

Элементы электрической цепи синусоидального тока

ИНДУКТИВНОСТЬ

Вокруг всякого проводника с током образуется магнитное поле, которое характеризуется вектором магнитной индукции B и магнитным потоком Φ :

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = B \cdot S$$

Если поле образуют несколько (W) проводников с одинаковым током, то используют понятие потокосцепления Ψ

$$\Psi = W \cdot \Phi$$

Отношение потокосцепления к току, который его создает называют индуктивностью катушки

$$L = \frac{\Psi}{i_L}$$

При изменении во времени потокосцепления согласно закону Фарадея возникает ЭДС самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

$$u_L = -e_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Емкость

Все проводники с электрическим зарядом создают электрическое поле. Характеристикой этого поля является разность потенциалов (напряжение).

Электрическую емкость определяют отношением заряда проводника к напряжению

$$C = Q / U_C$$

С учетом соотношения

$$i = dQ / dt$$

получаем формулу связи тока с напряжением

$$i = C \cdot du_C / dt.$$

Для удобства это выражение интегрируют и получают

$$u_C = (1 / C) \cdot \int i dt.$$

Это соотношение является аналогом закона Ома для емкости.

Единицы измерения:

- Индуктивности - ГЕНРИ (Гн);
- Емкости – ФАРАД (Ф).

Конструктивно основные элементы представляются следующим образом:

- индуктивность, как катушка с проводом;
- емкость, как два параллельных проводника.

Основные свойства простейших цепей переменного тока

Простейшие цепи – цепи, содержащие один элемент.

1. Участок цепи, содержащий резистор

Зададимся изменением тока в резисторе по синусоидальному закону

$$i(t) = I_{mR} \sin(\omega t + \psi_i).$$

Воспользуемся законом Ома для мгновенных значений тока и напряжения

$$u(t) = R i(t)$$

и получим

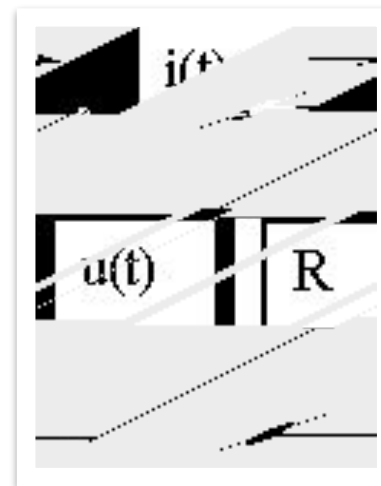
$$u(t) = R I_{mR} \sin(\omega t + \psi_i).$$

