \omega_0)} \right).$$

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Таким образом, частотная характеристика БИХ-фильтра с комплексным коэффициентом по отношению к частотной характеристике рециркулятора будет смещена по оси частот на величину ω_0 . На рис.8 представлен график АЧХ БИХ-фильтра первого порядка с комплексным коэффициентом $a(1) = -0,7e^{j\pi/4}$ и $a(1) = -0,9e^{j\pi/4}$ для диапазона частот $(0 \leq \omega \leq 2\pi)$.

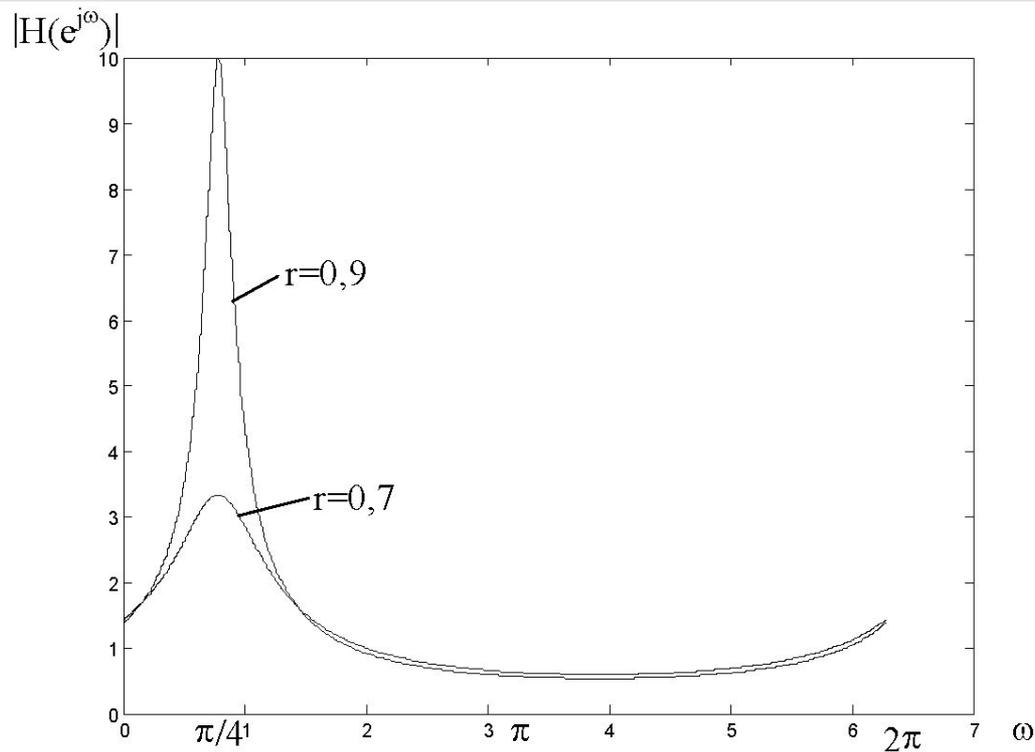


Рисунок 8. АЧХ БИХ-фильтра первого порядка с комплексным коэффициентом $a(1) = -0,7e^{j\pi/4}$ и $a(1) = -0,9e^{j\pi/4}$

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Комплексный резонатор реализует *когерентное* (т.е. с компенсацией фазового сдвига) накопление отсчетов комплексного входного сигнала $x(n) = s(n)e^{j\omega_0 n}$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=0}^{\infty} s(n-k)e^{j\omega_0(n-k)} r^k e^{j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega_0 k} e^{j\omega_0 k} s(n-k)r^k = \\ &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=0}^{\infty} s(n-k)r^k. \end{aligned}$$

Такие фильтры применяются для построения цифровых спектроанализаторов, в РЛС -для реализации когерентного накопления отсчетов.

Аналоговый прототип комплексного резонатора – колебательный контур.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Комплексный резонатор первого порядка эквивалентен двум действительным БИХ-фильтрам первого порядка, уравнения которых можно получить, подставляя в уравнение фильтра комплексные представления входного и выходного сигналов

$$x(n) = x_c(n) + jx_s(n), \quad y(n) = y_c(n) + jy_s(n)$$

и коэффициента $a(1) = a_c(1) + ja_s(1)$:

$$\begin{aligned} y_c(n) + jy_s(n) &= [x_c(n) + jx_s(n)] - [a_c(1) + ja_s(1)][y_c(n-1) + jy_s(n-1)] = \\ &= x_c(n) - a_c(1)y_c(n-1) + a_s(1)y_s(n-1) + j[x_s(n) - a_c(1)y_s(n-1) - a_s(1)y_c(n-1)]. \end{aligned}$$

Приравнивая порознь действительные и мнимые части, получим эквивалентную систему действительных уравнений:

$$\begin{aligned} y_c(n) &= x_c(n) - a_c(1)y_c(n-1) + a_s(1)y_s(n-1); \\ y_s(n) &= x_s(n) - a_c(1)y_s(n-1) - a_s(1)y_c(n-1). \end{aligned}$$

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Структурная схема комплексного резонатора представлена на рис.9.

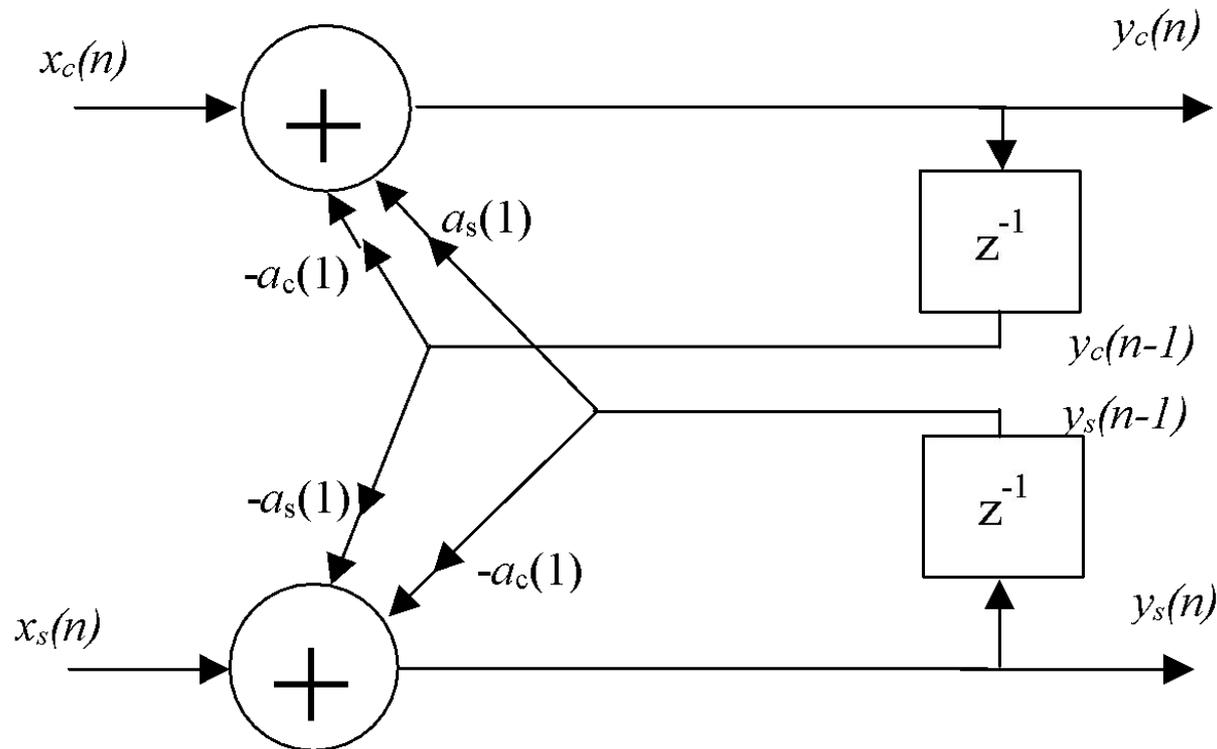


Рисунок 9. Структурная схема комплексного резонатора.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

