Исследовательская работа

<u>Тема</u>:Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

Выполнила: Окорокова Ольга
Ученица 10 класса
МБОУ школы-интернат №1
Руководитель: Карелина Светлана Александровна,
Учитель математики

-
- **<u>Цель:</u>** освоить некоторые способы решения уравнений и неравенства содержащих знак модуля
- **<u>Задачи:</u>**
- Изучить теоретический материал
- Рассмотреть примеры решения уравнений и неравенств
- Найти наболее <u>рациональный</u> способ решения

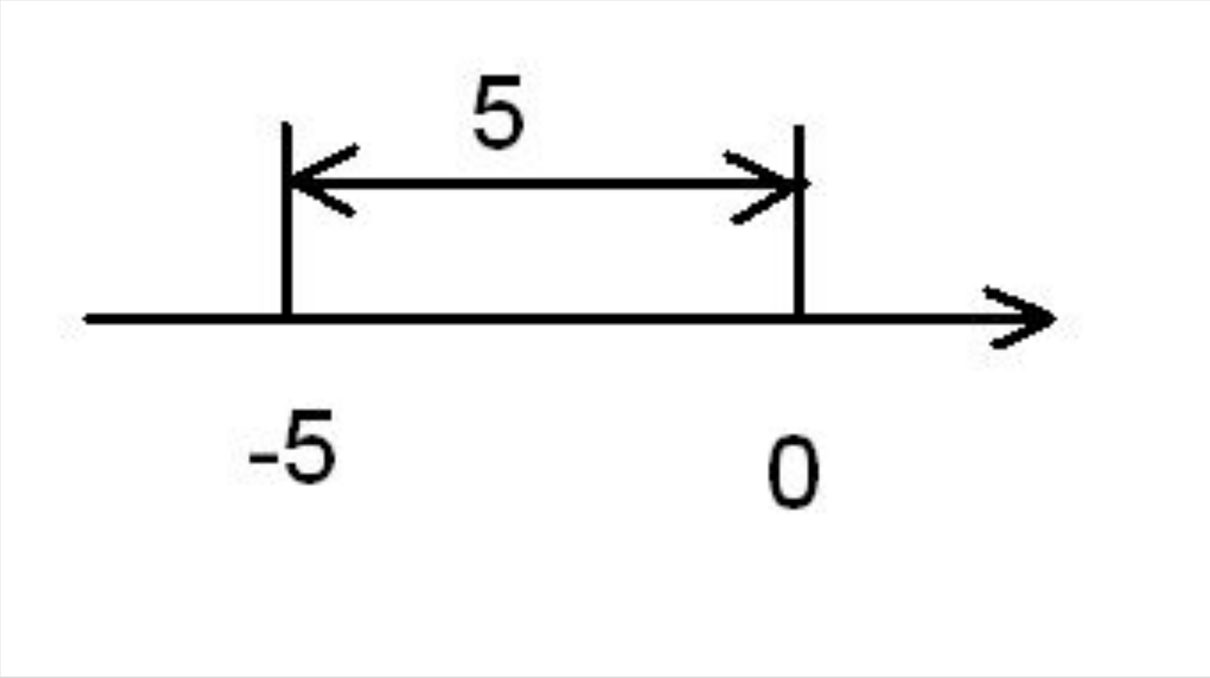
Определение модуля

Модулем (абсолютной величины) действительного числа **a** называется то самое число **a>0**, и противоположное число **-a**, если **a<0**.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля

В математике модулем числа **a** называется расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки **A(a)**.



Свойства модуля

Свойство 1: $|a| \geq 0$

Пример: $|3| > 0$, $|-15| > 0$.

Свойство 2: $|a| = |-a|$

Пример: $|4| = |-4| = 4$, $|-56| = |56| = 56$.

Свойство 3: $|a+b| = |a| + |b|$

Пример: $|3+2| = |3| + |2| = 5$

Свойство 4: $|a-b|=|a|-|b|$

Пример: $|13-4|=|13|-|4|=9$

Свойство 5: $|a\times b|=|a|\times|b|$

Пример: $|5\times 3|=|5|\times|3|=15$, $|8\times(-4)|=|8|\times|-4|=32$

Свойство 6: $|a^2|=a^2$

Пример: $|5^2|=5^2=25$

Решение уравнений, содержащих модуль

Уравнения вида $|f(x)|=a$.

