

Тема: «Применение математических
методов для решения
содержательных задач из различных
областей науки и практики»

ОГБОУ СПО «Ангарский медицинский колледж»
Черных А.А., преподаватель математики и информатики
2015

Содержание:

Задание 1. Несложная арифметическая текстовая задача, моделирующая реальную или близкую к реальной ситуацию

Задание 2. Задание на чтение графика функции (диаграммы), моделирующее реальную или близкую к реальной ситуацию.

Задание 3. Несложная текстовая задача на оптимальное решение.

Задание 4. Текстовое задание на анализ практической ситуации (экономические, физические, химические и др. процессы).

Задание 5. Традиционная текстовая задача, сводящаяся к составлению и решения уравнения.

Задание 1.

Задача 1.

**Для ремонта квартиры требуется 45 рулонов обоев.
Сколько пачек обойного клея нужно купить, если
одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?**

Решение:

$$45/8 = 5,625 \text{ т.е. } 6 \text{ пачек клея.}$$

Ответ:

нужно купить 6 пачек обойного клея.

Задание 1.

Задача 2.



Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 890 рублей, а стоимость одного номера журнала — 38 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

Решение:

1) $38 * 25 = 950$ (руб.)

2) $950 - 890 = 60$ (руб.)

Ответ:

Она потратила бы на 60 рублей меньше, если бы подписалась на журнал.

Задача 3.

По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 23 рубля. Если на счёту осталось меньше 23 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счёту было 300 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?



Задание 1.

Задача 4.

Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3200 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1200 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 700 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?



Задание 1.

Задача 5.



Павел Иванович купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 56 миль в час? Ответ округлите до целого числа.



Задание 1.

Задача 6.

Выпускники Ангарского медицинского колледжа покупают цветы для последнего звонка: букеты из 3 роз каждому преподавателю и из 7 роз классному руководителю и директору. Они собираются подарить цветы 15 преподавателям (включая директора и классного руководителя). Розы покупаются по оптовой цене 55 рублей за штуку. Сколько рублей стоят все розы?

Задание 1.



Задача 7.

Поезд Новосибирск — Красноярск отправляется в 15 : 20, а прибывает в 4 : 20 на следующее утро (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

Задание 1.

Задача 8.



В доме, в котором живет Галя, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 6 квартир. Галя живет в квартире № 74. В каком подъезде живет Галя?



Задание 1.

Задача 9.

Одна таблетка лекарства весит 30 мг и содержит 14% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте четырёх месяцев и весом 6 кг в течение суток?



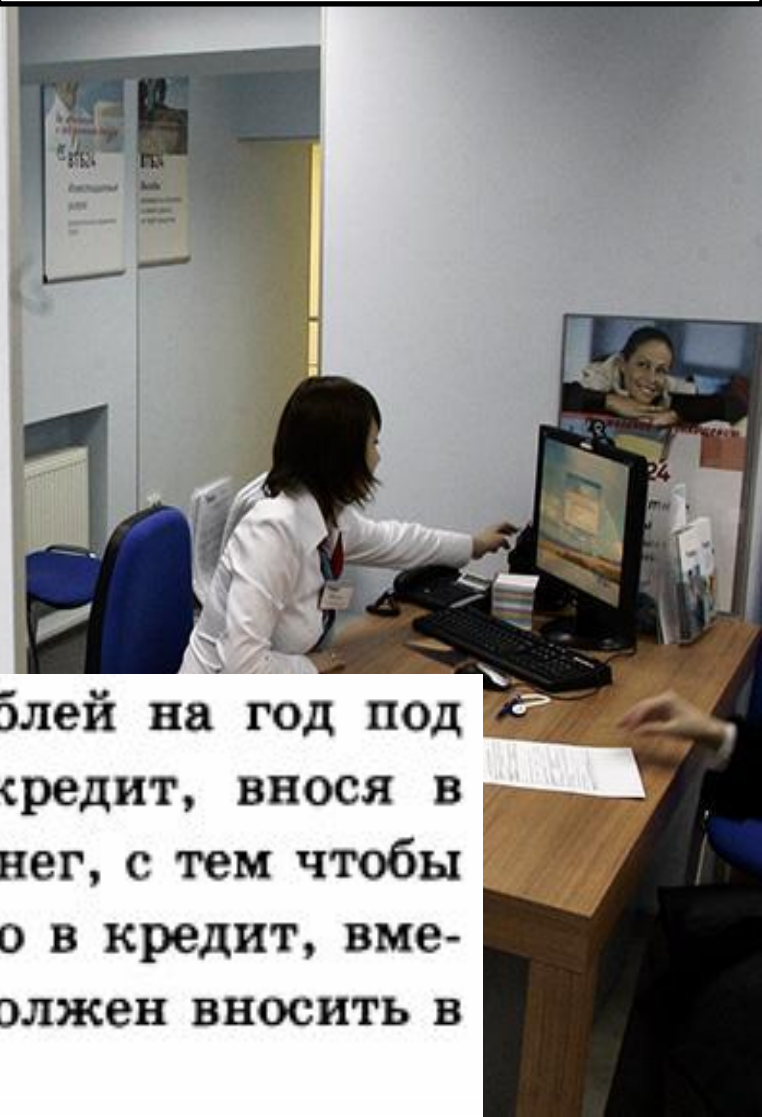
Потребительские
кредиты →

Кредитные карты →

Задание 1.

Задача 10.

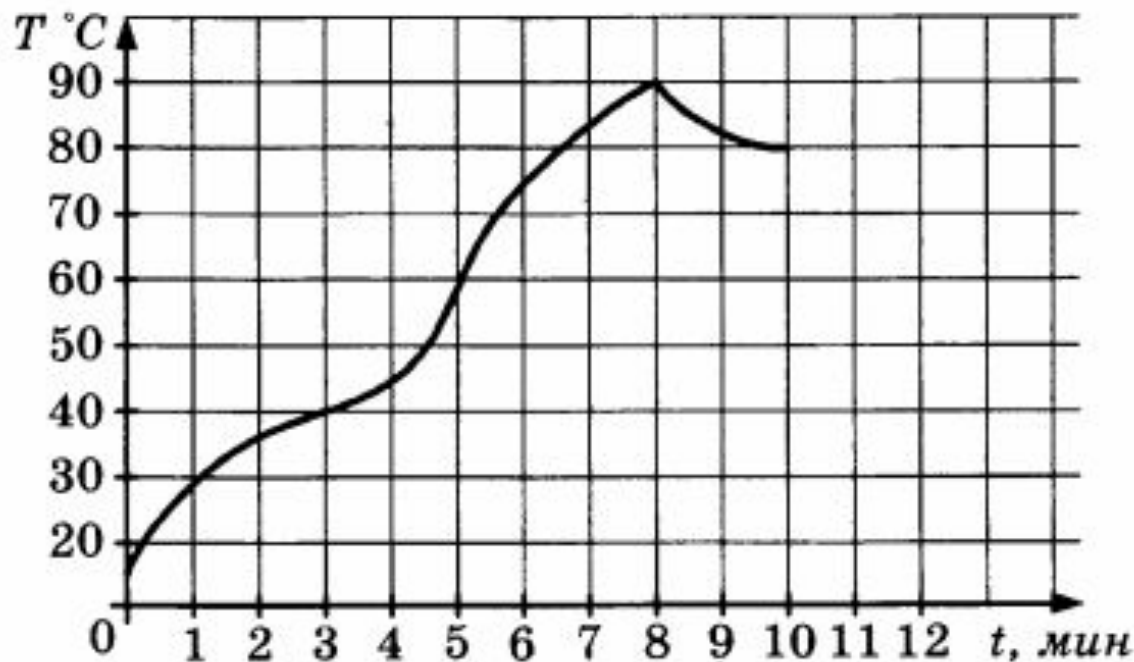
Клиент взял в банке кредит 60000 рублей на год под 10% годовых. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег, с тем чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько рублей он должен вносить в банк ежемесячно?



Задание 2.

Задача 1.