3). Рассмотрим действительный БИХ-фильтр второго порядка, передаточная функция которого имеет два комплексно сопряженных полюса:

$$p_1 = re^{j\omega_0}, \quad p_1^* = re^{-j\omega_0}$$

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - re^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - re^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] = \frac{1 - (r \cos \omega_0) z^{-1}}{1 - 2(r \cos \omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \frac{1 + b(1)z^{-1}}{1 + a(1)z^{-1} + a(2)z^{-2}}$$

Передаточная функция имеет и один нуль $z_1 = r \cos \omega_0$, положение которого жестко связано с положением полюсов. Разностное уравнение фильтра имеет вид:

$$y(n) = -a(1)y(n-1) - a(2)y(n-2) + x(n) + b(1)x(n-1)$$

АЧХ такого *действительного резонатора* образуется совокупностью АЧХ двух комплексных резонаторов с резонансными частотами ω_0 и $(-\omega_0)$ для диапазона частот $(-\pi \leq \omega \leq \pi)$.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

На рис.10а представлен один из вариантов структурной схемы действительного резонатора, а на рис.10б - график его АЧХ при $r=0.95$ и $\omega_0=\pi/2$.

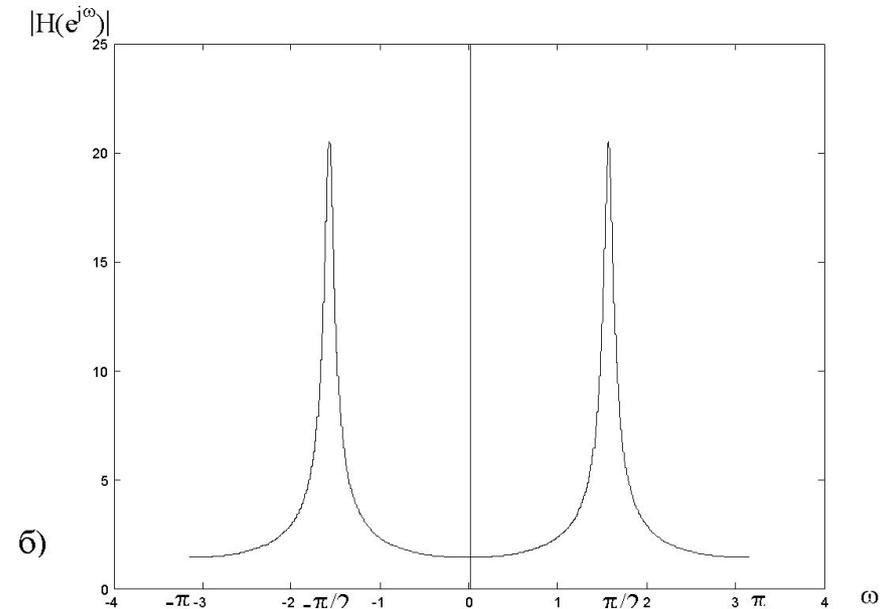
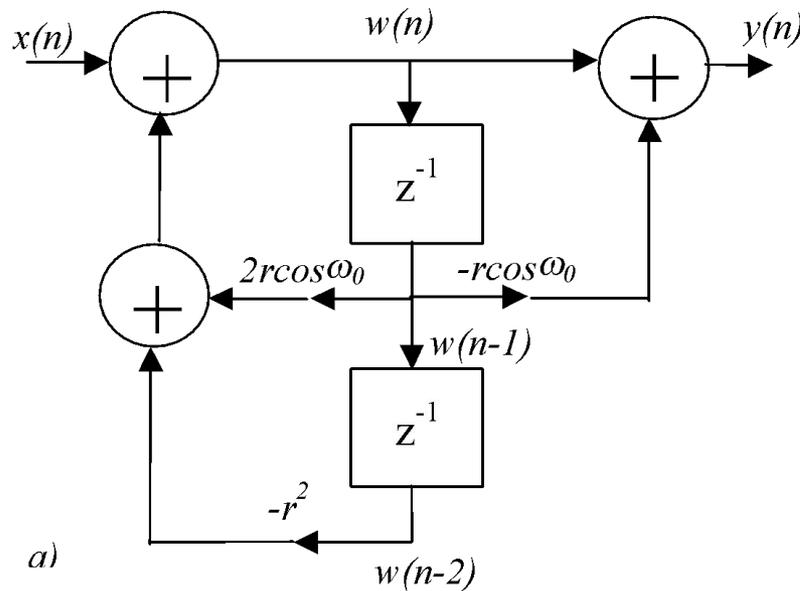


Рисунок 10. Структурная схема (а) и АЧХ действительного резонатора при $r=0.95$ и $\omega_0=\pi/2$ (б).

Основные структурные схемы при построении БИХ-фильтров

Для построения цифрового фильтра необходимо иметь предшествовавшие значения выходной, входной и промежуточной последовательностей. Это подразумевает необходимость задержки или запоминания этих величин. Наряду с этим следует обеспечить умножение задержанных выборок на коэффициенты и суммирование полученных результатов. Как отмечалось, цифровой фильтр может быть построен либо на базе регистров памяти, арифметического устройства и устройства управления универсальной ЦВМ, либо в виде специализированного цифрового устройства. В первом случае структура фильтра может рассматриваться как детализация расчетного алгоритма, на основе которого строится программа для ЦВМ. Во втором случае ее удобно представлять в виде конкретной схемы специализированного устройства.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

В результате анализа представления линейных дискретных систем с постоянными параметрами, показано, что каждой рациональной передаточной функции соответствует большое количество форм построения цепи. Естественно, что одним из важных соображений при выборе форм построения систем является вычислительная сложность. Это значит, что цепи с наименьшим количеством умножителей на константу и наименьшим числом ветвей задержки часто наиболее желательны, так как умножение является операцией продолжительной по времени и для каждого элемента задержки подразумевается использование регистра памяти. Следовательно, уменьшение количества умножителей означает увеличение быстродействия, а уменьшение числа элементов задержки — снижение требований к памяти. С другой стороны, необходима учитывать, что эффекты конечной длины регистров при построении цифровых фильтров в виде специализированных устройств зависят от структуры последних. Поэтому иногда целесообразнее использовать те структуры, которые, хотя и не имеют минимального количества умножителей и элементов задержки, однако оказываются менее чувствительными к эффектам конечной длины регистров. Таким образом, важно обсудить некоторые из наиболее распространенных форм построения цепей. Рассмотрим сначала БИХ-фильтры.