Если **a<0**, то **решений нет.**

Если **a=0**, то f(x)=0

Если **a>0**, то данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{array}\right.$$

Пример

Найдите корни уравнения

$$|x^2-4x-1|=4$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-4x-1=4 \\ x^2-4x-1=-4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2-4x-5=0 \\ x^2-4x+3=0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=-1, x_2=5; \\ x_3=1,\ x_4=3; \end{array}\right.$$

Ответ: -1; 1; 3; 5.

Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$

Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно уравнению:

$$f^2(x)=g^2(x) \leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))=0 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Пример

Найдите сумму корней уравнения:

$$|x^2-2x| = |1-2x|$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x=1-2x \\ x^2-2x=2x-1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{r} x^2=1 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$$

двух и более модулей, а именно $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_n(x)=g(x)$, решаются методом интервалов.

Решение:

- Находим значения х, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;
- Полученными точками разбиваем область допустимых значений переменной х на промежутки, на каждом из которых выражения под знаком модуля сохраняют знак;
- Раскрываем все модули на каждом из полученных промежутков;
- На каждом промежутке исходное уравнение заменяется равносильным уравнением, не содержащем знак модуля.

Объединение найденных решений составляет множество решений заданного уравнения.

$4-x=0 \qquad 2x-2=0$

$x=4 \qquad x=1$

Получили промежутки: $(-\infty;1]\cup(1;4]\cup(4;+\infty)$

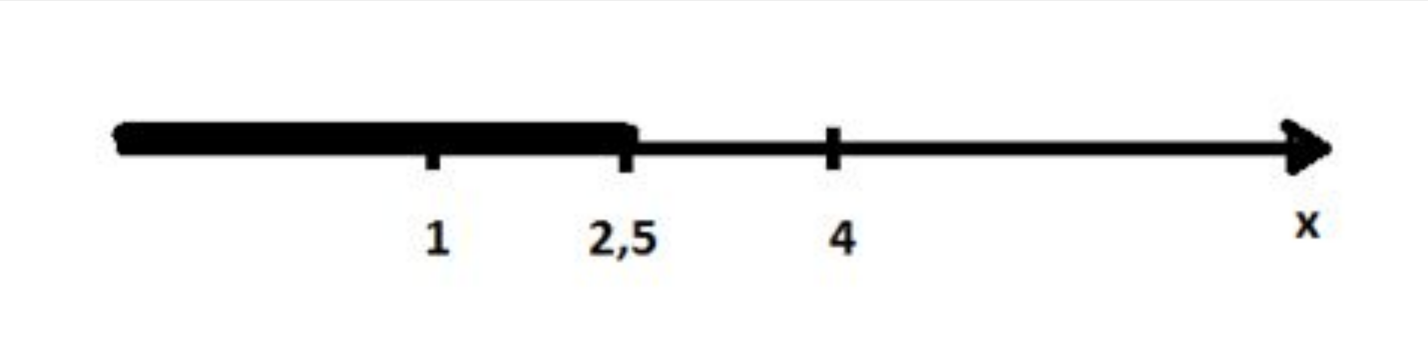
Отметим, что **$|4x-x|+|2x-2|\geq 0$,**
следовательно $5-2x\geq 0$

$5-2x\geq 0$

$2x\leq 5$

$x\leq 2,5$

Получили новые промежутки:



$(-\infty;1]\cup(1;2,5)$

Раскроем модули на каждом из промежутков:

(-∞;1]

$|4-x|=4-x$ $|2x-2|=-(2x-2)$

4-x-(2x-2)=5-2x

4-x-2x+2=5-2x

-x-2x+2x=5-4-2

-x= -1

x=1 – корень уравнения

Ответ: 1

(1;2,5]