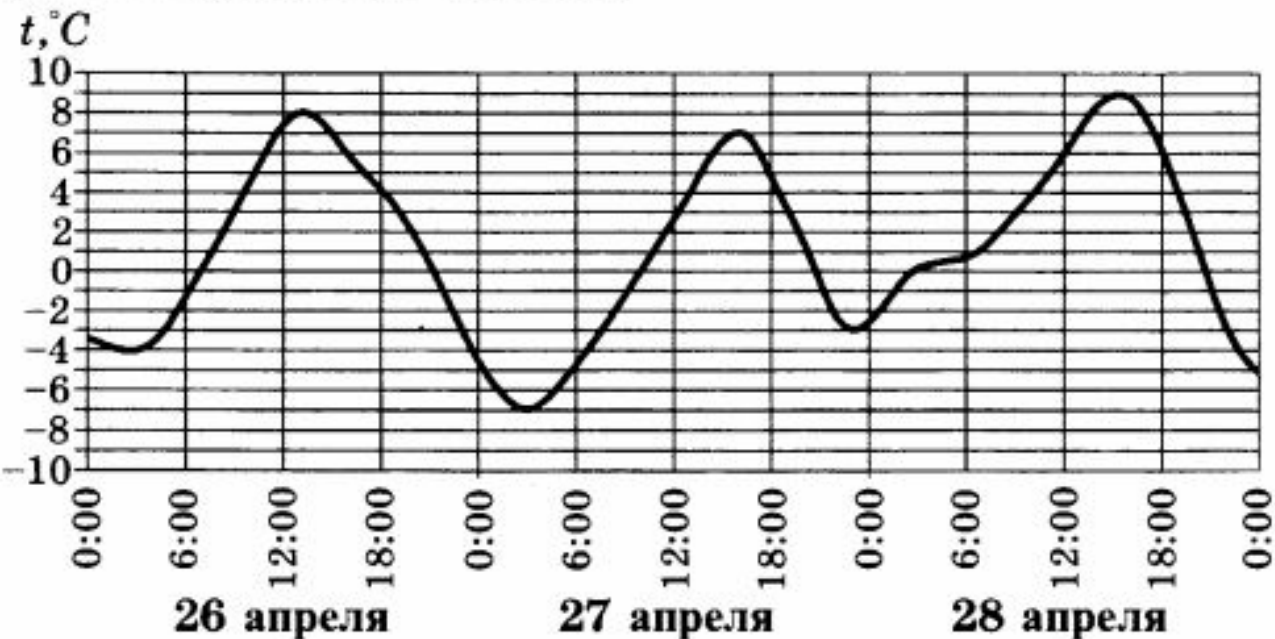
На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°C до температуры 90°C .



Задание 2.

Задача 2.

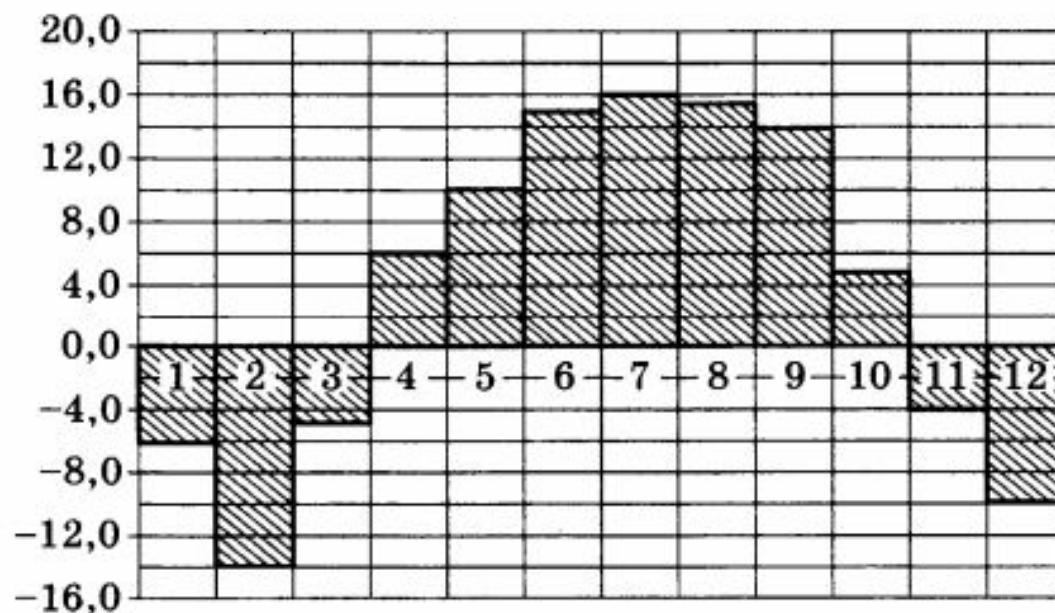
На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 26 апреля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Задание 2.

Задача 3.

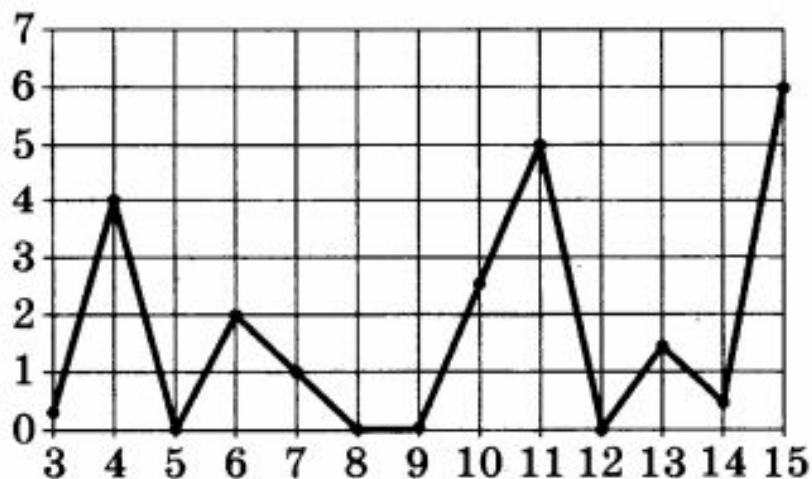
На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Задание 2.

Задача 4.

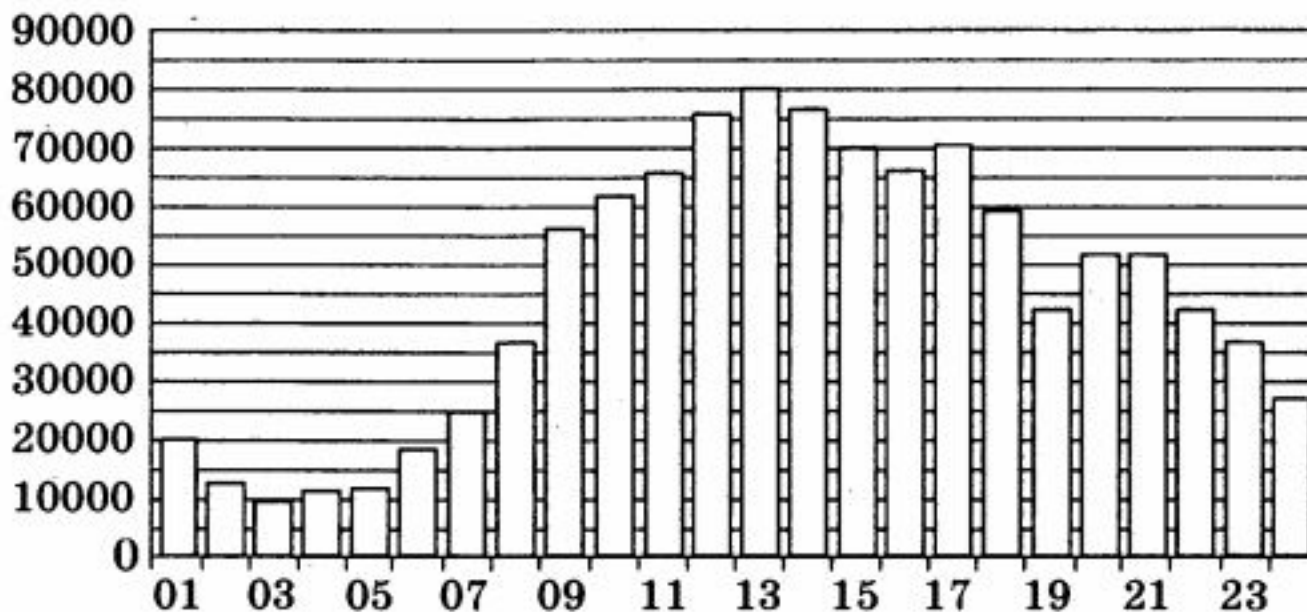
На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 5 миллиметров осадков.



Задание 2.

Задача 5.