Прямая форма

Напомним, что если рассматривается рациональная передаточная функция вида

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (4.1)$$

то соотношение между входом и выходом такой системы удовлетворяет разностному уравнению

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a(k)y(n-k) + \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k). \quad (4.2)$$

Поскольку это разностное уравнение может быть записано непосредственно из выражения для передаточной функции, то форму построения цепи, соответствующей разностному уравнению, называют *прямой формой 1*. Простая структура реализации данного разностного уравнения показана на рис.11.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

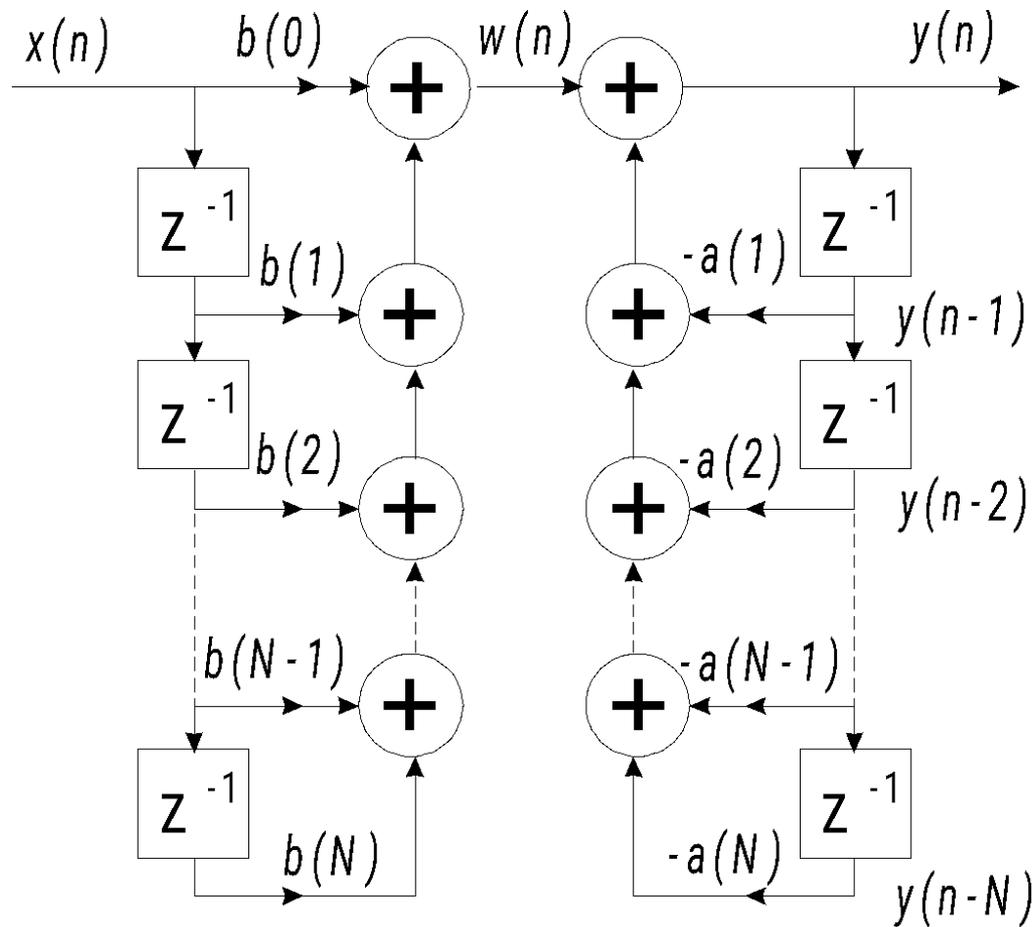


Рисунок 11. Прямая форма 1 реализации разностного уравнения N -го порядка.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

При построении цепи для простоты принято, что $M=N$. Если это не выполняется, то некоторые из ветвей имеют нулевую передачу. На рис.11 показан такой способ построения, при котором каждый сумматор имеет не больше двух входов. Несмотря на то, что эта условность приводит к большему числу сумматоров, чем необходимо, она согласуется с тем фактом, что при построении цифровых фильтров (как программным путем на ЦВМ, так и в виде специализированных устройств) операция суммирования нескольких чисел (больше двух) осуществляется на основе формирования отдельных сумм пар чисел. В цифровой аппаратуре в отдельный момент времени, как правило, суммируются только два числа. Поскольку совокупности коэффициентов $b(k)$ и $a(k)$ соответствуют полиномам числителя $B(z)$ и знаменателя $A(z)$ передаточной функции $H(z)$, то структуру, показанную на рис.11, можно трактовать как каскадное соединение двух цепей. Первая из них реализует нули и имеет передаточную функцию $B(z)$, а вторая — полюсы системы и имеет передаточную функцию $1/A(z)$. Обозначив выходной сигнал первой системы $w(n)$, разностное уравнение можно заменить системой уравнений:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a(k)y(n-k) + w(n);$$

$$w(n) = \sum_{k=0}^M b(k)x(n-k).$$

которая и реализована структурой, показанной на рис. 11.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

В линейных дискретных системах с постоянными параметрами общее соотношение между входом и выходом не зависит от порядка каскадного соединения блоков. Из этого свойства вытекает вторая прямая форма построения цепи. А именно, если сначала реализовать полюсы $H(z)$ соответственно правой части структурной схемы рис.11, которая имеет передаточную функцию $1/A(z)$, а затем — нули передаточной функцией $B(z)$, то получим структуру, показанную на рис.12, которая соответствует системе уравнений:

$$w(n) = -\sum_{k=1}^N a(k)w(n-k) + x(n);$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b(k)w(n-k).$$