$|4-x|=4-x$ $|2x-2|=2x-2$

4-x+2x-2=5-2x

-x+2x+2x=5-4+2

3x=3

x=1 – не принадлежит промежутку (1;2,5]

Решение неравенств, содержащих модуль

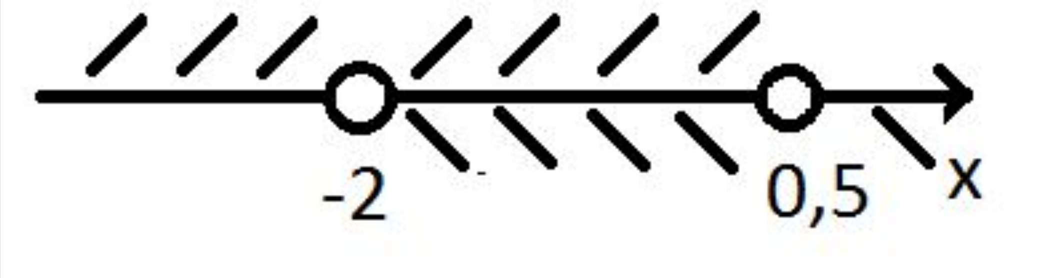
Неравенства вида $|f(x)| \vee g(x)$, где $\vee$ - это один из знаков: $\geq$; $>$; $\leq$; $<$

Рассмотрим частный случай:

$$|f(x)| < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$$

$|4x+3|<5$

Данное неравенство равносильно системе неравенств



Неравенства вида $|f(x)| \vee |g(x)|$, где $\vee$ - это один из знаков: $\geq$; $>$; $\leq$; $<$

<u>Рассмотрим частный случай:</u>

$$|f(x)| < |g(x)| \leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$$

$$|f(x)| < |g(x)| \leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) < 0$$