Формальная запись синусоидального напряжения имеет вид

$$u(t) = U_{mR} \sin(\omega t + \psi_u).$$

Соотношения будут равны если будут выполнены условия равенства амплитуд и фаз

$$\begin{aligned} U_{mR} &= R I_{mR}, \\ \psi_u &= \psi_i. \end{aligned}$$



1. Участок цепи, содержащий резистор

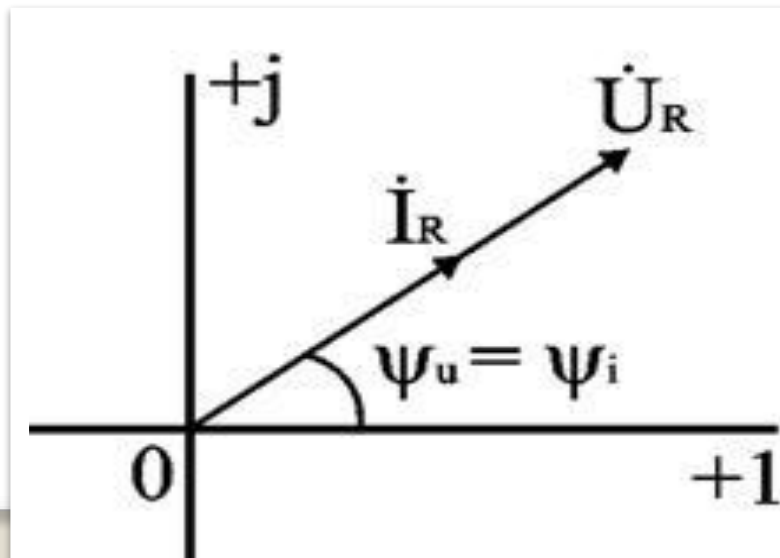
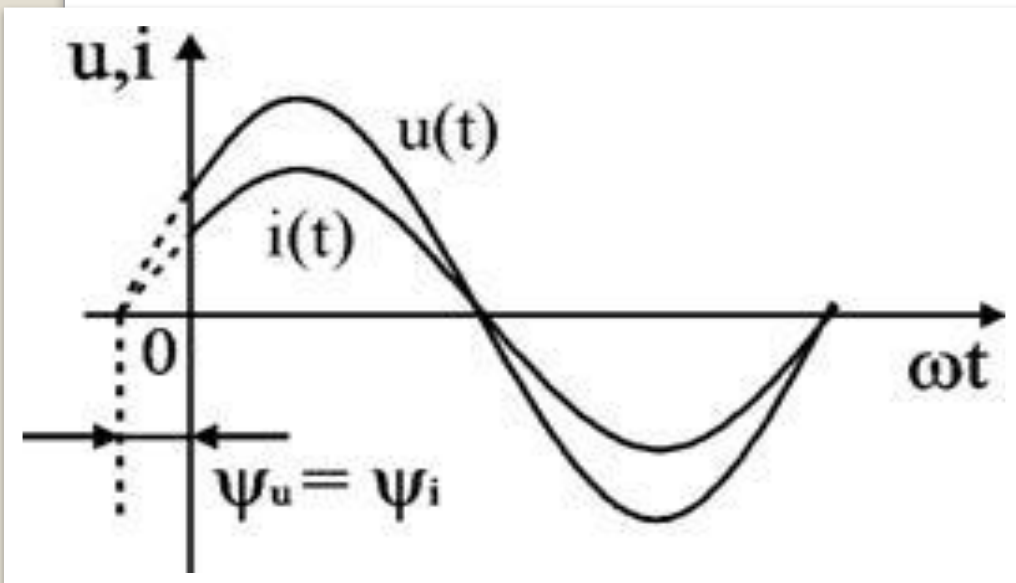
Соотношение может быть записано для действующих значений

$$U_R = R I_R.$$

Вывод:

1. Закон Ома для резистора в цепи переменного тока аналогичен закону Ома для элемента в цепи постоянного тока.
2. Фазы напряжения и тока в резисторе совпадают ($\varphi = 0$).

Графически это может быть представлено в виде временной диаграммы и на комплексной плоскости.



2. Участок цепи, содержащий идеальную индуктивность

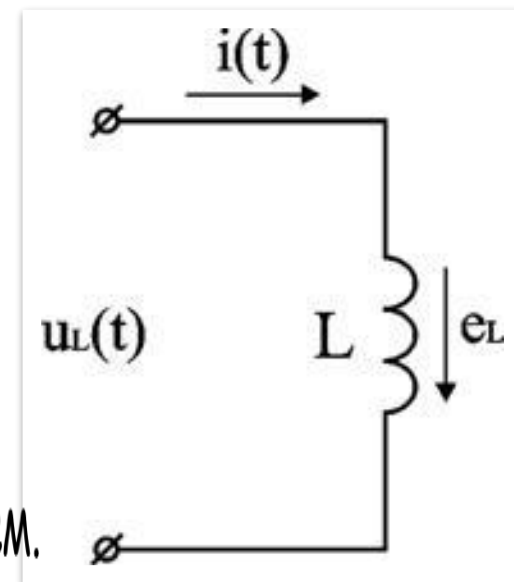
Вывод:

- 1) Фаза тока в индуктивности отстает от фазы напряжения на 90° .
- 2) Закон Ома для участка цепи с индуктивным сопротивлением

$$U_L = X_L \cdot I_L$$

Величину $X_L = \omega L$ называют индуктивным сопротивлением.