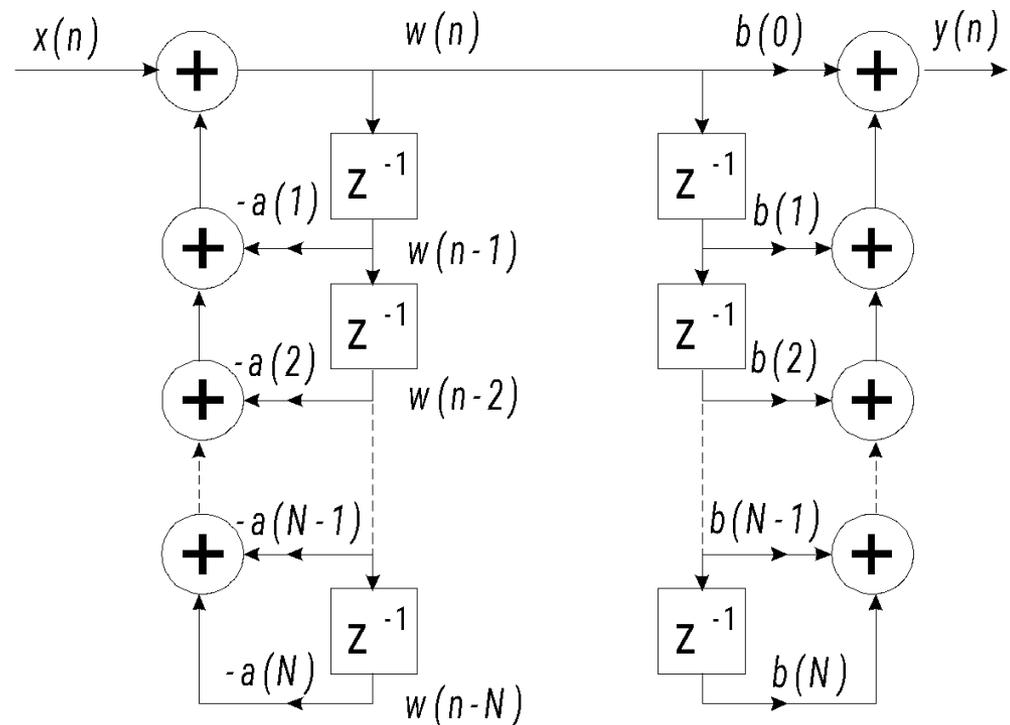


Рисунок 12. Прямая форма 2 (неканоническая).

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Поскольку в такой схеме имеется два ряда ветвей задержки для одного и того же входа, то можно обойтись одним из них. Таким образом, цепь рис.12 может быть видоизменена так, как показано на рис.13. Она часто носит название *прямой формы 2*. Следует отметить, что такая цепь имеет минимальное количество элементов задержки (большее из M или N). Такие структуры часто называют *канонической формой цепи*.

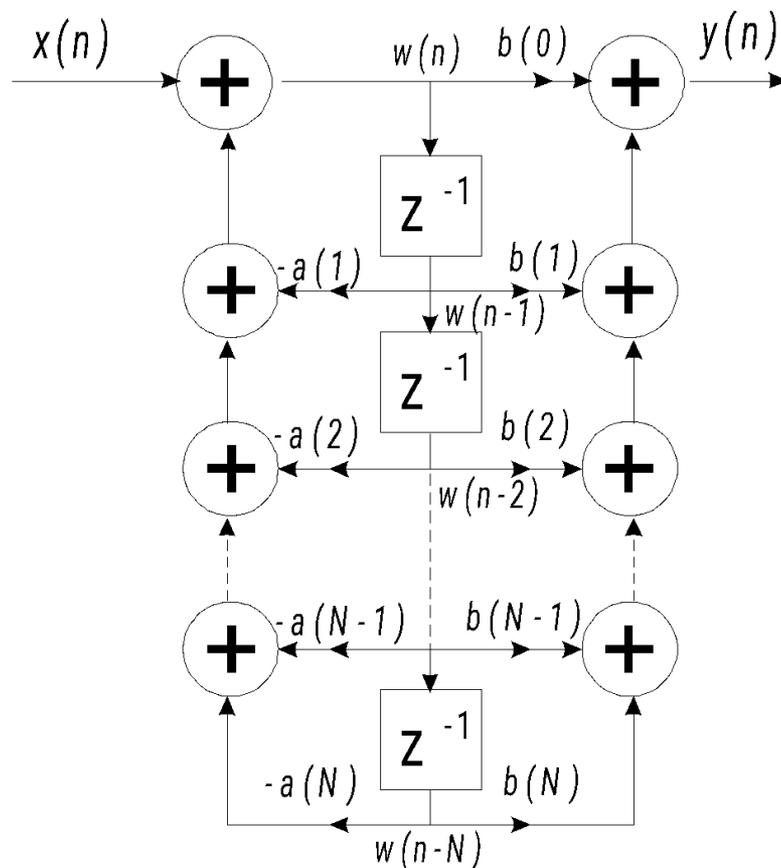


Рисунок 13. Прямая форма 2 (каноническая).

Каскадная форма

Рассмотренная ранее прямая форма построения цепи следовала непосредственно из выражения для ее передаточной функции $H(z)$ вида (4.1). Если в выражении для передаточной функции числитель и знаменатель разложить на произведение линейных или квадратичных множителей, то $H(z)$ можно представить как

$$H(z) = A \frac{\prod_{m=1}^{M_1} (1 - z_m z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}{\prod_{m=1}^{N_1} (1 - p_m z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})}, \quad (4.3)$$

где $M=M_1+2M_2$ и $N=N_1+2N_2$. В этом выражении множители первого порядка представляют действительные нули в точке z_m и действительные полюсы в точке p_m , а множители второго порядка представляют комплексно-сопряженные нули в точках z_k и z_k^* и комплексно-сопряженные полюсы в точках p_k и p_k^* . Этот случай представляет наиболее общее распределение полюсов и нулей, когда все коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ в (4.1) являются действительными.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

$$H(z) = A \frac{\prod_{m=1}^{M_1} (1 - z_m z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}{\prod_{m=1}^{N_1} (1 - p_m z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})}, \quad (4.3)$$

Соотношение (4.3) предполагает множество структур, образованных каскадным соединением блоков первого и второго порядков (рис.14):

$$H(z) = \prod_m H_{1m}(z) \prod_k H_{2k}(z), \quad (4.4)$$

где блоки первого порядка с передаточной функцией

$$H_{1m}(z) = \frac{1 - z_m z^{-1}}{1 - p_m z^{-1}} = \frac{1 + b_m(1)z^{-1}}{1 + a_m(1)z^{-1}}$$

а блоки второго порядка с передаточной функцией

$$H_{2k}(z) = \frac{(1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})}{(1 - p_k z^{-1})(1 - p_k^* z^{-1})} = \frac{1 + b_k(1)z^{-1} + b_k(2)z^{-2}}{1 + a_k(1)z^{-1} + a_k(2)z^{-2}}.$$

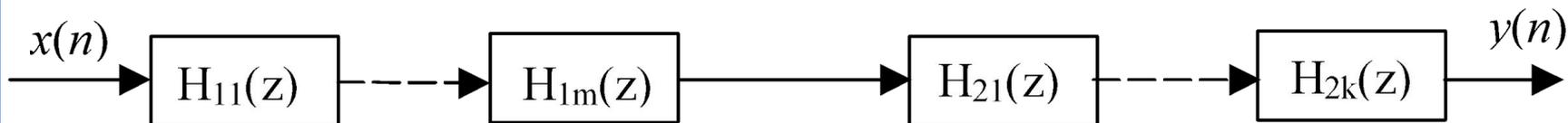


Рисунок 14. Каскадное соединение блоков первого и второго порядков.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Вполне очевидно, что существует значительная свобода в выборе как формы построения блоков, так и последовательности их расположения. На практике, однако, важно выполнить каскадное построение при минимальном объеме памяти, поэтому аппаратура часто строится с использованием разделения времени или мультиплексирования блоков только второго порядка. Этот подход удобно в общем случае рассмотреть на примере каскадной формы построения цепи, когда передаточная функция имеет вид

$$H(z) = A \prod_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2} \right]} \frac{1 + b_k(1)z^{-1} + b_k(2)z^{-2}}{1 + a_k(1)z^{-1} + a_k(2)z^{-2}},$$