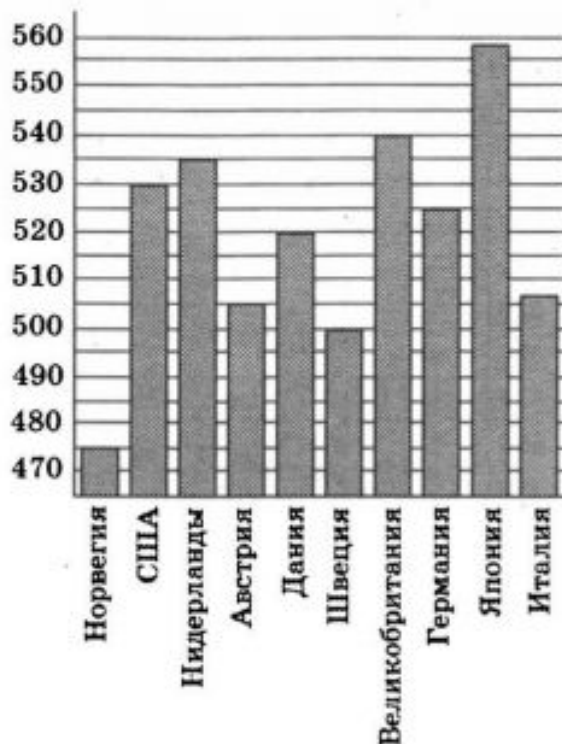
На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА «Новости» в течение каждого часа 8 декабря 2009 года. По горизонтали указывается номер часа, по вертикали — количество посетителей сайта за данный час. Определите по диаграмме, каким было наибольшее количество посетителей в час на сайте РИА.



Задание 2.

Задача 6.

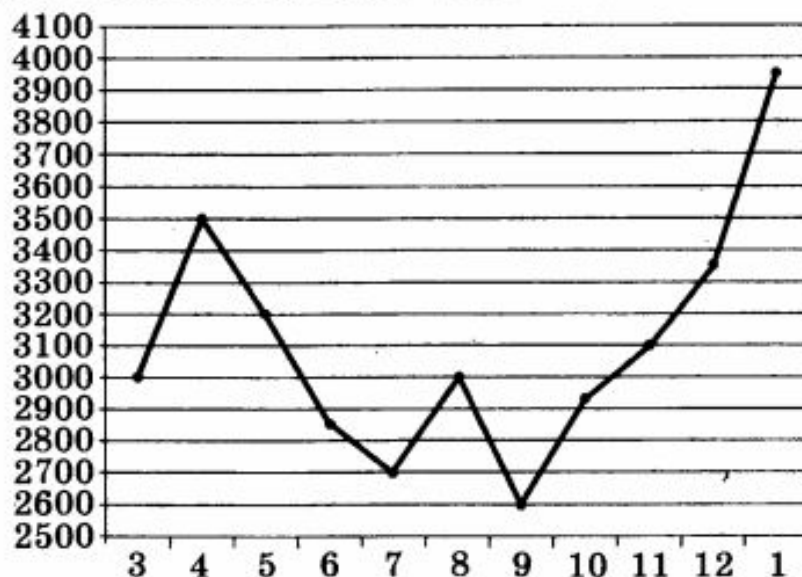
На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-х классов по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). По данным диаграммы найдите число стран, в которых средний балл не больше чем 530.



Задание 2.

Задача 7.

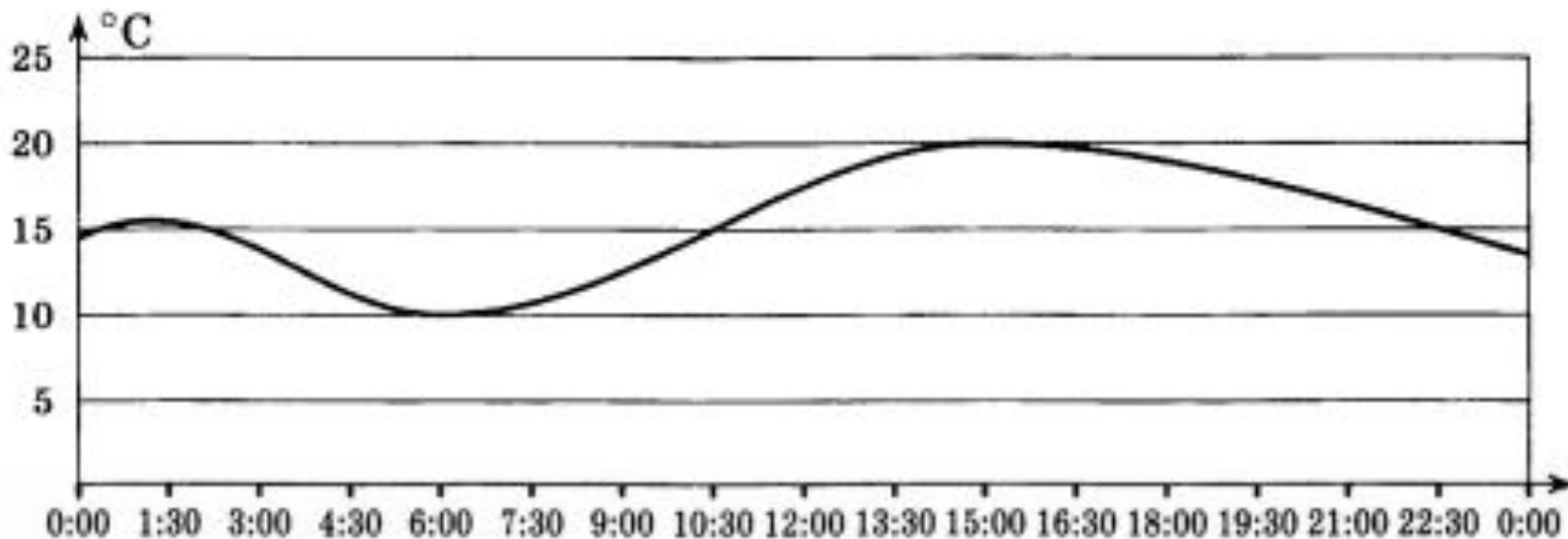
На рисунке жирными точками показана цена потребительской корзины в магазине «Покупка» во все месяцы с марта 2009 года по январь 2010 года. По горизонтали указаны номера месяцев, по вертикали — стоимость потребительской корзины в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку номер месяца с наименьшей ценой потребительской корзины.



Задание 2.

Задача 8.

На графике изображено изменение температуры воздуха в пункте А на протяжении суток 17 августа. На оси абсцисс отмечается время суток, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику разность максимальной и минимальной температур в течение этих суток (в градусах Цельсия).



Задание 2.

Задача 9.

10. На графике, изображённом на рисунке 15, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. В первую неделю июля бизнесмен купил 16 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?

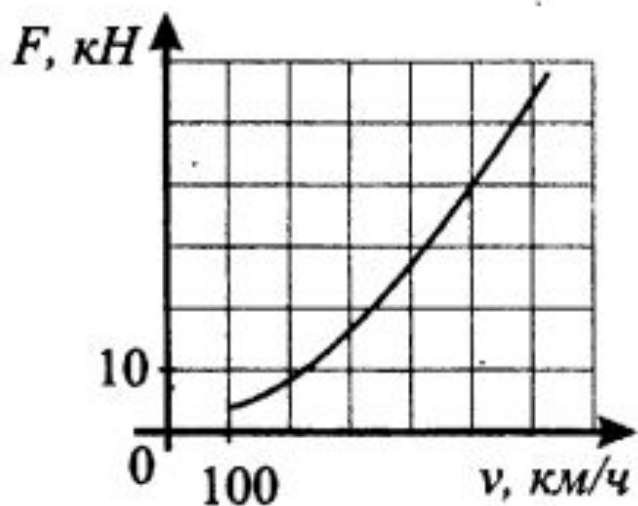


Рис. 15.

Задание 2.

Задача 10.

7. Когда самолёт находится в горизонтальном полёте, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке 4 изображена эта зависимость для некоторого самолёта. На оси абсцисс откладывается скорость (в км/ч), на оси ординат — сила (в кН). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в кН) при скорости 500 км/ч?



Задание 3.

Задача 1.

Решение



1. Для остекления парника требуется заказать 20 одинаковых стёкол в одной из трёх фирм. Площадь каждого стекла $0,85 \text{ м}^2$. В таблице приведены цены на стекло и на резку стёкол. Сколько рублей будет стоить самый дешёвый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка стекла (руб. за одно стекло)	Дополнительные условия
А	180	40	
Б	200	35	
В	220	25	При заказе на сумму больше 3500 руб. резка бесплатно

Задача 1.

Решение.