Единицей его измерения является Ом.



Вывод:

- 1) Фаза тока в индуктивности отстает от фазы напряжения на 90° .
- 2) Закон Ома для участка цепи с индуктивным сопротивлением

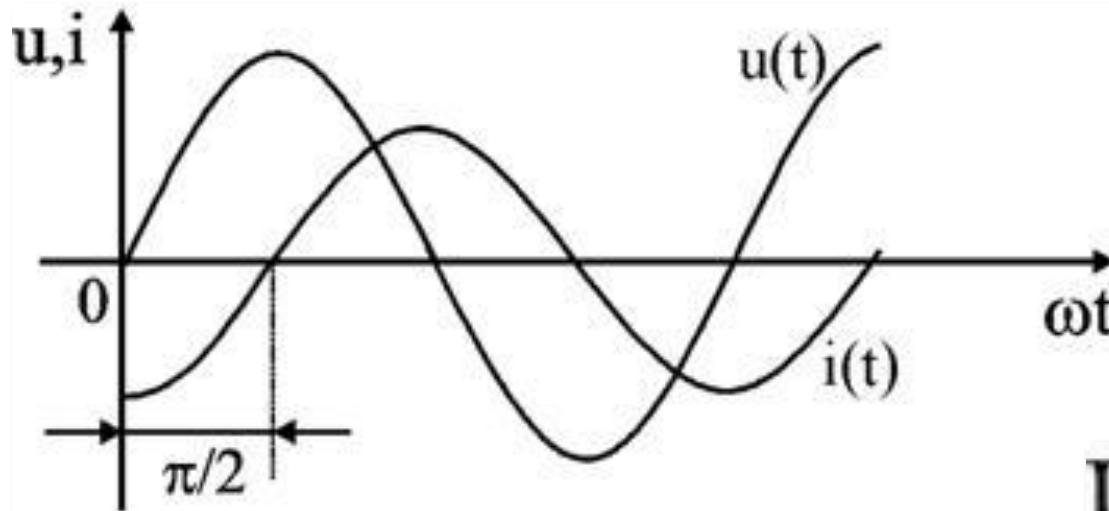
$$U_L = X_L \cdot I_L$$

Величину $X_L = \omega L$ называют индуктивным сопротивлением.

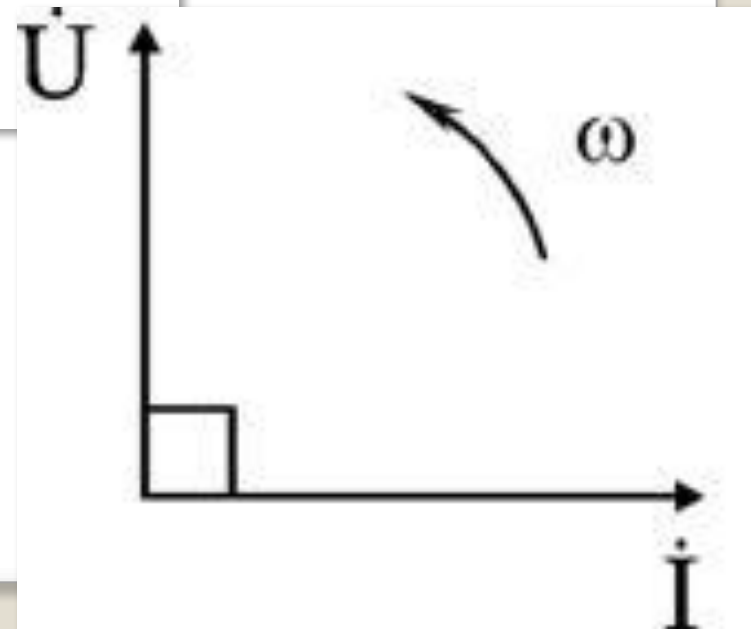
Единицей его измерения является Ом.