где $\left[(N+1)/2 \right]$ — наибольшее целое число, содержащееся в $(N+1)/2$ (считается $M \leq N$). Используемая форма записи выражения для $H(z)$ предполагает попарное объединение действительных полюсов и нулей. При этом, если число действительных нулей нечетное, то один из коэффициентов $b_k(2)$ равен нулю. Аналогично, если число действительных полюсов нечетное, то один из коэффициентов $a_k(2)$ равен нулю. Проведенное обсуждение построения структурных схем в прямой форме показало, что можно создать каскадную структуру с минимальной памятью, если каждый блок второго порядка выполнить в прямой форме 2.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Структурная схема блока второго порядка в прямой форме 2 представлена на рис.15, а система уравнений, описывающих ее имеет вид:

$$w(n) = x(n) - a(1)w(n-1) - a(2)w(n-2);$$

$$y(n) = w(n) + b(1)w(n-1) + b(2)w(n-2).$$

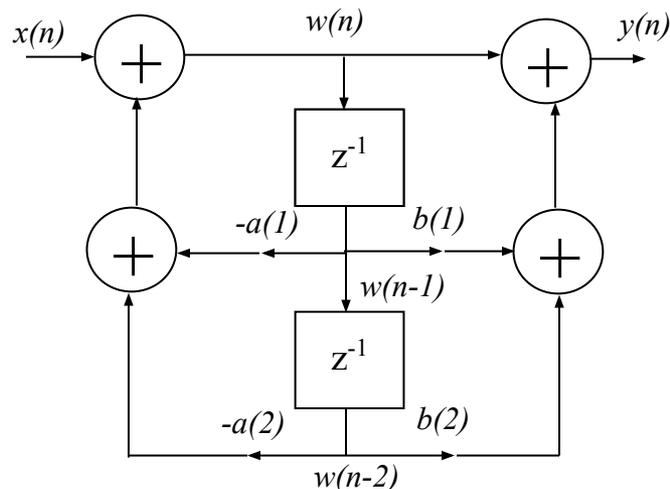


Рисунок 15. Структурная схема блока второго порядка в прямой форме 2.

Как было отмечено, существует значительная гибкость как при выборе способа попарного объединения полюсов и нулей, так и порядка последовательности, в которой следует расположить сформированные блоки второго порядка. В предположении неограниченной точности представления переменных и коэффициентов порядок расположения блоков и способ группирования нулей с полюсами не имеют значения (цепи будут эквивалентны). Однако на практике такие цепи могут значительно различаться из-за эффектов конечной разрядности представления чисел.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Параллельная форма

В отличие от способа разложения полиномов числителя и знаменателя передаточной функции на множители, выражение для $H(z)$ при $M=N$ можно представить в виде разложения на простые дроби:

$$H(z) = C + \sum_{i=1}^K H_i(z), \quad (4.6)$$

где слагаемые $H_i(z)$ соответствуют или блокам второго порядка

$$H_i(z) = \frac{b_i(0) + b_i(1)z^{-1}}{1 + a_i(1)z^{-1} + a_i(2)z^{-2}}, \quad (4.7)$$

или блокам первого порядка

$$H_i(z) = \frac{b_i(0)}{1 + a_i(1)z^{-1}}, \quad (4.8)$$

причем K равно целой части от $(N + 1)/2$, и, как следует из (4.1), $C = b(N)/a(N)$. На рис.16 приведена структурная схема, реализующая соотношение (4.6). Ее называют параллельной формой. Блоки первого и второго порядка, описываемые формулами (4.7) и (4.8), строятся по схеме одной из рассмотренных выше прямых форм.

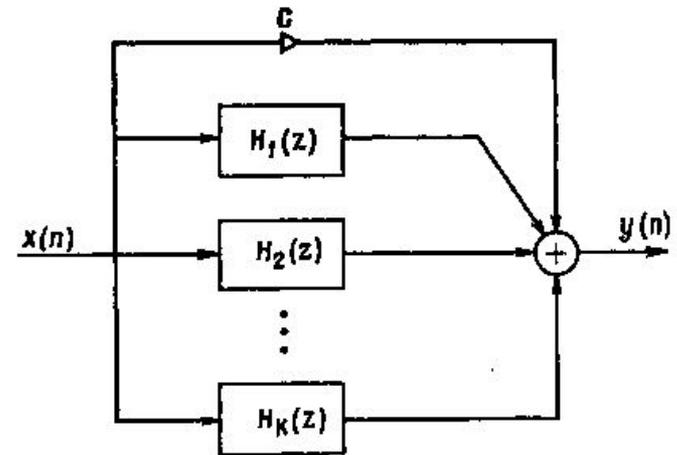


Рисунок 16. Параллельная форма.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Хотя рассмотренные структурные схемы фильтров не исчерпывают всех возможных структур, при моделировании на ЦВМ и аппаратурной реализации фильтров они применяются наиболее часто. Другие структуры можно получить множеством способов. Так, например, можно построить параллельно-последовательную структуру, в которой часть передаточной функции реализуется в параллельной форме, а остальная часть — в последовательной. Кроме того, для всех рассмотренных структур можно получить обращенные схемы, изменив направление прохождения всех сигналов (т. е. направив все стрелки на схемах в обратную сторону) и поменяв местами точки разветвления с точками суммирования сигналов. Полученные таким образом структуры будут иметь те же передаточные функции, но в них будут по-иному проявляться эффекты конечной разрядности чисел.

Выбор наилучшей из этих многочисленных структурных схем как при аппаратурной реализации, так и при моделировании на *ЦВМ* определяется экономическими соображениями. Последние в свою очередь зависят от свойств структур при ограниченной точности представления переменных и коэффициентов фильтров.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Основные структурные схемы при построении КИХ-фильтров

Преыдущее обсуждение относилось к системам с бесконечными импульсными характеристиками, реализация которых строилась на использовании рекурсивного расчетного алгоритма. В случае физически реализуемых систем с импульсными характеристиками конечной длины для построения систем используют нерекурсивный расчетный алгоритм. Для таких систем передаточная функция имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} \quad (4.9)$$

Это означает, что если длина импульсной характеристики равна N отсчетам, то $H(z)$ является полиномом по z^{-1} степени $N-1$. Поэтому $H(z)$ имеет $N-1$ полюсов в точке $z=0$ и $N-1$ нулей, которые могут быть в любом месте z -плоскости. Точно так же, как БИХ-фильтры, КИХ-фильтры могут иметь множество форм построения. Обсудим наиболее важные формы построения цепей КИХ-фильтров

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Прямая форма

Прямая форма построения цепи следует непосредственно из соотношения для сверточной суммы, которое имеет вид

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k). \quad (4.10)$$

Эта структура идентична показанной на рис.13, когда все коэффициенты $a(k)$ равны нулю. Таким образом, прямая форма построения КИХ-фильтров является частным случаем прямой формы БИХ-фильтров.

Структурная схема, показанная на рис.17, является реализацией соотношения (4.10) и соответствует прямому порядку выполнения сложений и умножений. Из-за сходства этой структуры с линией задержки с отводами ее часто называют *фильтром с многоотводной линией задержки* (или иногда *трансверсальным фильтром*). Очевидно, что есть много и других способов организации вычисления и, таким образом, много других теоретически эквивалентных структур цепи.