Пример

Решите неравенство

$|5x+3| < |2x-1|$

$(5x+3)^2<(2x-1)^2 \leftrightarrow (3x+4)(7x+2)<0$

$3x+4=0$ $\qquad$ $7x+2=0$

$x=-\frac{3}{4}$ $\qquad$ $x=-\frac{2}{7}$

Ответ: $(-\frac{4}{3};-\frac{2}{7})$

Графическое решение уравнений и неравенств

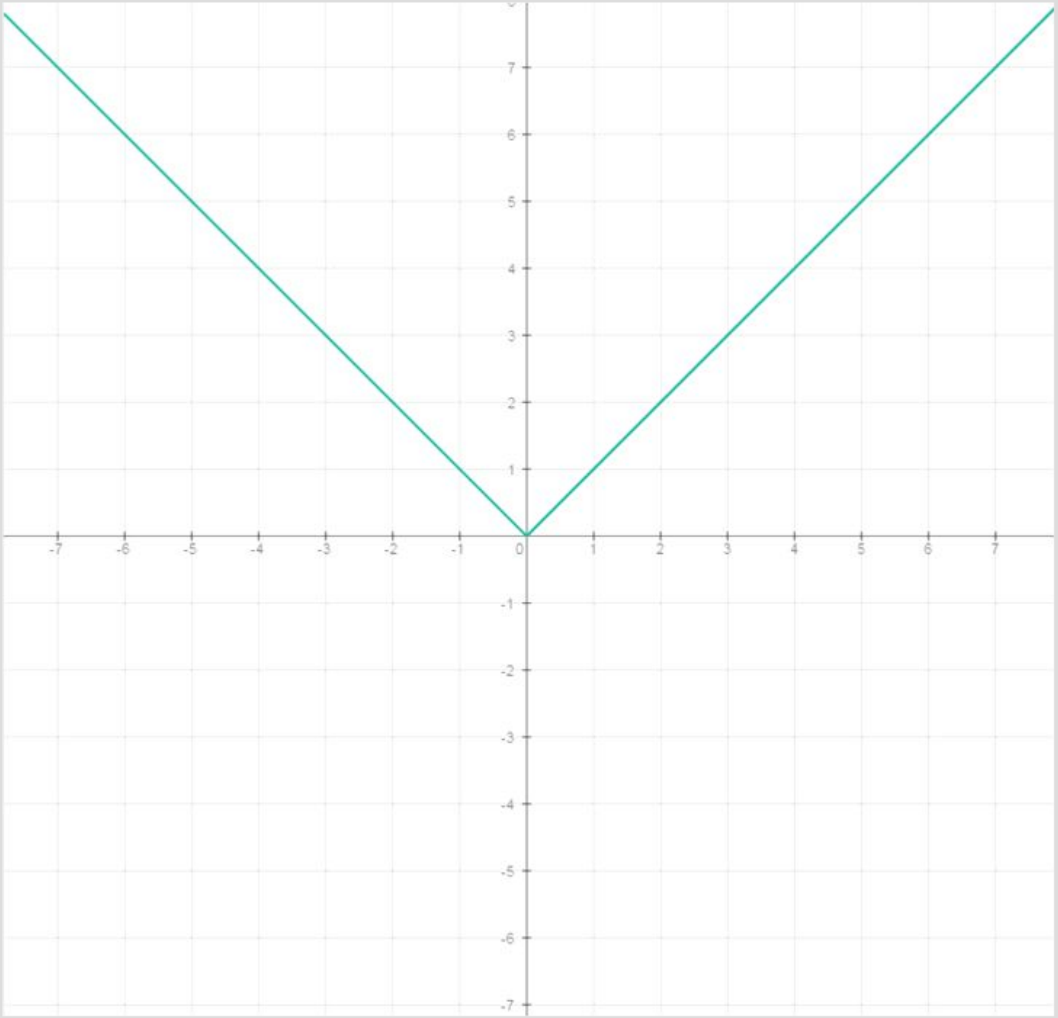
Пример

<u>Постройте график функции</u>

$y=|x|$

если $\mathbf{x\geq 0}$, то $|\mathbf{x}|\mathbf{=x}$

если $\mathbf{x<0}$, то $|\mathbf{x}|\mathbf{=-\,x}$



Пример

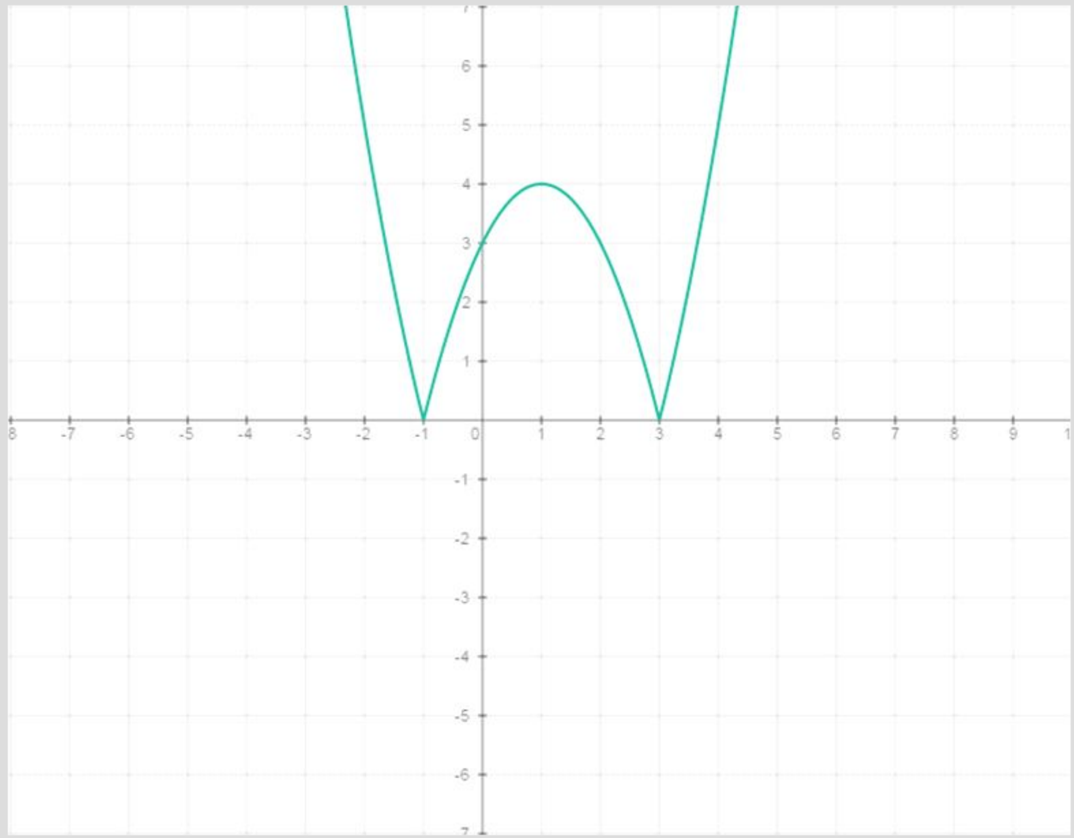
Построить график функции и найти значения а, где прямая у=а имеет с графиком три общие точки