2. Участок цепи, содержащий идеальную индуктивность

Графически электрические процессы в индуктивности представлены на рисунках снизу.



$$\varphi = +90^\circ$$



3. Участок цепи, содержащий ёмкость

Вывод:

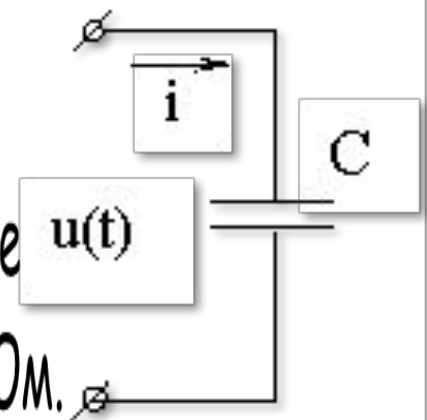
1) Фаза тока в индуктивности отстает от фазы напряжения на 90° .

2) Закон Ома для участка цепи с индуктивным сопротивлением

$$U_L = X_L \cdot I_L$$

Величину $X_L = \omega L$ называют индуктивным сопротивлением

Единицей его измерения является Ом.



Вывод:

1) Фаза тока в индуктивности отстает от фазы напряжения на 90° .

2) Закон Ома для участка цепи с индуктивным сопротивлением

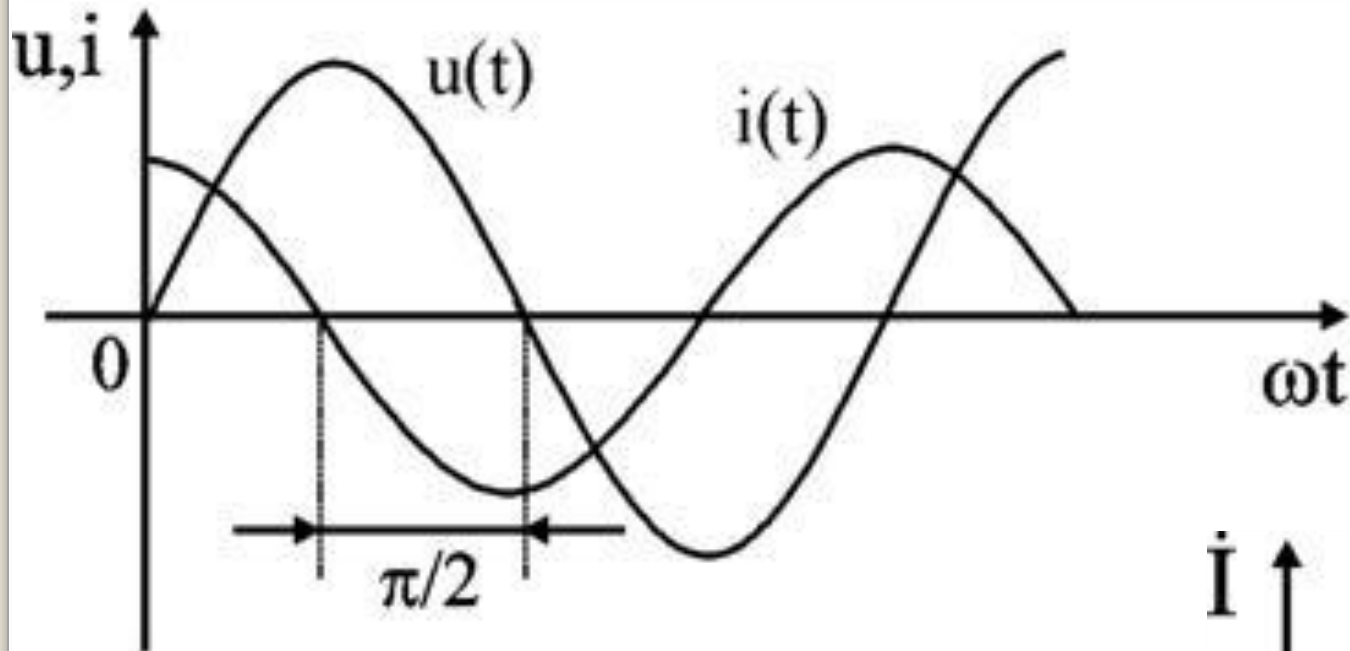
$$U_L = X_L \cdot I_L$$

Величину $X_L = \omega L$ называют индуктивным сопротивлением.

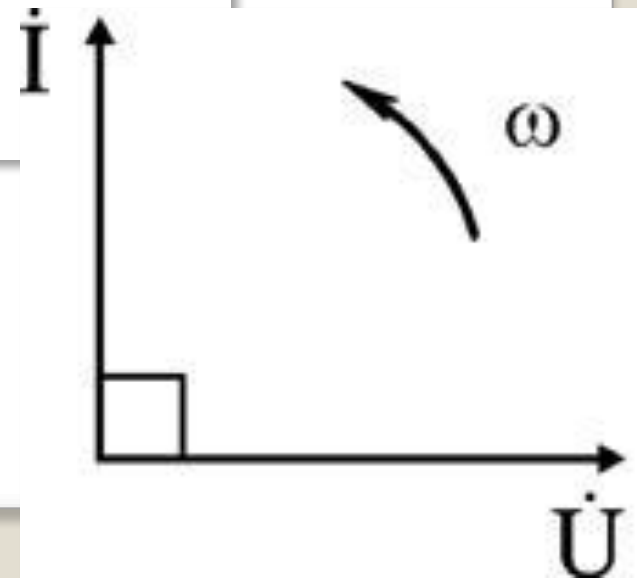
Единицей его измерения является Ом.

3. Участок цепи, содержащий ёмкость