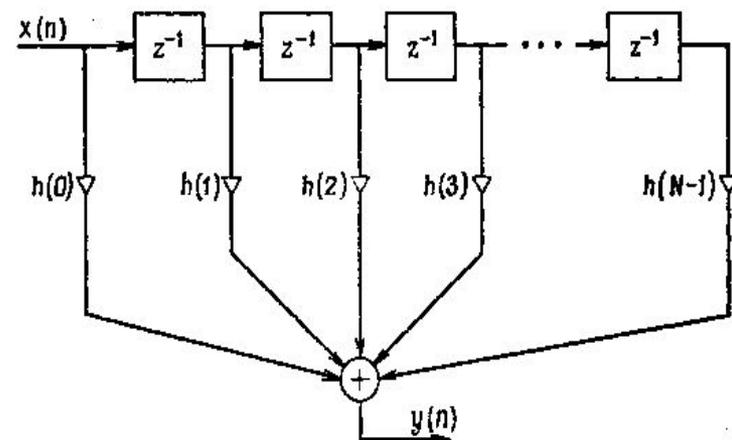


Рисунок 17. Прямая форма построения КИХ-фильтра.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Каскадная форма и структура на основе быстрой свертки

В отличие от прямой формы построения структур при каскадной форме предполагается, что передаточная функция представляется в виде произведения сомножителей второго порядка, т. е.

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (b_k(0) + b_k(1)z^{-1} + b_k(2)z^{-2}), \quad (4.11)$$

где если N - четное, то один из коэффициентов $b_k(2)$ будет равен нулю в связи с тем, что для четных N приведенное уравнение передаточной функции $H(z)$ имеет нечетное число действительных корней.

На рис.18 показана структурная схема цепи, соответствующая (4.11). Показано, что каждый сомножитель второго порядка имеет прямую форму построения, приведенную на рис.17.

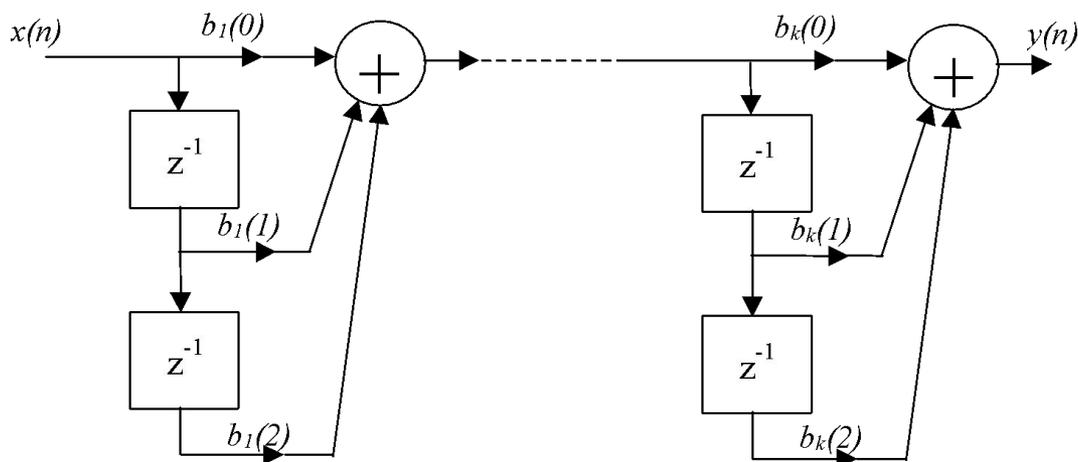


Рисунок 18. Каскадная форма построения КИХ-фильтра.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Для построения фильтров без полюсов довольно часто применяют еще несколько структур, которые не имеют аналогов с фильтрами общего вида, содержащими и нули, и полюсы. Наиболее распространенная из них основана на так называемом *методе быстрой свертки*, когда свертка вычисляется с помощью обратного преобразования Фурье от произведения преобразований Фурье входной последовательности и импульсной характеристики системы. Структура КИХ-фильтра на основе быстрой свертки представлена на рис.19.

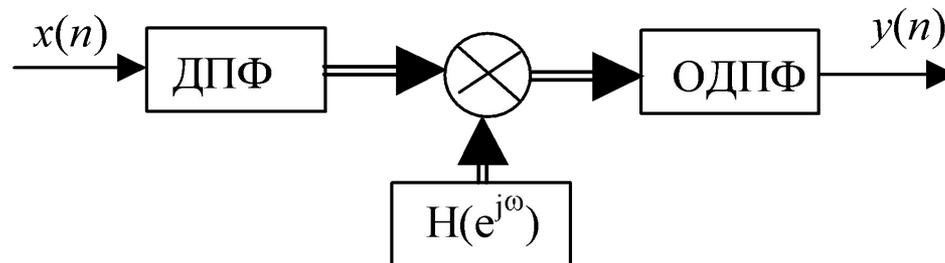


Рисунок 19. Структура КИХ-фильтра на основе быстрой свертки.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Структуры с частотной выборкой

В разделе 3 было показано, что z -преобразование последовательности конечной длины N может быть представлено с помощью N отсчетов, равномерно распределенных на единичной окружности.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{X(k)}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}]^n = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для КИХ-фильтра выражение (3.11) подразумевает, что передаточная функция может быть представлена как

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1}e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \quad (4.12)$$

Значения

$$H(k) = H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = |H(k)|e^{j\varphi(k)}, \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (4.13)$$

называются **частотными выборками**, так как они являются просто выборками (отсчетами) частотной характеристики системы.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

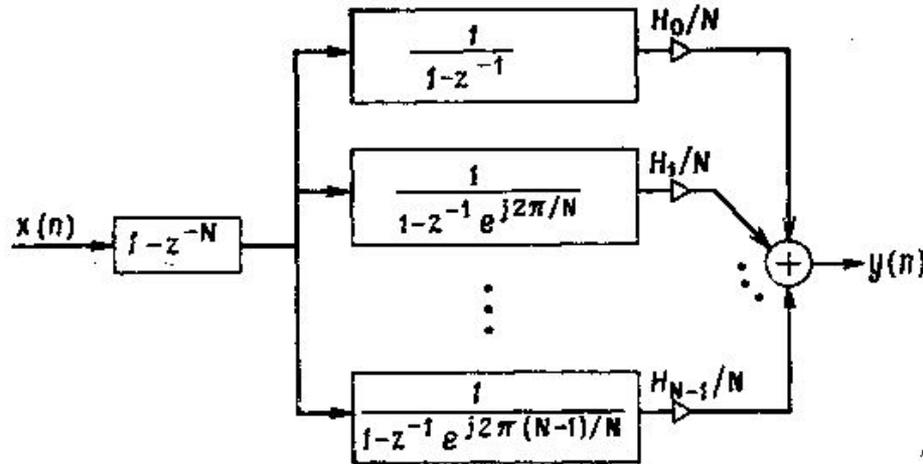


Рисунок 20. Структура КИХ-фильтра с частотной выборкой.