20 стёкол площадью $0,85 \text{ м}^2$ каждое составят общую площадь 17 м^2 . Чтобы узнать стоимость стекла, нужно его цену умножить на площадь. Чтобы узнать стоимость резки стекла, нужно число стёкол (20) умножить на стоимость резки за одно стекло. Потом нужно результаты сложить и получить стоимость заказа. Для фирмы А стоимость заказа равна $180 \cdot 17 + 40 \cdot 20 = 3860$ рублей. Для фирмы Б стоимость заказа равна $200 \cdot 17 + 35 \cdot 20 = 4100$ рублей. Для фирмы В стоимость заказа равна $220 \cdot 17 = 3740$ рублей. Так как стоимость заказа больше 3500 руб., то в фирме В резка обойдётся бесплатно. Следовательно, самый дешёвый заказ будет стоить 3740 рублей.

Ответ: 3740.

Задание 3.

Задача 2.



2. Для перевозки 8 т фруктов на 1200 км можно воспользоваться услугами одной из трёх транспортных компаний. Каждая компания предлагает один вид автомобилей. Сколько рублей будет стоить наиболее дешёвый вариант перевозки?

Компания-перевозчик	Стоимость перевозки (руб. за 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (т)
«Альфа»	850	1,8
«Бета»	1200	2,2
«Гамма»	1500	3,3

Задача 2.

Решение.

Выясним, сколько машин нужно будет заказать в каждой из фирм, чтобы перевезти 8 т фруктов. Машин фирмы «Альфа» нужно 5 (4 машин по 1,8 т не хватит для перевозки 8 т, а 5 точно хватит). Машин фирмы «Бета» нужно 4 (3 машин по 2,2 т не хватит для перевозки 8 т, а 4 точно хватит). Машин фирмы «Гамма» нужно 3 (2 машин по 3,3 т не хватит для перевозки 8 т, а 3 точно хватит).

Стоимость перевозки одной машиной нам дана в рублях за 100 км, тогда на 1200 км нужно в 12 раз больше. Чтобы найти стоимость каждого из вариантов перевозки, нужно стоимость перевозки за 100 км умножить на 12 и полученный результат умножить на число заказанных машин.

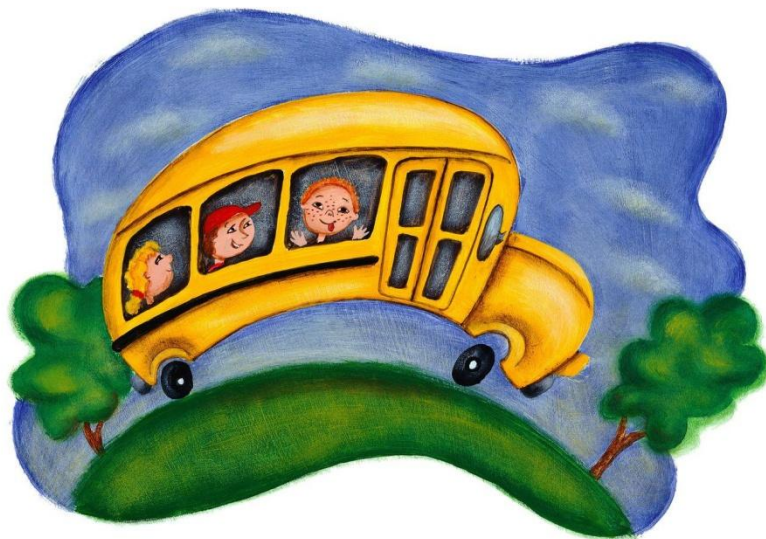
Для фирмы «Альфа» стоимость перевозки составит $850 \cdot 12 \cdot 5 = 51\,000$ руб., для фирмы «Бета» эта стоимость составит $1200 \cdot 12 \cdot 4 = 57\,600$ руб., для фирмы «Гамма» — $1500 \cdot 12 \cdot 3 = 54\,000$ руб. Выбираем наиболее дешёвый вариант перевозки, это вариант фирмы «Альфа».

Ответ: 51 000.

Задание 3.

Задача 3.

3. Семья из трёх человек едет из Волгодонска в Москву. Можно ехать на автобусе, а можно — на своей машине. Билет на автобус для одного человека стоит 1200 рублей. Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние по шоссе равно 1100 км, а цена бензина равна 23,8 руб. за литр. Сколько рублей будет стоить самая дешёвая поездка для этой семьи?



Задача 3.

Решение.

Автомобиль расходует 7 литров бензина на 100 километров пути, расстояние равно 1100 км (в 11 раз больше, чем 100 км), тогда бензина понадобится $7 \cdot 11 = 77$ литров. Вычисляем стоимость 77 литров бензина по цене 23,8 рубля за литр: $77 \cdot 23,8 = 1832,6$ рубля. Три билета на автобус будут стоить $3 \cdot 1200 = 3600$ рублей. Значит, автомобильная поездка будет самой дешёвой, её стоимость составит 1832,6 рубля.

Ответ: 1832,6.

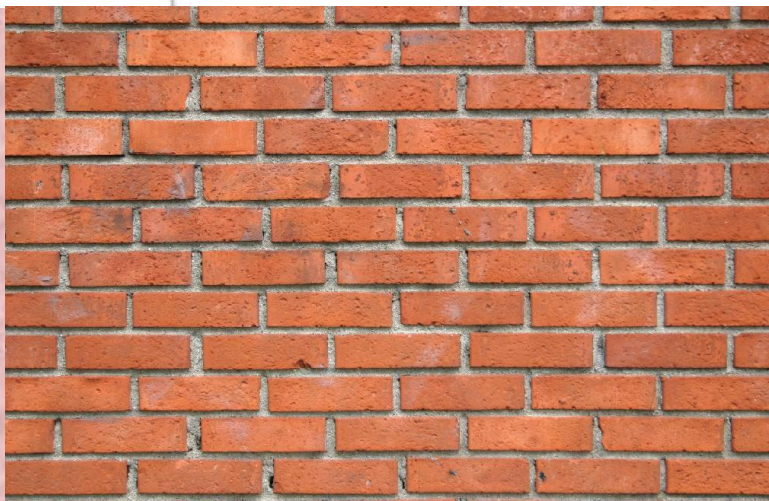


Задание 3.

Задача 4.



4. Для строительства дачного домика можно использовать один из двух типов стен: кирпичные или стены из керамзитоблоков. Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 штук керамзитоблоков и 3 мешка цемента. Для кирпичных стен необходимо 2500 кирпичей и 7 мешков цемента. Один керамзитоблок стоит 40 рублей, кирпич стоит 8 рублей за штуку, а мешок цемента стоит 180 рублей. Сколько рублей будет стоить материал, если выбрать наиболее дешёвый вариант?



Задача 4.

Решение.

Для стен из керамзитоблоков необходимо 520 штук керамзитоблоков по 40 рублей за штуку и 3 мешка цемента по 180 рублей за мешок, то есть $520 \cdot 40 + 3 \cdot 180 = 20\,800 + 540 = 21\,340$ рублей.

Для стен из кирпича необходимо 2500 штук кирпичей по 8 рублей за штуку и 7 мешков цемента по 180 рублей за мешок, то есть $2\,500 \cdot 8 + 7 \cdot 180 = 20\,000 + 1\,260 = 21\,260$ рублей.

Наиболее дешёвый вариант стоимости материала будет для стен из кирпича и составит 21 260 рублей.

Ответ: 21 260.



Задание 3.

Задача 5.



5. От дома до дачи можно доехать на дачном автобусе, на электричке или на рейсовом автобусе до ближайшего посёлка. В таблице показано время, которое нужно затратить на каждый участок пути. Какое наименьшее время потребуется на дорогу? Ответ дайте в часах.

	1	2	3
Дачный автобус	От дома до автобусной станции — 30 мин	Автобус в пути — 1 ч 5 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 15 мин
Электричка	От дома до станции железной дороги — 15 мин	Электричка в пути — 1 ч 20 мин	От станции до дачи пешком — 25 мин
Рейсовый автобус	От дома до остановки автобуса — 10 мин	Автобус в дороге — 50 мин	От остановки автобуса до дачи пешком — 45 мин



Задача 5.

Решение.

Время на дорогу складывается из времени на путь от дома до остановки транспорта, времени транспорта в пути и времени на путь пешком до дачи.

Для дачного автобуса время равно
 $30 \text{ мин} + 1 \text{ ч } 5 \text{ мин} + 15 \text{ мин} = 1 \text{ ч } 50 \text{ мин}.$

Для электрички время равно
 $15 \text{ мин} + 1 \text{ ч } 20 \text{ мин} + 25 \text{ мин} = 1 \text{ ч } 60 \text{ мин} = 2 \text{ ч}.$

Для рейсового автобуса время равно
 $10 \text{ мин} + 50 \text{ мин} + 45 \text{ мин} = 1 \text{ ч } 45 \text{ мин}.$

Видим, что наименьшее время потребуется на дорогу, если ехать рейсовым автобусом. Осталось перевести в часы 1 ч 45 мин. Так как в одном часе 60 минут, для перевода минут в часы нужно минуты поделить на 60. Вычисляем $45 : 60 = 0,75$. Всего 1,75 ч.