$y = |-x^2+2x+3|$

Данная функция является параболой.

Найдем ее вершину:

$x_0=1$ $y_0=4$



Все, что находится ниже осиX, мы отобразим в положительной части, так как

Пример

Построить график функции

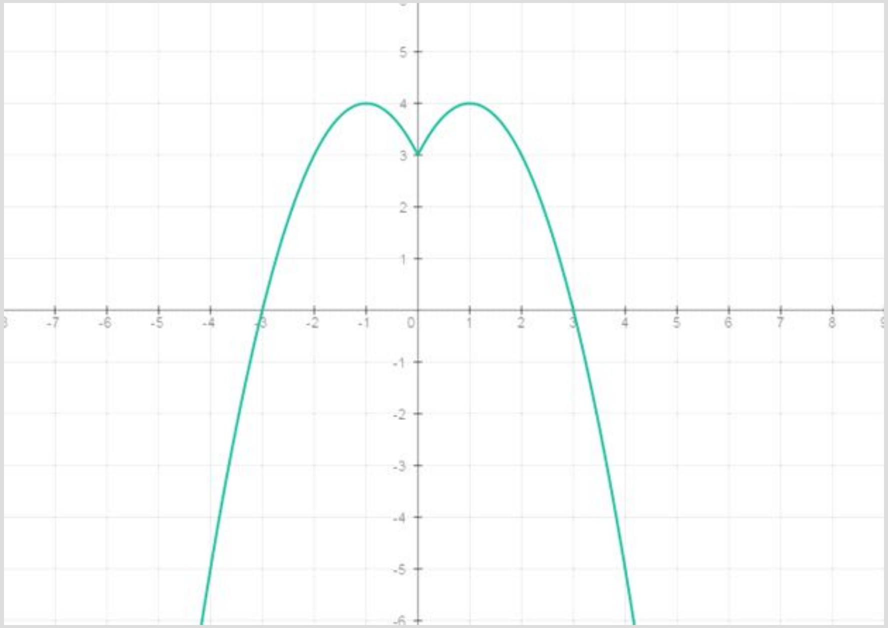
$y=-x^2+2|x|+3$

если $|x|=x$, то $\mathbf{y=-x^2+2x+3}$**, где** $\mathbf{x \geq 0}$

если $|x|=-x$, то $\mathbf{y=-x^2-2x+3}$**, где** $\mathbf{x<0}$

получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -x^2+2x+3; x \geq 0 \\ -x^2-2x+3; x<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0=1;\ y_0=4 \\ x_0=-1;\ y_0=4 \end{cases}$$



Заключение

Метод интервалов: эффективность, небольшой объем работы.

Графический метод: широкое применение в других темах школьного курса математики. Недостаток – ответ определяется приблизительно.

Геометрическая интерпретация модуля. Применения данного метода – перевод алгебраической задачи заданного способа ограничивается уравнениями определенного вида.

Источники информации

- Дорофеев Г. В. Подготовка к письменному экзамену за курс средней шкоы.
- Смоляков А. Н. «Уравнения и неравенства, содержащимодуля»
- Лазарев К. П. «О модулях и знаках чисел»

Спасибо за внимание