Графически электрические процессы в емкости представлены на рисунке снизу.



$$\varphi = -90^\circ$$



Сопротивления в цепи переменного тока

В цепях переменного тока выделяют следующие виды сопротивлений:

Активное. Активным называют сопротивление резистора. Единицей измерения сопротивления является Ом. Сопротивление резистора не зависит от частоты.

Реактивное. В разделе реактивные выделяют три вида сопротивлений:

индуктивное X_L

емкостное X_C

собственно реактивное X . $X = X_L - X_C$.

Полное сопротивление. Полным сопротивлением цепи называют величину (при последовательном соединении элементов в цепи):

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Сопротивления в цепи переменного тока

Сопротивления Z , R и X в цепи переменного тока образуют прямоугольный треугольник:

Z – гипотенуза, R и X – катеты.

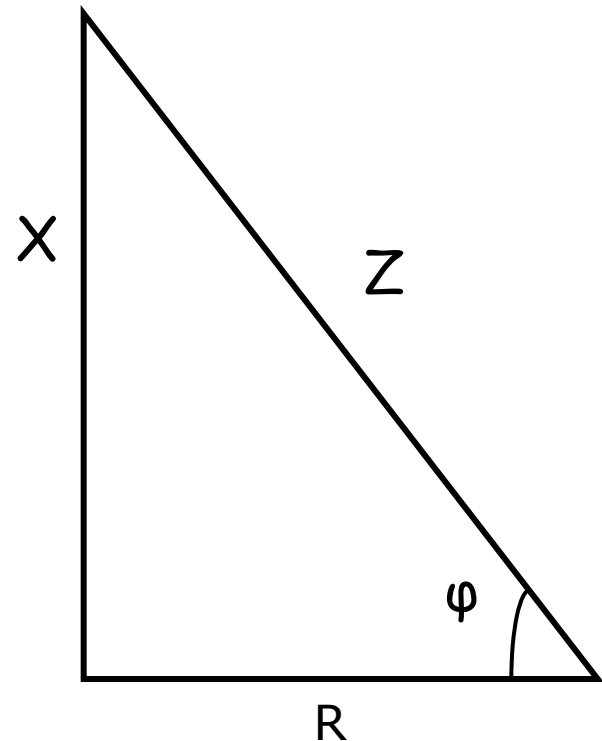
Для удобства в этом треугольнике рассматривают угол φ , который определяют уравнением