Выражение (4.12) означает, что КИХ-система может быть реализована как каскадное соединение простой КИХ-системы и БИХ-системы, как показано на рис.20. Передаточная функция КИХ-системы равна $1 - z^{-N} e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ и нули этой системы находятся в точках $z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$. Часть структуры (рис. 20), соответствующая БИХ-системе, состоит из параллельного соединения N комплексных систем первого порядка с полюсами в точках

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}.$$

Эти системы первого порядка имеют полюсы, лежащие строго на единичной окружности, назначение которых заключается в подавлении точно одного из нулей КИХ-системы.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

На практике трудности обеспечения устойчивости, обусловленные расположением нулей на единичной окружности, исключаются с помощью образования выборок передаточной функции $H(z)$ на окружности радиуса r , где $r=1-(2^{-12} \div 2^{-16})$ немного меньше единицы. В этом случае $H(z)$ представляется как

$$H(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - rz^{-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k}}. \quad (4.14)$$

где для точного представления $H(z)$ с помощью (4.14) требуется, чтобы

$$H(k) = H(re^{j\frac{2\pi}{N}k}). \quad (4.15)$$

Если значение r выбрано близким к единице, то появляется небольшая ошибка, когда вместо выражения (4.15) используется (4.13).

Анализ и проектирование цифровых фильтров

В общем случае частотные выборки $H(k)$ являются комплексными, поэтому реализация КИХ-систем, таких, как на рис. 4.20, требует комплексных арифметических операций. Однако, если отсчеты импульсной характеристики $h(n)$ являются действительными, то частотные выборки, выраженные в полярных координатах, удовлетворяют следующим условиям симметрии

$$\begin{aligned} |H(k)| &= |H(N - k)|; \\ \varphi(k) &= -\varphi(N - k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \end{aligned}$$

где если $H(0) > 0$, то $\varphi(0) = 0$. Кроме того, поскольку

$$\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} \right)^* = e^{j\frac{2\pi}{N}(N-k)},$$

то цепи первого порядка на рис. 4.20 образуют комплексно-сопряженные пары, за исключением цепи с полюсом в точке $e^{j(2\pi/N)0} = 1$, и для N четного — цепи с полюсом в точке $e^{j(2\pi/N)N/2} = -1$. Следовательно, комплексные цепи первого порядка могут быть сгруппированы в комплексно-сопряженные пары и выполнены как цепи второго порядка с действительными коэффициентами, как это было показано в примере 3 раздела 4.1.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Существуют два принципиальных преимущества реализаций на основе частотной выборки. Первое заключается в том, что в умножителях на выходах каждой системы второго порядка используются величины, пропорциональные отсчетам частотной характеристики, равномерно распределенным по углу на единичной окружности. Эти величины могут, конечно, быть получены из ДПФ импульсной характеристики. Если подлежащий выполнению фильтр является частотно-избирательным с одной или более полосой непропускания, то он может быть спроектирован так, чтобы частотные выборки в полосе непропускания были нулевыми, что уменьшает число подлежащих реализации систем второго порядка. Если большинство частотных отсчетов являются нулевыми, как в случае узкополосного низкочастотного или полосового фильтра, то структура на основе частотной выборки может потребовать меньше умножений, чем прямая форма построения. Конечно, реализация на основе частотной выборки будет всегда требовать большую память, чем прямая форма построения.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Второе преимущество следует из того, что полюсы и нули структуры фильтра зависят только от длины импульсной характеристики. Если входной сигнал подлежит обработке с помощью банка КИХ-фильтров (т. е. нескольких различных импульсных характеристик длиной N), то одна реализация множителя $(1-z^{-N})$ и каждого блока второго порядка будет служить для всех фильтров. Кроме того, структура состоит из одинаковых функциональных блоков второго порядка, что дает возможность реализации этих блоков последовательно во времени. Заметим в заключение, что структура на основе частотной выборки является частным случаем структуры, получаемой на основе интерполяционной формулы Лагранжа, которая представляет полином $H(z)$ через N его отсчетов в z -плоскости. Предложены и другие структуры КИХ-цепи, основанные на интерполяционных формулах Ньютона и Эрмита и разложении $H(z)$ в ряды Тейлора. Все эти структуры, включая структуру на основе частотной выборки, в общем случае требуют больше умножений и задержек, чем прямая или каскадная форма. Таким образом, полезность подобных структур заключена в возможных преимуществах по чувствительности к эффектам квантования и согласованности расчетной процедуры с реализацией системы.

Эффекты квантования параметров в цифровых фильтрах

Линейные системы с постоянными параметрами часто используются для выполнения формирования спектра или операции фильтрации. При создании подобных систем существует ряд важных: соображений. Во-первых, мы должны сделать выбор между БИХ- и КИХ-системами. Многие факторы могут влиять на этот выбор. Например, БИХ-система может потребовать наименьшее число задержек и умножителей на константу, чтобы удовлетворять заданной совокупности требований к фильтру. С другой стороны, тот факт, что КИХ-фильтры могут иметь строго линейную фазовую характеристику, оказывается часто важным аргументом в их пользу.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Для выбранного класса системы, т. е. БИХ- или КИХ-системы, мы должны определить передаточную функцию фильтра. В конечном счете для реализации системы в виде программы для ЦВМ или в виде специализированного устройства должна быть выбрана цифровая цепь или структурная схема. Приходится учитывать много соображений при выборе структуры системы: сложность математического обеспечения или конструкции и трудность получения параметров для фильтра. Кроме того, почти все созданные схемы, разработанные вплоть до настоящего времени, приводят к заданию передаточной функции с помощью параметров, которые предполагают неограниченную точность. Если мы выберем реализацию системы на основе программы для универсальной ЦВМ, то точность определения параметров может быть ограничена длиной слова памяти ЦВМ. При аппаратной реализации, конечно, желательно минимизировать длину регистров, которые должны обеспечить хранение параметров фильтра.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Поскольку коэффициенты, используемые при выполнении данного фильтра, в общем случае не будут точными, то полюсы и нули передаточной функции будут в общем случае отличными от требуемых. Это смещение полюсов и нулей (в случае КИХ-систем только нулей) от требуемых расположений проявится в частотной характеристике, которая будет отличаться от заданной частотной характеристики. Если такие ошибки квантования велики, то система не сможет удовлетворить предъявляемым требованиям. Кроме того, в случае БИХ-системы один или несколько полюсов могут оказаться вне единичного круга, что приведет к неустойчивости системы и ее непригодности. В общем случае эффект квантования коэффициентов в сильной мере зависит от используемой для выполнения системы структуры.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Как мы видели, существует бесконечное множество реализаций цепи, которые обеспечивают данную передаточную функцию, если параметры такой цепи представляются с неограниченной точностью. Некоторые из этих структур будут менее чувствительными к квантованию параметров, т. е. передаточная функция такой реализации будет более близка, в некотором смысле, к требуемой передаточной функции системы. К сожалению, еще не существует систематического метода для определения наилучшей реализации при ограничениях на число умножителей, длину слова и число задержек. На практике выбор, как правило, ограничен формами цепей, рассмотренных выше. Вместо детального математического анализа проблемы чувствительности к значениям параметров обычный практический подход к определению приемлемого квантования параметров данной цепи сводится к моделированию. Ниже мы обсудим некоторые простые результаты, которые обеспечат понимание проблемы, связанной с чувствительностью к значениям параметров.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Эффекты квантования параметров проявляются в отклонениях характеристик фильтра от заданной частотной характеристики или, что эквивалентно, в смещении полюсов и нулей от требуемого положения. Поэтому одной из мер чувствительности данной реализации цепи к квантованию параметров является ошибка в положении полюсов и нулей, обусловленная ошибкой в умножителях на константы в цепи.