Ответ: 1,75.



Задание 3.

Задача 6.



6. Из пункта A в пункт C ведут три дороги. Через пункт D едет грузовик со средней скоростью 40 км/ч, через пункт B едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Через пункт E движется автобус со средней скоростью 48 км/ч. На рисунке 33 показана схема дорог и указано расстояние между пунктами по дорогам. Все три автомобиля одновременно выехали из пункта A . Какой автомобиль добрался до пункта C позже других? В ответе укажите, сколько часов он находился в дороге.

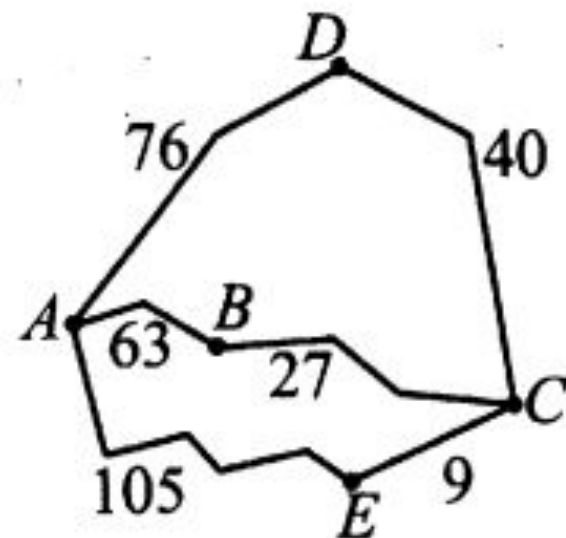


Рис. 33.



Задача 6.

Решение.

Посчитаем расстояния от A до C по разным дорогам и время в пути. Грузовик едет через пункт D , проезжая $76 + 40 = 116$ км со средней скоростью 40 км/ч. Чтобы найти время в пути, нужно расстояние разделить на среднюю скорость: $116 : 40 = 2,9$ ч. Автобус едет через пункт E , его путь равен $105 + 9 = 114$ км. Он едет со средней скоростью 48 км/ч, время поездки $114 : 48 = 2,375$ ч. Через пункт B едет легковой автомобиль со средней скоростью 70 км/ч. Его путь $63 + 27 = 90$ км. Найдём время в пути легкового автомобиля. Оно равно $90 : 70 = 1,2...$ ч. В ответе получится бесконечная десятичная дробь, но её точное значение нам не нужно, так как в задаче спрашивалось: «Какой автомобиль добрался до пункта C позже других?» Видим, что самое большое время в пути у грузовика, поэтому он и приедет позже всех.

Ответ: 2,9.

Задание 3.

Задача 7.



Reklama

7. Клиент хочет арендовать автомобиль на сутки для поездки протяжённостью 800 км. В таблице приведены стоимость аренды трёх автомобилей и их характеристики. Помимо аренды, клиент обязан оплатить топливо для автомобиля на всю поездку. Какую сумму заплатит клиент за аренду и топливо, если выберет самый дешёвый вариант? Цена дизельного топлива 19,5 руб. за литр, бензина — 23,5 руб. за литр, газа — 11 руб. за литр.

Автомобиль	Топливо	Расход топлива на 100 км	Арендная плата за 1 сутки
№ 1	Дизельное	6	1600
№ 2	Бензин	9	1100
№ 3	Газ	12	1250

Задача 7.

Решение.

В таблице приведены показатели расхода топлива для автомобилей на 100 км, значит, клиенту для поездки протяжённостью 800 км понадобится горючего в 8 раз больше, то есть дизельного топлива $6 \cdot 8 = 48$ л, бензина $9 \cdot 8 = 72$ л, газа $12 \cdot 8 = 96$ л.

Умножим цену литра топлива на посчитанное количество литров и получим стоимость топлива. Тогда стоимость дизельного топлива $19,5 \cdot 48 = 936$ рублей, бензина — $23,5 \cdot 72 = 1692$ рубля, газа — $11 \cdot 96 = 1056$ рублей.

Полная сумма состоит из стоимости топлива и аренды автомобиля. Следовательно, для 1-го автомобиля полная сумма равна $936 + 1600 = 2536$ рублей, для 2-го — $1692 + 1100 = 2792$ рубля и для 3-го — $1056 + 1250 = 2306$ рублей. Самый дешёвый вариант для 3-й машины. Значит, если клиент выберет самый дешёвый вариант, то он заплатит за аренду и топливо 2306 рублей.

Ответ: 2306.



Задание 3.

Задача 8.

8. В таблице приведены условия банковского вклада в трёх различных банках. Предполагается, что клиент кладёт на счёт 10 000 рублей на срок 1 год. В каком банке к концу года вклад окажется наибольшим? В ответе укажите сумму этого вклада в рублях.

Банк	Обслуживание счёта*	Процентная ставка (% годовых)**
А	120 руб. в год	8
В	15 руб. в месяц	8,5
С	Бесплатно	7,5

* В начале года или месяца со счёта снимается указанная сумма в уплату за ведение счёта.

** В конце года вклад увеличивается на указанное количество процентов.

Задача 8.

Решение.

Из чего складывается сумма вклада к концу года? Из первоначально-го вклада минус плата за ведение счёта, а также процентов от получен-ной суммы. Посчитаем сначала итоговую сумму без процентов. В банке А эта сумма будет равна $10\,000 - 120 = 9880$ рублей, в банке Б — $10\,000 - 15 \cdot 12 = 9820$ рублей, в банке С — $10\,000$ рублей.

Теперь посчитаем проценты по вкладу. 8% от 9880 равно $9880 : 100 \cdot 8 = 790,4$ рублей в банке А. 8,5% от 9820 равно $9820 : 100 \cdot 8,5 = 834,7$ рублей в банке В. 7,5% от 10 000 равно $10\,000 : 100 \cdot 7,5 = 750$ рублей в банке С.

Заполним таблицу.

Банк	Обслуживание счёта	Обслуживание счёта в год	Итоговая сумма без процентов	Процентная ставка (% годовых)	Сумма % по вкладу (в руб.)	Вклад к концу года в руб.
А	120 руб. в год	−120 руб.	9880	8	+790,4	10 670,4
В	15 руб. в месяц	−180 руб.	9820	8,5	+834,7	10 654,7
С	Бесплатно	—	10 000	7,5	+750	10 750

Видим, что к концу года вклад окажется наибольшим в банке С и будет равен 10 750 рублей.

Ответ: 10 750.

Задание 3.

Задача 9.



9. Предполагается поездка длительностью 45 минут. В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Клиенту нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки*	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (руб.)
А	50	Нет	3
В	30	20 мин — 50 руб.	6
С	Бесплатно	10 мин — 60 руб.	4

*Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Задача 9.

Решение.

Стоимость заказа складывается из стоимости подачи машины, стоимости минимальной поездки и стоимости минут сверх продолжительности минимальной поездки (для фирм В и С это 45 мин минус 20 или 10 мин соответственно). Заполним таблицу.

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность минимальной поездки	Сумма за минимальную поездку	Стоимость 1 минуты сверх минимальной поездки	Число минут сверх минимума	Сумма сверх минимальной	Всего
А	50 руб.	Нет	—	3 руб.	45 мин	135 руб.	185 руб.
В	30 руб.	20 мин	50 руб.	6 руб.	25 мин	150 руб.	230 руб.
С	Беспл.	10 мин	60 руб.	4 руб.	35 мин	140 руб.	200 руб.

Видим, что заказ будет стоить дешевле всего в фирме А, сумма этого заказа 185 рублей.

Ответ: 185.

Задание 3.

Задача 10.



10. Для того чтобы связать коврик, хозяйке нужно 1200 граммов разноцветной шерсти. Можно купить пряжу разных цветов по цене 80 рублей за 50 г, а можно купить неокрашенную пряжу по цене 60 рублей за 50 г и окрасить её. Один пакетик краски стоит 55 рублей и рассчитан на окраску 400 г пряжи. Какой вариант покупки дешевле? В ответе напишите, сколько рублей будет стоить эта покупка.



Задача 10.

Решение.

На 1200 г шерсти нужно $1200 : 400 = 3$ пакетика краски. Хозяйке нужно купить 3 таких пакетика по цене 55 рублей за пакет, на сумму $3 \cdot 55 = 165$ рублей.

Заполним таблицу.