$$\varphi = \arctg((X_L - X_C) / R),$$

и называют углом сдвига фаз. С учетом него можно дать дополнительные связи

$$R = Z \cos \varphi,$$

$$X = Z \sin \varphi.$$



Мощности в цепях переменного тока

Элемент R (резистор)

По аналогии с мощностью в цепях постоянного тока $P = U I$, в цепях переменного тока рассматривают мгновенную мощность $p = u i$. Для упрощения рассмотрим мгновенную мощность в каждом из элементов R, L и C отдельно.

Зададим напряжение и ток в виде соотношений

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \sin(\omega t + \psi_u), \\ i(t) &= I_m \sin(\omega t + \psi_i). \end{aligned}$$

Известно, что для резистора $\psi_u = \psi_i$, тогда для мощности получим

$$p(t) = u(t) i(t) = U_m I_m \sin^2(\omega t + \psi_i).$$

Из уравнения видно, что мгновенная мощность всегда больше нуля и изменяется во времени. В таких случаях принято рассматривать среднюю за период T мощность

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \psi_i) dt = \frac{U_m I_m}{2}$$

Элемент R (резистор)

Если записать U_m и I_m через действующие значения напряжения и тока, то получим

$$\underline{P = UI}$$

По форме данное уравнение совпадает с мощностью в цепях постоянного тока.

Величину P равную произведению действующих значений тока и напряжения называют **активной** мощностью. Единицей ее измерения является Ватт (Вт).

Элемент L (индуктивность)

Известно, что в индуктивности соотношение фаз $\psi_u = \psi_i + 90^\circ$.

Для мгновенной мощности имеет

$$p_L = u i = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) I_m \sin(\omega t) = \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t)$$

Усредняя уравнение по времени за период T получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T p_L dt = 0$$

Для количественной оценки мощности в индуктивности используют величину Q_L равную максимальному значению p_L

$$Q_L = (U_m I_m) / 2$$

и называют ее **реактивной (индуктивной)** мощностью.

Единицей ее измерения выбрали ВАр (вольт-ампер реактивный). Уравнение можно записать через действующие значения U и I и используя формулу $U_L = I X_L$ получим

$$Q_L = I^2 X_L$$

Элемент С (ёмкость)

Известно, что в емкости соотношение фаз $\psi_u = \psi_i - 90^\circ$.

Для мгновенной мощности получаем

$$p_C(t) = u(t) I(t) = [(U_m I_m) / 2] \cdot \sin(2\omega t).$$

Среднее значение за период здесь также равно нулю. По аналогии с уравнением для реактивной (индуктивной) мощности вводят величину

$$\underline{Q}_C = I^2 \underline{X}_C,$$

которую называют **реактивной (емкостной)** мощностью.

Единицей ее измерения также является ВАр.

Полная мощность

Если в цепи присутствуют элементы R, L и C, то активная и реактивная мощности определяются уравнениями

$$P = U I \cos \varphi,$$

$$Q = Q_L - Q_C,$$

$$Q = U I \sin \varphi,$$

где φ – угол сдвига фаз.

Вводят понятие полной мощности цепи

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

С учетом уравнений можно записать в виде

$$\underline{S = U I}.$$

Единицей измерения полной мощности является

ВА – вольт-ампер.