Чтобы показать, как квантование параметра влияет на положение полюсов и нулей, рассмотрим передаточную функцию, выраженную в виде

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)z^{-k}}.$$

Коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ являются требуемыми коэффициентами при прямой форме построения системы. При квантованных коэффициентах мы, в действительности, реализуем систему с передаточной функцией

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^M \hat{b}(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N \hat{a}(k)z^{-k}},$$

где $\hat{a}(k) = a(k) + \Delta a(k)$, $\hat{b}(k) = b(k) + \Delta b(k)$.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Допустим, что полюсы $H(z)$ располагаются в точках $z = p_i, i = 1, 2, \dots, N$, т. е. знаменатель полинома передаточной функции, представленный в виде сомножителей, равен

$$A(z) = 1 + \sum_{k=1}^N a(k)z^{-k} = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1}). \quad (4.16)$$

Кроме того, определим полюсы $H(z)$ при $z = p_i + \Delta p_i$, где $i = 1, 2, \dots, N$. Ошибка Δp_i может быть выражена через ошибки в коэффициентах:

$$\Delta p_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_i}{\partial a(k)} \Delta a(k), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

На основании (4.16) и того факта, что $\left(\frac{\partial A(z)}{\partial p_i} \right)_{z=p_i} \frac{\partial p_i}{\partial a(k)} = \left(\frac{\partial A(z)}{\partial a(k)} \right)_{z=p_i}$,

следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial a(k)} = p_i^{N-k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l) \quad (4.17)$$

Выражение (4.17) является мерой чувствительности i -го полюса к изменению (ошибке) в k -м коэффициенте знаменателя полинома $H(z)$. Этот результат справедлив только для простых полюсов, как это видно из (4.16). Поскольку при прямой форме построения нули зависят только от коэффициентов числителя $b(k)$, аналогичный результат может быть получен для чувствительности нулей к ошибкам в коэффициентах $b(k)$.

Анализ и проектирование цифровых фильтров

$$\frac{\partial p_i}{\partial a(k)} = p_i^{N-k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^N (p_i - p_l) \quad (4.17)$$

Из (4.17) следует, что если полюсы (или нули) плотно сгруппированы, то возможно, что небольшие ошибки в коэффициентах могут обусловить большие смещения полюсов (или нулей). Это можно увидеть при рассмотрении знаменателя выражения (4.17). Каждый множитель $(p_i - p_l)$ можно представить как вектор в z-плоскости, как показано на рис.21.

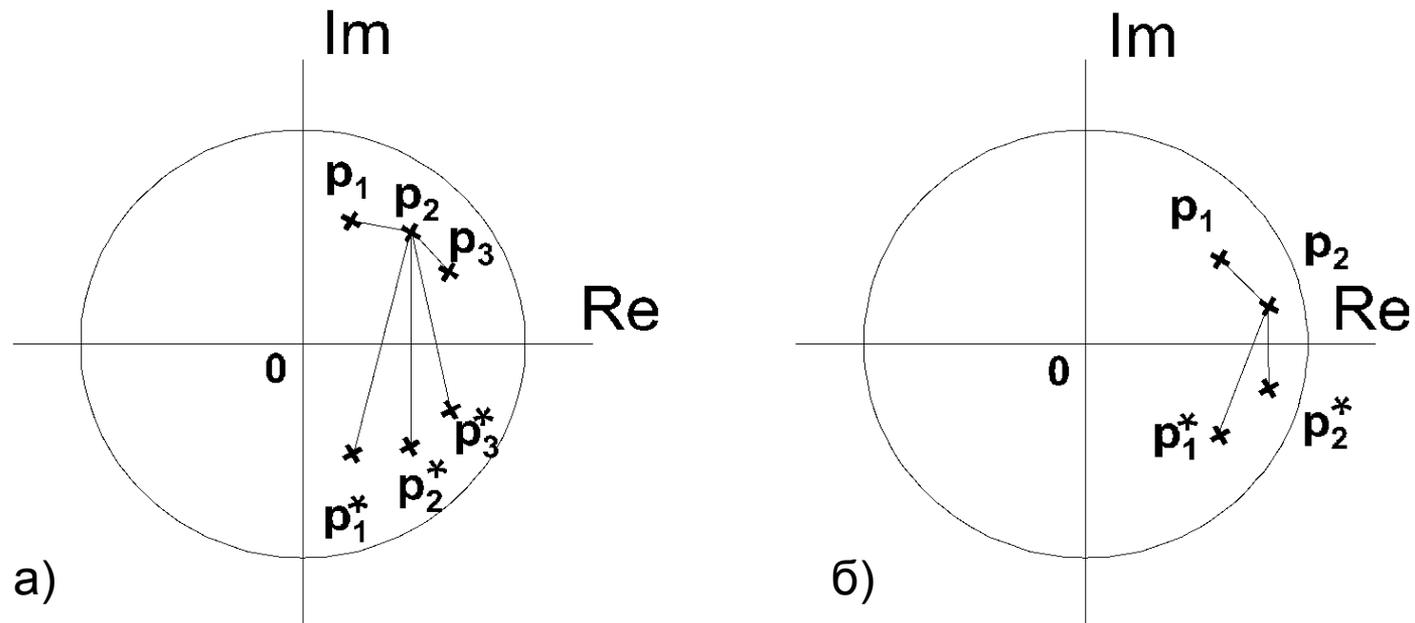


Рисунок 21. Представление сомножителей выражения (4.17) в виде векторов на z-плоскости в случаях: а) фильтра с узкой полосой пропускания; б) узкополосного фильтра нижних частот

Анализ и проектирование цифровых фильтров

Величина знаменателя в (4.17) равна произведению длин векторов из всех оставшихся полюсов до полюса p_i . Поэтому если полюсы (или нули) оказываются плотно сгруппированными, как на рис.21а соответственно фильтру с узкой полосой пропускания или как на рис.21б соответственно узкополосному фильтру нижних частот, то можно ожидать, что полюсы при прямой форме построения будут довольно чувствительны к ошибкам квантования коэффициентов. К тому же очевидно, что чем больше число корней, тем выше чувствительность.

При каскадной и параллельной формах построения систем, с другой стороны, каждая пара комплексно-сопряженных полюсов реализуется отдельно. Таким образом, ошибка для данного полюса является не зависимой от его расстояния до других полюсов системы. Поэтому в общем случае, с точки зрения квантования параметров, каскадная и параллельная формы оказываются предпочтительными перед прямыми формами. Это особенно справедливо в случае узкополосных частотно-избирательных фильтров с плотно сгруппированными полюсами и нулями.