	Цена за 50 г	Цена за 100 г	Цена за 1200 г	Крас- ка	Всего
Окр.	80	160	$160 \cdot 12 = 1920$	—	1920
Неокр.	60	120	$120 \cdot 12 = 1440$	165	$1440 + 165 = 1605$

Видим, что дешевле вариант покупки неокрашенной шерсти, эта покупка будет стоить 1605 рублей.

Ответ: 1605.

Задание 4.

Задача 1.



1. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности публикаций Tr , а также качества сайта Q . Каждый отдельный показатель оценивается читателями по 9-балльной шкале целыми числами от -4 до 4 .

Аналитики, составляющие формулу рейтинга, считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — всемеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Задача 1.

Решение.

Пусть по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, равную x , тогда рейтинг можно посчитать по формуле

$$R = \frac{7In + Op + 3Tr + Q}{A} = \frac{7x + x + 3x + x}{A} = \frac{12x}{A}. \text{ По условию,}$$

$$R = x, \frac{12x}{A} = x, A = 12.$$

Ответ: 12.

2. Коэффициент полезного действия теплового двигателя вычисляется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД двигателя будет не менее 75%, если температура холодильника $T_2 = 350 \text{ K}$?

Задание 4.

Задача 2.



Задача 2.

Решение.

1-й способ.

Составим и решим неравенство:

$$\eta \geq 75\%,$$

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\% \geq 75\%,$$

$$\frac{T_1 - 350}{T_1} \geq 0,75,$$

$$T_1 - 350 \geq 0,75T_1,$$

$$T_1 - 0,75T_1 \geq 350,$$

$$0,25T_1 \geq 350,$$

$$T_1 \geq 1400.$$

Итак, чтобы КПД данного теплового двигателя был не менее 75%, температура нагревателя должна быть не менее 1400 К.

Ответ: 1400.

Задание 4.

Задача 3.



3. Зависимость объёма спроса на продукцию некоторой фирмы от цены продукции задаётся формулой $q(p) = 280 - 10p$, где p — цена (тыс. руб.), q — спрос (единиц в месяц). Определите максимальный уровень цены (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $\tau = q \cdot p$ составит не менее 960 тыс. руб.

Задача 3.

Составим функцию выручки предприятия, затем неравенство, соответствующее условию задачи.

$$r = q \cdot p = (280 - 10p)p.$$

По условию $r \geq 960$, поэтому

$$(280 - 10p)p \geq 960.$$

Решим квадратное неравенство:

$$280p - 10p^2 \geq 960,$$

$$-10p^2 + 280p - 960 \geq 0,$$

$$10p^2 - 280p + 960 \leq 0,$$

$$p^2 - 28p + 96 \leq 0,$$

$p_1 = 4, p_2 = 24 \Rightarrow p \in [4; 24], p_{\max} = 24$. То есть максимальный уровень цены, при котором выручка предприятия составит не менее 960 тыс. руб., равен 24 тыс. руб.

Ответ: 24.

Задание 4.

Задача 4.

Зависимость температуры нагревательного элемента прибора от времени имеет вид $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 100$ К, $a = 37,5$ К/мин, $b = -0,25$ К/мин². Прибор может испортиться при температуре выше 1000 К. Определите момент времени (в минутах), когда прибор необходимо отключить, чтобы он не вышел из строя.



Решение.

Задача 4.

Зависимость температуры нагревательного элемента от времени имеет вид квадратичной функции. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вниз, так как коэффициент при t^2 отрицателен ($b = -0,25 < 0$). График процесса изменения температуры показан на рисунке 124.

Таким образом, температура 1000 К достигается дважды: первый раз на промежутке возрастания, второй — на промежутке убывания. Но реально до второго раза температура просто не дойдёт, так как прибор уже в момент времени t_1 выйдет из строя. Значит, наша цель — определить меньший корень квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}100 + 37,5t - 0,25t^2 &= 1000, \\0,25t^2 - 37,5t + 900 &= 0,\end{aligned}$$

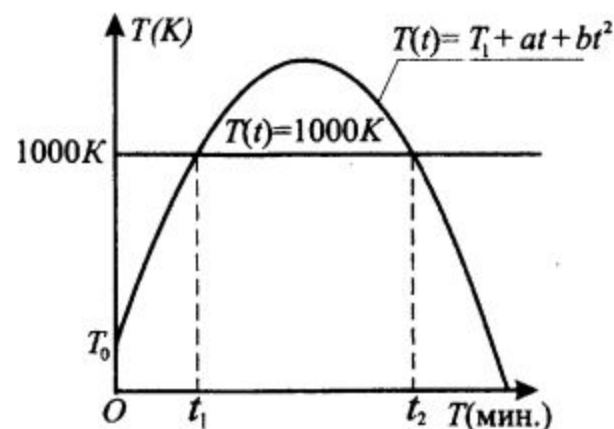


Рис. 124.

$$\begin{aligned}t^2 - 150t + 3600 &= 0, \\t_1 &= 30, \quad t_2 = 120.\end{aligned}$$

Следовательно, чтобы прибор не вышел из строя, его нужно выключить не позже чем через 30 минут после начала работы.

Ответ: 30.

Задание 4.

Задача 5.



Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь измеряется в квадратных метрах, температура — в градусах Кельвина, а мощность — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{7} \cdot 10^{16} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P составляет $19,551 \cdot 10^{22} \text{ Вт}$. Определите температуру этой звезды.

Задача 5.

Решение.

Выразим T^4 из формулы $P = \sigma ST^4$: $T^4 = \frac{P}{\sigma S}$.

Подставим заданные значения переменных:

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{19,551 \cdot 10^{22}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10^{16}} = \frac{19,551}{5,7} \cdot 7 \cdot 10^{22+8-16} = \\ &= 3,43 \cdot 7 \cdot 10^{14} = 343 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^3 \cdot 7 \cdot 10^{12} = 7^4 \cdot 10^{12}, \\ T &= \sqrt[4]{7^4 \cdot 10^{12}} = 7 \cdot 10^3 = 7000. \end{aligned}$$

Следовательно, температура данной звезды составляет 7000 К.

Ответ: 7000.



Задание 4.

Задача 6.

Парашютисты-экстремалы определяют высоту сооружений для будущих прыжков, засекая время падения небольших камней с вершин сооружений до поверхности приземления. Приближённая зависимость высоты от времени свободного падения имеет вид $h = 4,9t^2$. Здесь h — высота в метрах, t — время в секундах. С вершины первого сооружения камень падал 4,5 с. На сколько метров второе сооружение выше первого, если с вершины второго сооружения камень падал на 1 с дольше?

Задача 6.

Решение.

Составим выражение для определения разности высот и вычислим эту величину.

$$h_1 = 4,9t_1^2, \quad h_2 = 4,9t_2^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_2 - h_1 = 4,9(t_2^2 - t_1^2) = 4,9(5,5^2 - 4,5^2) = \\ &= 4,9(5,5 - 4,5)(5,5 + 4,5) = 49. \end{aligned}$$

То есть второе сооружение выше первого на 49 м.

В этой задаче можно было сначала вычислить высоту каждого из зданий, а потом найти разность этих высот. Вычисления были бы немного более громоздкими, но ответ, конечно же, получился бы таким же.

Ответ: 49.

Глубоководники проектируют новый батискаф в виде сферы радиуса R . Выталкивающая сила Архимеда, действующая на батискаф, вычисляется по формуле $F_A = \rho g V = \rho g \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$. Определите максимальный радиус батискафа (в метрах), если сила Архимеда по технологии не должна превосходить 1 130 400 Н. При расчёте примите следующие значения постоянных: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $g = 10 \text{ Н/кг}$, $\pi = 3,14$.

Задание 4.

Задача 7.



Задача 7.

Решение.

$$F_A \leq 1\,130\,400,$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \leq 1\,130\,400,$$

$$R^3 \leq \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{\pi \rho g \cdot 4},$$

$$R^3 \leq \frac{3 \cdot 1\,130\,400}{3,14 \cdot 1000 \cdot 10 \cdot 4} = 27,$$

$$R \leq 3.$$

Следовательно, радиус батискафа не должен превышать 3 м.

Ответ: 3.



Задание 4.

Задача 8.

В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2,5$ — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{1000}$ и $b = -\frac{1}{10}$ — постоянные, t — время в минутах с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах.)

Задача 8.

Решение.

Отсутствие воды в баке означает, что $H(t) = 0$. Подставим данные параметры в левую часть формулы, составим и решим уравнение.

$$H(t) = 0,$$

$$at^2 + bt + H_0 = 0,$$

$$\frac{t^2}{1000} - \frac{t}{10} + 2,5 = 0,$$

$$t^2 - 100t + 2500 = 0,$$

$$(t - 50)^2 = 0,$$

$$t = 50.$$

То есть вода из бака будет вытекать в течение 50 минут.

Ответ: 50.

Задание 4.

Задача 9.

9. Изменение высоты полёта брошенного вертикально вверх мяча описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 30t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах). Сколько секунд мяч находился на высоте не менее 25 м?



Задача 9.

Решение.

Составим и решим неравенство:

$$h(t) \geq 25,$$

$$-5t^2 + 30t \geq 25,$$

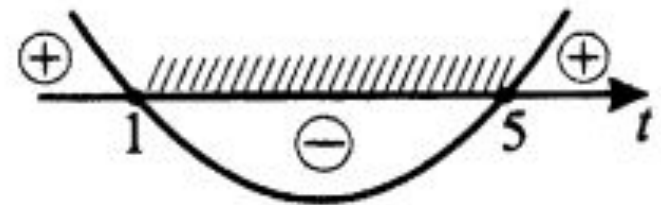
$$t^2 - 6t \leq -5,$$

$$t^2 - 6t + 5 \leq 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = 5.$$

$$t \in [1; 5],$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 4.$$

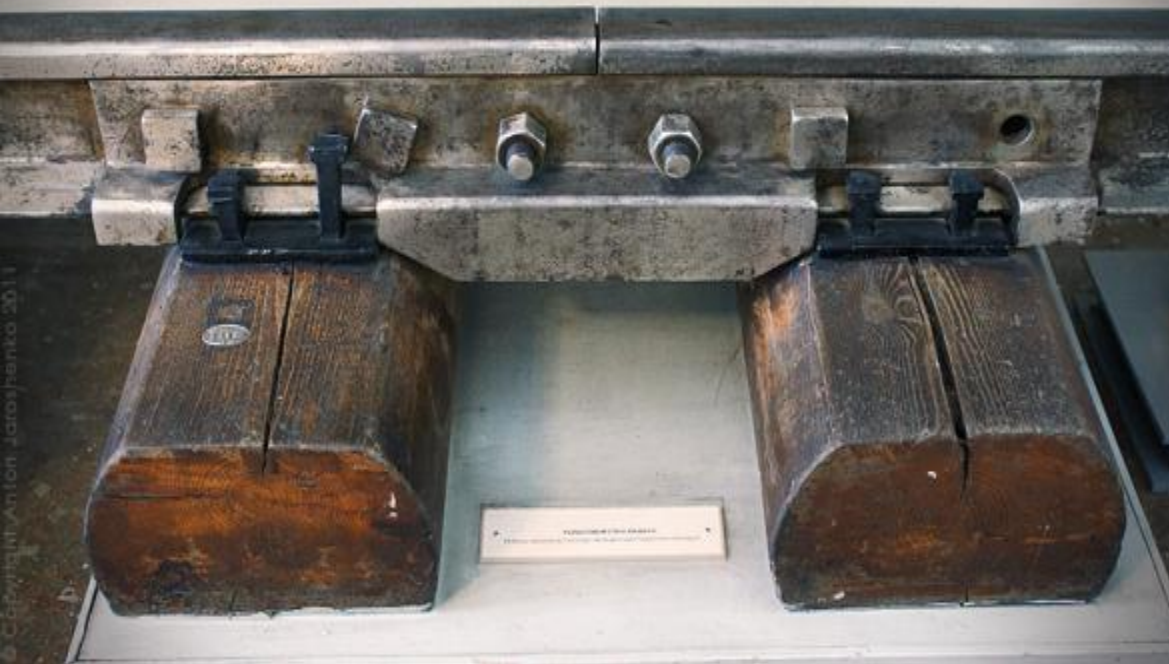


Итак, на высоте не менее 25 м мяч находился в течение 4 секунд.

Ответ: 4.

Задание 4.

Задача 10.



10. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20\text{ м}$. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 6 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

Задача 10.

Обозначим длину зазора через m и свяжем её с температурой. Затем определим значение температуры, при которой зазор станет равным нулю. Расстояние от начала одного рельса до начала следующего L складывается из длины рельса и зазора между рельсами. В исходном состоянии $L = l_0 + m_0$, после нагрева $L = l(t^\circ) + m$. При $m = 0$ получим

$$l(t^\circ) = l_0 + m_0,$$

$$l_0 + m_0 = l_0(1 + \alpha t^\circ),$$

$| : l_0,$

$$1 + \frac{m_0}{l_0} = 1 + \alpha t^\circ,$$

$$\alpha t^\circ = \frac{m_0}{l_0},$$

$$t^\circ = \frac{m_0}{\alpha l_0},$$

$$t^\circ = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 20} = \frac{5}{20} \cdot 10^2 = 25^\circ.$$

Следовательно, при 25°C каждый рельс удлинится на 6 мм и зазор между ними исчезнет.

Ответ: 25.

Задание 5.

Задачи на среднюю скорость



При решении задач на среднюю скорость важно знать:

Средняя скорость — есть отношение всего пройденного пути ко всему затраченному времени.

- Если *половину всего времени* объект двигался со скоростью V_1 , а вторую половину времени со скоростью V_2 , то средняя скорость $V_{\text{ср}}$ находится как *среднее арифметическое*

Действительно, если обозначить все время за t , то

$$V_{\text{ср}} = \frac{V_1 \frac{t}{2} + V_2 \frac{t}{2}}{t} = \frac{\frac{t}{2}(V_1 + V_2)}{t} = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

- Если *половину всего пути* объект двигался со скоростью V_1 , а вторую половину пути со скоростью V_2 , то находить среднее арифметическое скоростей нельзя!

Действительно, если обозначить весь путь за S , то

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{S}{\frac{S}{2}(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2}$$

Задание 5.

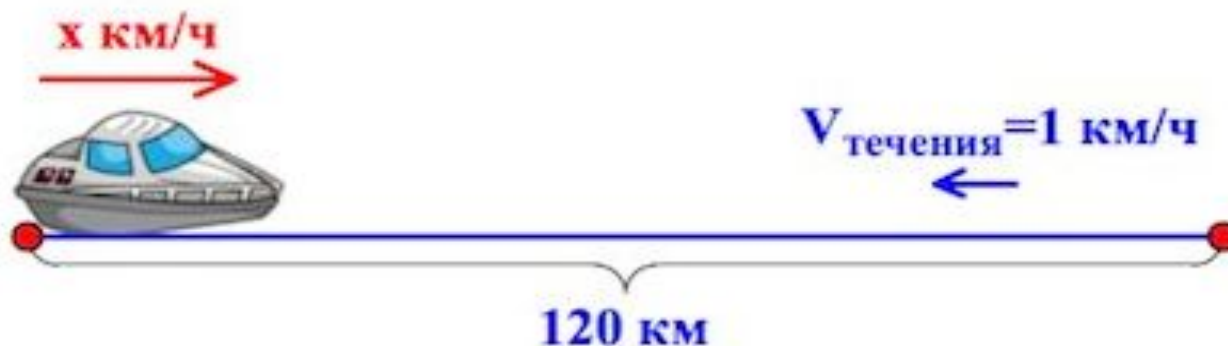
Задачи на движение по воде.

Задача 1.

Моторная лодка прошла против течения реки 120 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 1 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Задача 3.

Решение:



Пусть скорость лодки в неподвижной воде – $x \text{ км/ч}$. Тогда скорость лодки по течению – $x + 1 \text{ км/ч}$, против течения – $x - 1 \text{ км/ч}$.

Заполняем первые две колонки таблицы. После чего заполняем третью колонку, пользуясь формулой $t = \frac{S}{V}$.

	$S \text{ (км)}$	$V \text{ (км/ч)}$	$t \text{ (ч)}$
против теч.	120	$x-1$	$120:(x-1)$
по течению	120	$x+1$	$120:(x+1)$

Задача 3.

Поскольку на обратный путь лодка затратила на 2 часа меньше, то $\frac{120}{x+1}$ меньше $\frac{120}{x-1}$ на 2. Поэтому

$$\frac{120}{x+1} + 2 = \frac{120}{x-1};$$

Домножаем обе части уравнения на $(x+1)(x-1)$:

$$120(x-1) + 2(x-1)(x+1) = 120(x+1), \quad x \neq \pm 1;$$

$$120x - 120 + 2x^2 - 2 = 120x + 120, \quad x \neq \pm 1;$$

$$2x^2 = 242;$$

$$x^2 = 121;$$

В силу положительности величины x , имеем:

$$x = 11 \text{ (км/ч)} - \text{ скорость лодки в неподвижной воде.}$$

Ответ: 11.

Задание 5.

Задача 2.

Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 165 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

Задача 2.

Пусть вторая труба пропускает x литров воды в минуту. Тогда согласно условию первая труба пропускает $x - 4$ л/мин.

Заполняем таблицу:

	A (литров)	V (литров/мин)	t (мин)
I	165	$x-4$	$165:(x-4)$
II	165	x	$165:x$

Время заполнения первой трубой резервуара на 4 минуты дольше по сравнению со второй трубой, то есть $\frac{165}{x-4}$ больше $\frac{165}{x}$ на 4.

Задача 2.

Поэтому

$$\frac{165}{x-4} - \frac{165}{x} = 4;$$

$$165x - 165(x - 4) = 4x(x - 4);$$

$$165 \cdot 4 = 4x(x - 4);$$

$$165 = x^2 - 4x;$$

$$x^2 - 4x - 165 = 0;$$

$$x = 2 \pm 13;$$

Откуда следует, что $x = 15$. «Это производительность второй трубы.

А производительность первой тогда $15 - 4 = 11$ литров в минуту.

Ответ: 11.

Задание 5.

Задачи, решаемые с помощью прогрессий Задача 3.



Олегу надо решить 315 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Олег решил 11 задач. Определите, сколько задач решил Олег в последний день, если со всеми задачами он справился за 9 дней.

Задача 3.

Решение:

Вводим арифметическую прогрессию $\{a_n\}$:

$a_1 = 11$ – количество решенных задач в первый день;

$n = 9$ – количество дней;

$S_9 = 315$ – количество решенных задач за все 9 дней (сумма 9 первых членов арифметической прогрессии);

Требуется найти a_9 .

$$\text{Итак, } S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9;$$

$$315 = \frac{11 + a_9}{2} \cdot 9;$$

$$35 = \frac{11 + a_9}{2};$$

$$70 = 11 + a_9;$$

$$a_9 = 59;$$

Ответ: 59.

Задача 4



Бизнесмен Плюшкин получил в 2000 году прибыль в размере 1000000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 7% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Плюшкин за 2003 год?

Задача 4.

Решение:

Очень многие попадают на этой задачке, считая, что в ней скрывается арифметическая прогрессия.

Нет, все хитрее. Дело в том, что прибавка прибыли – не одинакова каждый год. Каждый год 7% от прибыли предыдущего года в пересчет на рубли – разные величины.

В данном случае имеем дело с геометрической прогрессией $\{C_n\}$.

C_n – прибыль (в рублях) за n -ый год ($n = 1, 2, 3, 4$, 2000-ый год считаем первым годом прибыли, 2001-ый – вторым и т.д.).

Известно следующее:

$$C_1 = 1000000;$$

$$q = \frac{107}{100}, \text{ так как увеличение на } 7\% \text{ – значит увеличение в } \frac{107}{100} \text{ раз.}$$

Требуется узнать C_4 .

Задача 4.

Согласно формуле n -го члена геометрической прогрессии $c_n = c_1 \cdot q^{n-1}$ имеем:

$$c_4 = c_1 \cdot q^3;$$

$$c_4 = 1000000 \cdot \left(\frac{107}{100}\right)^3;$$

$$c_4 = 1225043 - \text{прибыль за 2003 год.}$$

Ответ: 1225043.

Задание 5.

Задача 5.

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение:

	муж	жена	дочь	доход семьи
<i>В реальности</i>	x	y	z	$x+y+z$
<i>Ситуация А</i>	$2x$	y	z	$1,67(x+y+z)$
<i>Ситуация В</i>	x	y	$\frac{1}{3}z$	$0,96(x+y+z)$



Получим:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1,67(x + y + z) \\ x + y + \frac{1}{3}z = 0,96(x + y + z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,67(x + y + z) \\ z = 0,06(x + y + z) \end{cases}$$

Т.е. зарплата жены составляет 27% общего дохода.

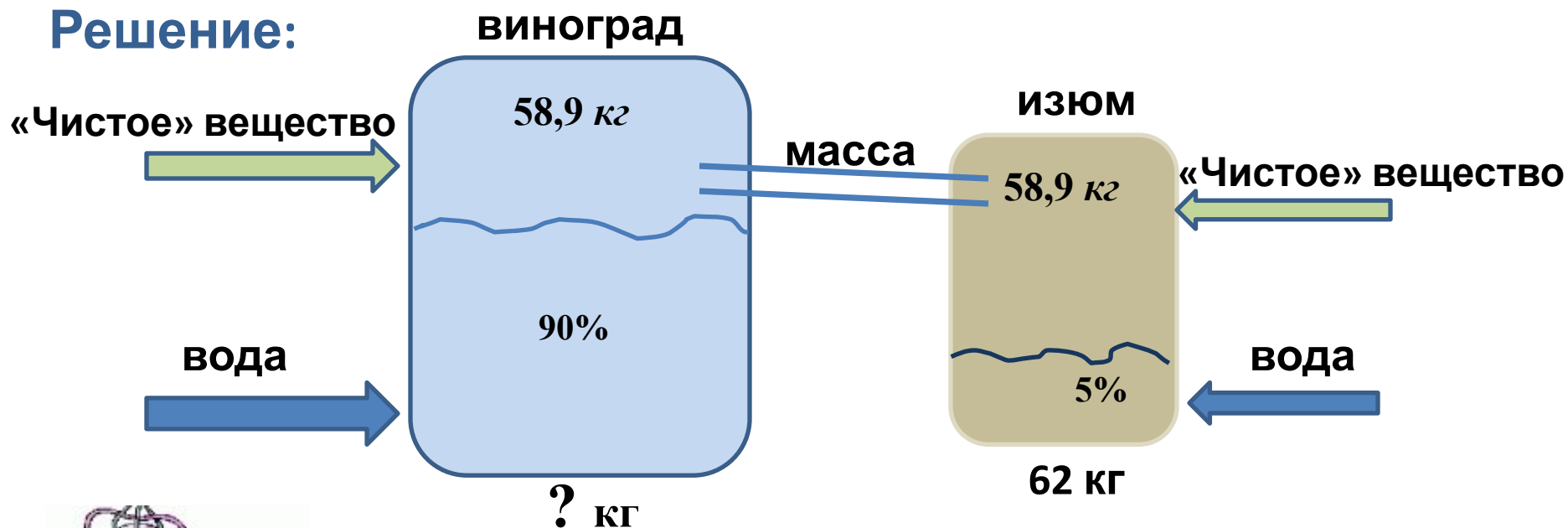
Ответ: 27.

Задание 5.

Задача 6.

Виноград содержит 90% влаги, а изюм — 5%. Сколько килограммов винограда требуется для получения 62 килограммов изюма?

Решение:



$$\begin{array}{l} 58,9 \text{ кг} - 10 \% \\ ? \text{ кг} - 100 \% \end{array} \Leftrightarrow ? = 589 \text{ кг}$$

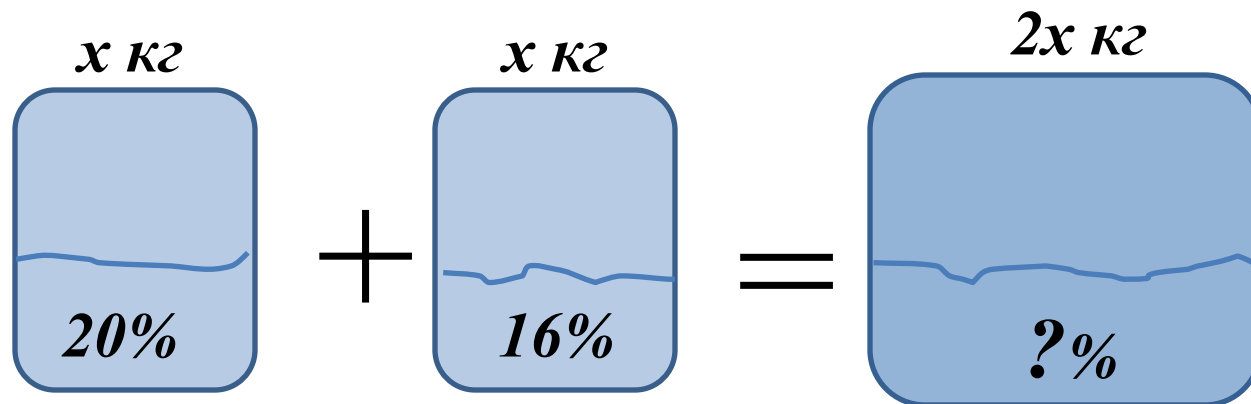
Ответ: 589

Задание 5.

Задача 6.

Смешали некоторое количество 20-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 16-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение:



$$0,2x + 0,16x = 0,36x = 0,18 \cdot 2x$$

Ответ: 18

